This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LSoc1726.9 Bd. May. 1894.

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

27 May 1893 — 6 Apr. 1894.

N. a. f. p. 67/

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

FÜNFUNDVIERZIGSTER BAND.

1893.

MIT ACHTZEHN FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

~~48.23~~

L [illegible]

1893, [illegible] 27 - 1894, Apr. 6.

Small fund.

INHALT.

Seite

W. Ostwald, Die Dissociation des Wassers 1

A. Looss, Zur Frage nach der Natur des Körperparenchyms bei den Trematoden, nebst Bemerkungen über einige andere, zur Zeit noch offene Fragen. Vorgelegt von Herrn Leuckart. 10

M. Krause, Über Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind 35

W. Ostwald, Zur Thermochemie der Jonen 54

Robert Behrend, Electrometrische Analyse. Mit einer Figur. . . 69

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen 99

F. Hausdorff, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. II. Vorgelegt von Herrn Bruns 120

P. Stäckel, Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses. Vorgelegt von Herrn Lie 163

A. Wangerin, Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses, Zusatz zu der vorstehenden Arbeit des Herrn P. Stäckel. Vorgelegt von Herrn Lie 170

R. Schumann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn Bruns. 178

Fr. Hayn, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn Bruns. 284

H. Ambronn, Über eine neue Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten anisotroper mikroskopischer Objecte. 316

W. Pfeffer berichtete über Untersuchungen des Herrn Dr. Miyoshi aus Tokio, betreffend die chemotropischen Bewegungen von Pilzfäden. 319

R. Leukart, Über den Infundibularapparat der Hirudineen 325

P. Stäckel, Über dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine infinitesimale Transformation gestatten. Vorgelegt von Herrn Lie 334

Sophus Lie, Über Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen 344

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. II 349

F. Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. VIII. 360

Sophus Lie, Über die Gruppe der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten 370

A. Mayer, Über die unfreie Bewegung eines materiellen Punktes unter Berücksichtigung der Reibung 379

Elie Cartan, Über die einfachen Transformationsgruppen. Vorgelegt von Herrn Lie 395

Seite

W. Pfeffer spricht, auf Grund der von Herrn BARTHOLD HANSTEEN im botanischen Institut ausgeführten Untersuchungen, über die Ursachen der Entleerung der Reservestoffe aus Samen 421

C. Neumann, Zur Theorie des Magnetismus. Vorläufige Mittheilung 429

W. Scheibner, Über eine Methode von C. G. J. JACOBI zur Bestimmung des Restes unendlicher Reihen 432

P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Vorgelegt von Herrn Lie 444

Fr. Engel, Die höheren Differentialquotienten 468

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Neunundzwanzigste Abhandlung 477

M. Siegfried, Über eine neue stickstoffhaltige Säure der Muskeln. Vorgelegt von Herrn C. Ludwig 485

J. Hartmann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn Bruns 490

Otto Staude, Über die Bahncurven eines in einem Raume von drei Dimensionen beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen. Vorgelegt von Herrn Engel 511

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. III. 528

E. Naetsch, Über eine gewisse Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art integriren lassen. Vorgelegt von Herrn M. Krause 538

H. Wiener, Über Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften. VI. Vorgelegt von Herrn Engel. Mit 17 Figuren. . . . 555

W. Ostwald, Über das Princip des ausgezeichneten Falles 599

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Dreissigste Abhandlung 604

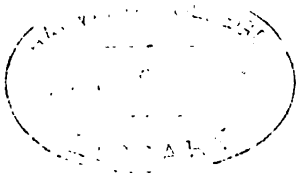
Friedrich Engel, Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Zweite Mittheilung, mit Beiträgen von E. STUDY 659

A. Mayer, Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene 697

F. Hausdorff, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. III. Vorgelegt von Herrn Bruns 758

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. IV 805

G. Scheffers, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen. Erste Abhandlung. Vorgelegt von Herrn Lie 828



Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Professor *August Leskien* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1894.
Hugo Berger in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
—— *Georg Götz* in Jena.
—— *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig.
Professor *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August von Miaskowski* in Leipzig.
—— —— *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.

Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Theodor Schreiber* in Leipzig.
—— *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— *Albert Socin* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.
—— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Breslau.
—— *Georg Ebers* in München.
—— *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1895.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1895.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
—— *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
Geheimer Rath *Carl Ludwig* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Friedrich Stohmann* in Leipzig.
—— *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Oberbergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Richard Altmann* in Leipzig.
—— *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Robert Behrend* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
Dr. *Otto Fischer* in Leipzig.
Professor *Max von Frey* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
Geheimer Regierungsrath *Adalbert Krüger* in Kiel.
Professor *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.

Noorden, Carl von, 1883.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schweigrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1893.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1893 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1892. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1892, No. 41—55. 1893, No. 1—38.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 19. Berlin 1892.

Kalkmann, A., Die Proportionen des Gesichts in der griechischen Kunst. Dreiundfünfzigstes Programm zum Winkelmannsfeste der Archäolog. Gesellschaft. Berlin 1893.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 25, No. 19. 20. Jahrg. 26, No. 1—18. Berlin 1892. 93.

Die Fortschritte der Physik im J. 1886. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 42, Abth. 1—3. Berlin 1892.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 6 (Jahrg. 1892), No. 19—21. Bd. 7 (Jahrg. 1893), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 18 (1892/93), No. 1—18. Jahrg. 19 (1893/94), No. 1. Berlin 1892. 93.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen u. den Thüringischen Staaten. Bd. 9, H. 4. Bd. 10, H. 5. — Abhandlungen der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt. N. F. H. 12. 14. 15. Berlin 1892. 93.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1891. Bd. 12. Berlin 1893.

Vorschläge zur gesetzlichen Bestimmung über elektrische Maasseinheiten, entworfen durch das Curatorium der physik.-technischen Reichsanstalt. Berlin 1893.

Lampe, E. Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur. Festrede i. d. Aula der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1893.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 94. Bonn 1893.

Siebenter Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig f. d. Vereinsjahre 1889/90 u. 1890/91. Braunschweig 1893.

Siebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1892. Nebst Ergänzungsheft zum 70. Jahresbericht. Breslau 1893.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 9 (1891), II. Hälfte (= Abth. 3). Jahrg. 10 (1892). Chemnitz 1893.

Vorläufige Mittheilung der Beobachtungs-Ergebnisse von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. 1892, Dec. 1893, Jan.—Sept.

Schreiber, Paul, Resultate aus den i. d. J. 1892/93 angestellten meteorologischen Beobachtungen von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. Wetterbericht vom Dec. 1892—Sept. 1893 (in: Wissenschaftl. Beilage d. Leipz. Zeitung 1892/93). — Das Klima des Königreichs Sachsen. H. 1. 2. Chemnitz 1892. 93. — Klimatologie des Königsreichs Sachsen. Mitth. 1. (Forschungen z. deutsch. Landes- und Volkskunde. Bd. 8, H. 1.) Stuttgart 1893.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *V. Böhmert.* Jahrg. 38 (1892), No. 3. 4 u. Suppl. Dresden 1893.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1892—93. Dresden 1893.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1892, Jan.—Dec. 1893, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1893. Für d. Wintersem. 1893/94. Bericht über die Kgl. Sächs. Technische Hochschule Dresden f. d. J. 1892/93.

Mittheilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftl. Vereines der Rheinpfalz. No. 5. 6. (Jahrg. 49. 50.) Dürkheim 1892.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 7. Düsseldorf 1893. — *Redlich, O. R., Hillebrecht, Fr.* u. *Wesener,* Der Hofgarten zu Düsseldorf u. der Schlosspark zu Benrath. Düsseldorf 1893.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1891/92. Frankfurt 1893.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausgeg. von *Ernst Huth.* Jahrg. 10, No. 5—12. Jahrg. 11, No. 1—5. Berlin 1892. 93.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien u. Vereine aller Länder erscheinenden Einzelnarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausgeg. von *Ernst Huth* u. *M. Küttke.* Jahrg. 6 (1892), No. 9—12. Jahrg. 7 (1893), No. 1—7. Berlin d. J.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1893. Freiberg d. J.

Neunundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft f. Natur- und Heilkunde. Giessen 1893.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1893, Winter 1893/94; Personalbestand S. 1893, W. 1893/94. — Vorschriften über das akademische Bürgerrecht und die Handhabung der akademischen Disciplin, Honorarienordnung und Vorschriften über die Verwaltung u. Benutzung der Bibliothek an der Landesunivers. Giessen. Giessen 1893. — *Kattenbusch, Ferd.*, Beiträge zur Geschichte des altkirchlichen Taufsymbols (Progr.). Giessen 1892. — 30 Dissertationen a. d. J. 1891—1893.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von *R. Jecht*. Bd. 68, H. 2. Bd. 69, H. 1. 2. Görlitz 1892. 93.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 38, vom Jahre 1892. Göttingen d. J.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1892, No. 1—16. 1893, No. 1—14. Göttingen d. J.

Wilhelm Weber's Werke. Herausgeg. von d. Kgl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. 3. 5. Berlin 1893.

Pertsch, W., Die orientalischen Handschriften der herzogl. Bibliothek zu Gotha. Anhang. Gotha 1893.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1892/93. Grimma 1893.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 28, No. 21—24, H. 29, No. 1—14. 17. 18. Halle 1892. 93.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 5. Folge. Bd. 2 (d. ganzen Reihe 65. Bd.), H. 6. Bd. 3 (d. ganzen Reihe 66. Bd.), H. 1—4. Halle 1892. 93.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 3, Heft 1. 2. Heidelberg 1893.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 5, H. 1. Heidelberg 1893.

Programm der Technischen Hochschule in Karlsruhe f. d. J. 1893/94. — Lektionsplan der Technischen Hochschule f. d. Wintersem. 1893/94. — *Keller, Karl*, Der Charakter der technischen Umwälzungen des neunzehnten Jahrhunderts (Festrede). Karlsruhe 1892. — 6 Dissertationen a. d. J. 1892/93.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1892/93. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1892/93, Sommer 1893. — *Schöne, Alfr.*, Das historische Nationaldrama der Römer, die Tabula praetexta (Rede). Kiel 1893. — *Pochhammer, Leo*, Beitrag zur Frage des Universitätsstudiums der Frauen. Kiel 1893. — *Bruns, Ivo*, Interpretationes variae (Progr.). Kiel 1893. — 89 Dissertationen a. d. J. 1892/93.

Sechster Bericht der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel für die Jahre 1887—1891. (Jahrg. 17—21), H. 3. Berlin 1893.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1892, H. 1—12. Berlin 1893.

Publicationen der Kgl. Sternwarte in Kiel, hsg. v. *A. Krüger*. VIII. (*Krüger, Fried.*, Catalog der farbigen Sterne zwischen dem Nordpol u. 23. Grad südl. Declination.) Kiel 1893.

Schriften des Naturwissenschaftl. Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 10, H. 1. Kiel 1893.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 33 (1892). Königsberg d. J. — *Jentzsch, Alfr.*, Führer durch die geologischen Sammlungen des Provinzialmuseums der phys.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg 1892.

Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. Jahrg. 27, H. 4. Jahrg. 28, H. 1—3. Leipzig 1892. 93. — *Wislicenus, Walter F.*, Tafeln zur Bestimmung der jährl. Auf- u. Untergänge der Gestirne. Publication der Astronom. Gesellschaft. 20. Leipzig 1892.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 13—18 (1886—92). Leipzig 1888—92.

Jahresbericht und Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1892. Magdeburg 1893.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1892—Juli 1893. Meissen 1893.

Abhandlungen der histor. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 20 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 65. Bd.), Abth. 1—3. München 1892. 93.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 66. Bd.). Abth. 1. München 1893.

Abhandlungen d. philos.-philolog. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 19 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 64. Bd.), Abth. 3. München 1892.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1892, H. 3. 1893, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1892, H. 4. 1893. Bd. I, H. 1—3. Bd. II, H. 1. 2. München d. J.

Wecklin, N., Ueber die Stoffe und die Wirkung der griechischen Tragödie. Festrede gehalten i. d. öffentl. Sitzung der kgl. bayer. Akad. d. Wiss. am 14. Nov. 1891. — *Hertz, Wilh.*, Gedächtnisrede auf Konrad Hoffmann gehalten i. d. ö. S. a. 28. März 1892. — *Seeliger, Hugo*, Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Rede geh. i. d. ö. S. a. 28. März 1893. — *Reber, F. v.*, Kurfürst Maximilian I. von Bayern als Gemäldesammler. Festrede geh. i. d. ö. S. a. 15. Nov. 1892. — *Göbel, K.*, Gedächtnisrede auf Karl von Nägeli geh. i. d. ö. S. a. 21. März 1893. — *Carriere, M.*, Erkennen, Erleben, Erschliessen. Festrede geh. i. d. ö. S. a. 21. März 1893. München 1891—93.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Bd. 8 (1892), H. 2. 3. Bd. 9 (1893), H. 1. 2. München 1893.

20. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1891. Münster 1892.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 10, H. 1. Nürnberg 1893.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1892. Nürnberg 1893.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1892. — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Jahrg. 1892. — Katalog der im Germanischen Museum vorhandenen Holzstücke vom 15.—18. Jahrhundert. Th. 1. Nürnberg 1892.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 8. Potsdam 1893.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Hsg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 1 (1892), H. 3. 4. Stuttgart 1892.

Mittheilungen des Vereins f. Kunst u. Alterthum in Ulm u. Oberschwaben. Heft 4. Ulm 1893.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar i. d. J. 1889—1892. Weimar 1893.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 46. Wiesbaden 1893.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1892, No. 7—10. Jahrg. 1893, No. 1—6. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 26, No. 6—8. Bd. 27, No. 1—4. Würzburg 1892. 93.

Oesterreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram). Svez. 7 1892. U Zagrebu d. J.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 6—19. Zagrabiae 1876—88.

Osvrt na 25-godišnje djelovanje Jugoslav. Akadem. znatosti i umjetnosti. 1893.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knjiga 111—115. U Zagrebu 1892. 93.

Rječnik hrvataskoga ili srpskoga jezika. Na zvijet izd. Jugoslav. Akadem. znat. i umjetn. Svez. 13. U Zagrebu 1892.

Stari Pisci hrvatski. Knjiga 20. Na zvijet izd. Jugoslav. Akad. znat. i umjetn. U Zagrehu 1893.

Viestnik Hrvataskoga arkeologičkoga Družtva. Godina 14, Br. 4. U Zagrebu 1892.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1893-re. Budapest.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 10, II. Hälfte. Bd. 11, I. Hälfte. Berlin, Budapest 1892. 93.

Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Kötet 15, sz. 2. 3. Budapest 1893.

Értekezések a nyelv- és széptudományok köréből, Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Kötet 15, sz. 11. 12. Köt. 16, sz. 1—3. Budapest 1892. 93.

Értekezések a természettudományok köréből. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 22, sz. 4—8. Köt. 23, sz. 1. 2. Budapest 1892. 93.

Archaeologiai Értesitö. A M. t. Akadémia arch. bizottságának és ar Orsz. Régészeti s emb. Társulatuak Köslönye. Köt. 12, sz. 3—5. Köt. 13, sz. 1. 2. Budapest 1892. 93.

Mathematikai és természettudomány Értesitö. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 10, Füz. 8. 9. Köt. 11, Füz. 1—5. Budapest 1892. 93.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Mag. tud. Akadémia. Köt. 25, sz. 1—3. Budapest 1892. 93.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Mag. tudom. Akadémia. Kötet 22, Füz. 5. 6. Köt. 23, Füz. 1. 2. Budapest 1891—93.

Monumenta Hungariae historica. T. 30. Scriptores. Nachtrag 3. Budapest 1892.

Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. T. 3. Budapest 1892.

Rapport sur l'activité de l'Académie hongroise des sciences en 1892. Budapest 1893.

Ungarische Revue. Mit Unterstützung d. Ungar. Akad. d. Wissensch. hsg. v. *Karl Heinrich*. Jahrg. 12 (1892), H. 6—10. Jahrg. 13 (1894), H. 1—5. Budapest d. J.

Török történetírók. Budapest 1893.

Bunyitay, Vincze, A gyulafehérvári székesegyház Későbbi részei stb. Budapest 1893.

Halász, Ignácz, Svéd-lapp nyelv. 3—5. Budapest 1888—93.

Munkácsi, Bernat, A votják nyelvszótára. Füz. 2. Budapest 1892.

— Vogul népköltési gyüjtemény. Köt. 13. Budapest 1893.

Thaly Kálmán, A gróf Bercsényi család. Köt. 3. Budapest 1892.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1893, Winter-Sem. 1893/94. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1893/94.

Beiträge z. Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hsg. v. d. Histor. Vereine f. Steiermark. Jahrg. 25. Graz 1893.

Mittheilungen des Historischen Vereines f. Steiermark. Heft 41. Graz 1893.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1892, No. 10. Jahrg 1893, No. 1—10. Krakau d. J.

Acta rectoralia almae universitatis studii Cracoviensis ed. Wlad. Wisłocki. Tom. 1, fasc. 1. Cracovie 1893.

Biblijoteca pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej w Krakowie). T. 23. 24. Krakowie 1892. 93.

Rocznik Akademii umiejetności w Krakowie. Rok 1890. 1891/92. W Krakowie 1891. 92.

Rozprawy Akademii umiejetności. Wydziału filologicznego. T. 17. 18. (Ser. II. T. 2. 3.) W Krakowie 1893. — Wydz. histor.-filoz. T. 28. 29. (Ser. II. T. 3. 4.) ib. 1892. — Wydz. matemat.-przyrodn. T. 24. 25. (Ser. II. T. 4. 5.) ib. 1893.

Słownik jçzyka pomorskiego czyli Kaszubskiego (Wydanictwo Akad. umiej. w Krakowie). Krakowie 1893.

Zbiór wiadomości do antropologii krajowej, wydaw. stariniem komisyi antropolog. Akademii umiej. T. 15. Kraków 1892.

Matlakowski, Władysl., Budownictwo Ludowe na Podhalu. Krakowie 1892.

Teichmann, Ludw., Naczynia limfa tyczne w Słoniowacine (Wydanictwo Akad. umiej. w Krakowie). Kraków 1892.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 1—3. 1891—1893. Praze d. J.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I (pro vědy filos., právn. a histor.). Ročn. 1, Čisl. 1—4. — Tříd. II (Mathemat.-přírodn.). Ročn. 1, Čisl. 1—44. — Tříd. III (Philolog.). Ročn 1, Čisl. 1—5. Praze 1891—92.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Čisl. 1—12. Praze 1891. 92.

Mourek, V. E., Kronika Damilova. Podle Rukopisu Cambridgeského Ktisku. Praze 1892.

Perner, Jarosl., Foraminifery českého cenomann. Praze 1892.

Počta, Filip., O mechovkách z korycanskych vrstev. Praze 1892.

Rieger, Bohusl., Zřizení kraské v Čechách. Čast. 2, seš. 1. Praze 1892.

Solin, Jos., Theorie plavstěnných nosníku oblonkových o dovu opèrách. Praze 1892.

Strouhal, V., O životě a působeni Dr. A. Seydlera. Praza 1892.

Tadry, Ferd., Soudní akta konsistoře Pražka. Čast. 1 (1373—1379). Praze 1892.

Tomek, V. V., Mappa staré Prahy k. létům 1200, 1348 a 1419. Praze 1892.

Vondrák, Václav., Glagolita clozův. Praze 1893.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften für das Jahr 1892. Prag 1893.

Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiae et Moraviae. P. IV (1333—1346). Opera *J. Emler*. Vol. 6. Pragae 1892.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1892. — Philos.-histor. philolog. Classe. Jahrg. 1892. Prag 1893.

Jireček, Hermenegild., Antiquae Boemiae usque ad exitum saeculi XII. Topographia historica. Auxil. Reg. Societ. scientiar. Bohem. Vindobonae, Pragae 1893.

Symbolae Pragenses. Festgabe der Deutschen Gesellschaft für Alterthumskunde in Prag zur 42. Versammlung deutscher Philologen u. Schulmänner in Wien 1893. Gedruckt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Wien, Prag, Leipzig 1893.

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiet der Wissenschaft, Kunst u. Literatur i. J. 1891. Prag 1893.

Gradl, Heinr., Geschichte des Egerlandes (bis 1437). Mit Unterstützung der Gesellschaft z. Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. Prag 1893.

Bericht über die Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag im Jahr 1892. Prag 1893.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1892. Jahrg. 52. Prag 1893.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1893/94. — Ordnung d. Vorlesungen im Sommersem. 1893. Wintersem. 1893/94.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrgang 31, No. 1—4. Prag 1892. 93.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 15 (1892), No. 10—12. Anno 16 (1893), No. 1—10. Spalato d. J.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften. Jahrg. 42 (1892). Wien d. J.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1892, No. 24—27. Jahrg. 1893, No. 1—21. — Philosoph.-histor. Classe. Jahrg. 1892, No. 24—27. Jahrg. 1893, No. 1—21. Wien d. J.

Archiv f. österreichische Geschichte. Hsg. v. der z. Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 78, H. 1. Wien 1892.

Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe, Bd. 59. — Philos.-hist. Classe, Bd. 41. Wien 1892.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen. Hrsg. v. d. histor. Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et Acta. Bd. 46, 47. I. Hälfte. Wien 1892.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Classe. Bd. 100 (1891), Abth. I, Heft 8—10. Abth. IIa, Heft 8—10. Abth. IIb, Heft 8—10. Abth. III, Heft 8—10. Bd. 101 (1892), Abth. I, Heft 1—10. Abth. IIa, Heft 1—10. Abth. IIb, Heft 1—10. Abth. III, Heft 1—10. — Philos.-histor. Classe. Bd. 126. 127 (1892). Bd. 128 (1893). Wien d. J.

Monumenta conciliorum generalium seculi XV. Concilium Basileense. Scriptorum T. 3. P. 1. Vindobonae 1892.

Tabulae codicum manuscriptorum in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum. Vol. 8. (Cod. 14001—15500). Vindobonae 1893.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1892. Bd. 35 (N. F. Bd. 25). Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1893 (Bd. 43), Quart. I. u. II. Wien d. J.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten der k. k. Gradmessungs-Commission. Bd. 4. Längenbestimmungen. Wien 1892.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Commission. Protokolle üb. die am 6. April 1893 abgehalt. Sitzung. Wien 1893.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 7, No. 4. Bd. 8, No. 1. 2. Wien 1892. 93.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 15, H. 4. 5. Bd. 17. H. 3. Wien 1893.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1892 (Bd. 42), H. 2—4. 1893 (Bd. 43), H. 1. 2. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1892, No. 11—18. Jahrg. 1893, No. 1—10. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 4. Wien 1892.

Belgien.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique. (IV. Sér. des Annales), II. Partie, No. 8—12. Anvers 1892. 93.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1892 (Année 58). 1893 (Année 59). Bruxelles d. J.

Bulletins de l'Académie R. des sciences des lettres, et des beaux-arts de Belgique. Année 61 (1891). III. Sér. T. 22. Année 62 (1892). III. Sér. T. 23. 24. Bruxelles d. J.

Mémoires de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 48. 49. 50, P. 1. Bruxelles 1891—93.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 46. Bruxelles 1892.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 52. Bruxelles 1890—93.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 34. 35. Bruxelles 1890. 91.

Mémoires de la Société entomologique de Belgique. 1. Bruxelles 1892.

Annales de la Société R. malacologique de Belgique. T. 15 (II. Sér. T. 5), Fasc. 2. T. 25 (IV. Sér., T. 5) T. 26 (IV. Sér., T. 6). Bruxelles 1880. 90. 91.

Procès-verbaux des séances de la Société R. malacologique de Belgique. T. 19, p. 89—116. T. 20. 21, p. 1—66. Bruxelles 1890. 91.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 8, Fasc. 2. T. 9, Fasc. 1. 2. Louvain 1892. 93.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1892, No. 2. 1893, No. 1. 2. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 5. Række. Bd. 5, No. 4. 6. Række. Bd. 1, No. 2. Bd. 4, No. 1. — Naturv. og math. Afd. 6. Række. Bd. 6, No. 3. Bd. 7, No. 6—9. Kjøbenhavn 1892. 93.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 8, P. 1. Cambridge 1893.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 2, No. 3—5. Vol. 3, No. 1. Dublin 1892. 93.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 30, P. 1—10. Dublin 1892. 93.

Transactions of the Edinburgh Geological Society. Vol. 6; P. 5. — Roll of the Edinburgh Geological Society and List of correspond. Societies and Institutions. Edinburgh 1893.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 19, p. 81—295. Vol. 20, p. 1—96. Edinburgh 1891/92. 1892/93.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 11, P. [2] (Session 1890/91). Edinburgh 1893.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 7 (Session 1892/93). Liverpool 1893.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 13, P. 3 (No. 86). London 1893. — R. Institution (List of the members) July 1892.

Catalogue of oriental coins in the British Museum. Vol. 10. London 1890.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 52, No. 317—320. Vol. 53, No. 321—327. London 1893.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1892. Vol. 183, A. B. London 1893. — The R. Society (List of the members) 30. Nov. 1892.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 24, No. 450—468. London 1892. 93.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1893, P. 1—6. London d. J.

The Manchester Museum, Owens College. Museum Handbooks: Outline Classification of the animal kingdom. 2. edit. Manchester 1892. — Outline Classification of the vegetable kingdom. ib. 1892. — *Bolton, Herm.*, Catalogue of the types and figured specimens in the geological department. ib. 1893.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 6. 7, No. 1—3. Manchester 1892. 93.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. IV. Sér. T. 1. 2 et Append. T. 3, cah. 1. Paris 1891—93.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 28, (III. Sér. T. 8). Paris 1892.

Travaux et Mémoires des facultés de Lille. T. 2, Mém. 7—9. Lille 1892.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. Vol. 27. 28. — Classe des sciences. Vol. 30. 31. Paris, Lyon 1889—92. — Classe des sciences et lettres. III. Sér. T. 1. ib. 1893. — *Saint-Lager*, Considérations sur le polymorphisme de quelques espèces du genre Bupleurum. Paris 1891. La guerre des nymphes suivie de la nouvelle incarnation de Buda. ib. 1891. Note sur le Carex tenax. ib. 1892. Un chapitre de grammaire a l'usage des botanistes. ib. 1892. Aire géographique de l'Arabis arenosa et de Cirsium oleraceum. ib. 1892. *Péteaux* et *Saint-Lager*, Description d'une nouvelle espèce d'Orobranche. ib. s. a.

Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. VI. Sér. T. 2—5 (1889—1892). Lyon, Paris 1890—93.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 1, suite et fin. T. 2, Fasc. 1. 6. Marseille 1891. (93.)

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la Section des lettres. T. 9, Fasc. 3. 4. — Mémoires de la Section de médecine. T. 6, Fasc. 2. 3. — Mémoires de la Section des sciences. T. 11, Fasc. 3. Montpellier o. J.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Soc. des sciences naturelles de Strasbourg). T. 12, Fasc. 26. 27 (Année 25. 1892). Paris 1892. 93.

Comité international des poids et mesures. Procès verbaux des séances de 1891. 1892. — Quinzième Rapport aux gouvernements signataires de la convention du mètre sur l'exercice de 1891. Paris 1892. 93.

Conseil municipal de Paris. Année 1886. Procès-verbaux. Semest. I. Paris 1886.

L'Intermédiaire des Mathématiciens. Dirig. p. *C. A. Laisant* et *Em. Lemoine*. T. 1, No. 1. Paris 1894.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 61. 62. Paris 1891. 92.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, publ. p. la Commission permanent du Répertoire. Paris 1893.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 20, No. 2. 6—8. T. 21, No. 1—7. Paris 1892. 93.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 17 (1893), 5—7. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Athenische Abtheilung. Bd. 17, H. 4. Bd. 18, H. 1—3. — Register zu Bd. 11—15 Athen 1892. 93.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigt te Amsterdam, voor 1891. 1892. Amsterdam d. J.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 1, No. 1. 2. — Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 1, No. 1—8. Sect. II. Deel 1, No. 1—10. Deel 2. Amsterdam 1892. 93.

Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkund. Afdeel. d. Kon. Akad. v. Wetensch. van 25. Jun. 1892 tot 28. Apr. 1893. Amsterdam 1893.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 9. — Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 9. — Register, Deel 1—9. Amsterdam 1892. 93.

Giovanni, Ant., Inventa et mores. Carmen in certamine Hoefftiano praemio aureo ornatum. Accedunt 3 poemata laudata. Amstelodami 1893.

Revue semestrelle des publications mathématiques. Réd. par P. *H. Schoute*. T. 1, P. 1. Amsterdam 1893.

Verhandelingen rakende der natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N.S. Deel 13. Haarlem 1893.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 26, Livr. 4. 5. T. 27, Livr. 1—3. Harlem 1893.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes, publ. p. la Société Hollandaise des sciences. T. 5. La Haye 1893.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 4, P. 1. Harlem 1893.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden over het jaar 1892/93. Leiden 1893.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1893. Leiden d. J.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. van wege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 12 (N. R. 4), Afl. 1—4. Leiden 1893.

Prodromus Florae Batavae. Vol. 2, P. 1. Edit. altera. Uitgeg. door de Nederlandsche Botan. Vereeniging. [Leiden]. Nijmegen 1893.

Programme de la Société Batave de philosophie expérimentale de Rotterdam. 1892.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 28. Juni 1892. Utrecht d. J.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1893.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 28. Juni 1892. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 14. 's Gravenhage 1892.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. No. 59. Utrecht 1893.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks, II, 2. Utrecht 1893.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 169—194. Firenze 1892. 93.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. V. T. 1. 2. Bologna 1890. 91.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia: *Tocco, Felice,* Le opere latine di Giordano Bruno esposte e confrontate con le italiane. Firenze 1889. — Sezione de medicina e chirurgia e scuola di farmacia: *Fasola, Emilio.* Il triennio 1883—1885 nella Clinica ostetrica e ginecologica di Firenze. Rendiconto clinico. P. 1. ib. 1888. *Roster, Giorg.,* L'acido carbonico dell' aria e del suolo di Firenze. ib. 1889. — Sezione di scienze fisiche e naturali: *Luciani, Luigi,* Fisiologia del digiuno. Studi sull' uomo. ib. 1889. *Stefano, Carlo de,* Le pieghe delle Alpi Apuane. ib. 1889.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 8. Modena 1892.

Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Soc. Reale di Napoli). Ser. II. Vol. 7 (Anno 32), Fasc. 4—7. Napoli 1893.

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche di Napoli. Vol. 24. 25. Napoli 1891. 92.

Società Reale di Napoli. Rendiconti delle tornate e dei lavori dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 28—30 (1889—91). 31 (1892). Genn.-Giugn. Napoli d. J.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. Ser. Vol. 8. Padova 1893.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 6, Fasc. 6. T. 7, Fasc. 1—5. Palermo 1892. 93.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 1, Fasc. 3. Vol. 4, Fasc. 3. 4. Vol. 5, Fasc. 1—3. Perugia 1889. 92. 93.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 12. Pisa 1893.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 8, adunanza del 3. Dicembre 1892, 5. Febbrero, 5. Marzo, 7. Maggio 1892.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. IV, Vol. 10, P. II (Notizie degli scavi), 1892, Novembre-Dicembre. Ser. V. Vol. 1, P. II. (Notizie degli scavi) 1893, Gennajo-Luglio. — Rendiconti. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 1 (1892), II. Sem., Fasc. 11. Vol. 2 (1893), I. Sem., Fasc. 1—3. 5—12. II. Sem., Fasc. 1—11. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 1 (1892), Fasc. 10—12. Vol. 2 (1893), Fasc. 1—10. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 4. Giugno 1893. Roma d. J.

Regesti Clementis Papae V. ex Vaticanis archetypis. Appendices. T. 1. Roma 1892.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico-Germanico. Sezione Romana). Bd. 7, H. 3. 4. Bd. 8, H. 1—3. Rom 1893.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia. Anno 2 (1892), Fasc. 3. Roma d. J.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 5, Fasc. 1—6. Siena 1893.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 27, Disp. 5. 6. Vol. 28, Disp. 1—15. Torino 1891—93.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II, T. 42. Torino 1892.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1892 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1893.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 28. maggio 1893. Venezia d. J.

Luxemburg.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 22. Luxembourg 1892.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucuresci-România. Anul 1, No. 11. 12. Anul 2, No. 1—8. Bucarescî 1892. 93.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1892, redig. u. bearb. v. *A. v. Oettingen*. Jahrg. 27, Bd. 6, H. 2. Jurjew 1893.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 51. Helsingfors 1892.

Observations publiées par l'Institut météorologique central de la Société des sciences de Finlande. Livr. 1. Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1884—1886. 1890. 1891. Vol. 3—5. 9. 10. Helsingfors 1891. 92.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 34 (1891—92). Helsingfors 1892.

Fennia. Bulletins de la Société de géographie finlandaise. 6—8. Helsingfors 1892. 93.

Finlands Geologiska Undersökning. Kartbladet 22—24, u. Beskrifning till Kartbl. 22—24. Helsingfors 1892.

Mémoires de la Société finno-ougrienne. IV. (*Donner, O.*, Wörterverzeichnis zu den Inscriptions de Jénisseï.) Helsingissä 1892.

Bulletin de la Société phys.-mathématique de Kasan. Tom. 2, No. 3. Kasan 1893.

Universität Kasan. *Neboljubov, V.*, Sadušenie rootmyi massami. — *Vnukov N. N.*, Materialy k učeniju o bacillach prokazy. Kasan 1893.

Universitetskija Izvěstija. God 32 (1892), No. 11. 12. God 33 (1893), No. 1—10. Kiev d. J.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1892, No. 3. 4. Année 1893, No. 1. Moscou 1893.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg T. 35 (Nouv. Série. T. 3), No. 1—3. St.-Pétersbourg 1892. 93.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 38, No. 14. T. 40, No. 1. 2. T. 41, No. 1. St.-Pétersbourg 1892. 93.

Repertorium f. Meteorologie, hsg. v. d. Kais. Akad. d. Wiss., red. v. *H. Wild*. Bd. 15. St. Petersbourg 1892.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von *H. Wild*. Jahrg. 1891, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1892.

Compte rendu de la Commission Impér. archéologique pour les années 1882—1888 (Texte et Atlas). St. Pétersbourg 1893.

Materialy po Archeologii Rossii. No. 4—12. Peterburg 1890—93.

Otčet imperatorskoj archeol. Kommissii za 1889. 1890. Peterburg 1892. 93.

Acta Horti Petropolitani. T. 12, Fasc. 2. Petropoli 1893.

Archives des sciences biologiques publ. par l'Institut Impér. de médeoine expérimentale à St. Pétersbourg. T. 1, No. 4. St. Pétersbourg 1892.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoispytatelej. — Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 22. Sect. de botanique. Sect. de géologie, Fasc. 2. T. 23. Sect. de zoologie et de physiologie, Livr. [1]. 2. St. Pétersbourg 1892. 93.

Trudy četvertago sězda russkich estestvoispytatelej. Otdělenie chimii, mineralogii, geologii i paleontologii. Otdělenie medicinskomu sekcii naučnoj mediciny. s. l. e. a.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na osennee i vesennee polugodie 1893/94. St. Peterburg 1893.

Otčet o sostojanij Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta za 1892 god. S.-Peterburg 1893.

Protokoly zasědanij sověta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. No. 45—47, i priloženie: Inventar biblioteki univ. No. 7, za 1885—90. Catalogus accessionum. St. Peterburg 1892. 93.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgsk. Universiteta. Čast 31. 32. St. Peterburg 1893.

Georgievskij, Serg., Mifičeskija vozzrěnija i mify kitajcev. St. Peterb. 1892.

Ivanovskij, A. O., O kitajskom perevodě buddijskago sbornika jātakamālā. St. Peterburg 1893.

—— Mědnaja moneta Man'čžurii. S.-A.

Selšnikow, M. J., Osnovy i predděly samouprovlenija. St. Peterburg 1892.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 36. Riga 1893.

Beobachtungen des Tiffliser Physikalischen Observatorium i. J. 1891. Hrsg. v. *J. Mielberg*. Tiflis 1893.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessionskatalog. 1—7 (1886—1892). Stockholm 1887—93.

Bergens Museums Aarborg for 1892. Afhandlinger och Aarsberetning. Bergen 1893.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1891, No. 1—11. Aar 1892, No. 1—18. Christiania 1891—93.

Oversigt over Videnskabs-Selskabets Møder i 1892. Christiania 1893.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 28 I. II. Lund 1891/92.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 14—18. Stockholm 1889—93.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 22—24 (1886—1891). Stockholm d. J.

Exploration internationale des régions polaires 1882—1883: Observations faites au Cap Thordsen, Spitzberg, par l'Expédition suédoise, publ. par l'Académ. Roy. de scienc. de Suède. T. 1. 2. Stockholm 1887. 91.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 27—30 (II. Ser. Bd. 13—16). Jahrg. 1885—1888. Stockholm d. J.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 3, H. 1. Stockholm 1891. — Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Maj 1890. 91. 92. 93.

Öfversigt at Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar Årgången 46—49 (1889—1892). Stockholm 1890—93.

Rosén, P. G., Projet de mesure d'un arc du méridien de 4° 20′ au Spitzberg. Stockholm 1893.

Scheele, Carl Wilh., Efterlemnade bref och anteckningar. Utg. af *A. E. Nordenskiöld.* Stockholm 1892.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 20 (1891). Stockholm 1891—93.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. af Kongl. Vitterhets Hist. och Antiquitets Akademien genom *B. E. Hildebrand.* Delen 11, H. 3. Stockholm o. J.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Bd. 4. Stockholm 1889—91.

Tromsø Museums Aarshefter. 15. Tromsø 1893.

Nova Acta Reg. Societatis scient. Upsaliensis. Ser. III. Vol. 15, Fasc. 1. Upsaliae 1892.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 1, No. 1. Upsala 1893.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 24 (1892). Upsal 1892. 93. — Appendices: *Wigert, Thure*, Recherches sur le climat d'Upsal. I. Pluies. *Hildebrandsson, Hildebrand* et *Hagström, K. L.*, Des principales méthodes employées pour observer et mesurer les nuages. Upsal 1893.

Skrifter utgiv. af Humanistika Vetenskapssamfundet. Bd. 1. — *Bygdén, L.*, Förteckning å tryckta och otryckta källor till landskapet uplands och Stockholms stads historiskt-topografiska beskrifning. — *Gödel, Vilh.*, Katalog öfver Upsala Universitets Biblioteks fornisländska och fornnorska handskrifter. Upsala 1892.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellsch. f. d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 33, Abth. 1. Basel 1893.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Basel 5.—7. September 1892. 75. Jahresversammlung. Jahresbericht 1891/92. Basel 1892.

Compte-rendu des travaux présentés à la 75. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Bâle les 5.—7. Sept. 1892. Genève 1892.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hsg. v. d. Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 3 (d. ganzen Reihe Bd. 13), H. 4. Basel 1893.

17. Jahresbericht der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft zu Basel über d. Vereinsjahr 1891/92. Basel 1892.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 10, H. 1. Basel 1892.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern a. d. J. 1892 (No. 1279—1304). Bern 1893.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 36 (1891/92. 1892/93). Chur 1893.

Index lectionum quae in univers. Friburgensi per menses hiem. anni 1891/92, 1892/93 habebuntur. Friburgi Helvet. 1891. 92.

Collectanea Friburgensia. Fascic. 2. Friburgi Helv. 1893.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 31, P. 2. Genève 1892. 93.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 37, H. 3. 4. Jahrg. 38, H. 1. 2. Zürich 1892. 93.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 36—40. — Spomenik. No. 19—22. U Beograd 1892. 93.

Novaković, Stojan., Prvi osnovi slovenske književnosti mégu balkanskim Slovenima legenda o Vladimiru i Kosari. U Beogradu 1893.

Žugović, M. Jovan, Geologija Srbije. I. Topografika Geologija. Beograd 1893.

Spanien.

Memorias de la Real Academia de ciencias morales y políticas. T. 7. Madrid 1893.

Barzanallana, José G., Necrologia de Manuel García Barzanallana. Madrid 1893. — *Corbella, Artur.*, Historia jurídica de las diferentes especies de censos. ib. 1892. — *Sánchez de Ocaña, Ramon*, Estudio crítico de las diversas especies de censos. ib. 1892. — *Vera y Casado, Bartolom. de*, La administracion local. ib. 1893.

Türkei.

Revue médico-pharmaceutique. Publ. p. *P. Apéry.* Année 6 (1893), No. 1. 2. Constantinople d. J.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for 1891. Washington 1892.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 23 (1892). Boston d. J.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 3. 4. Rochester 1892. 93.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 16, No. 3. New Haven 1893.

Proceedings of the American Oriental Society, at Boston and Cambridge, Apr. 1893. New Haven d. J.

El Instructor. Periódico científico y literario. Año 9 (1892), No. 8—11. Año 10 (1893), No. 1—5. Aguascalientes d. J.

Johns Hopkins University Circulars. No. 4. 8. 10. 14. 25. 35. 48. Vol. 12, No. 102—107. Baltimore 1886—93.

Annual Report of the Johns Hopkins University. 6 (1884). 9 (1884) —15 (1890). Baltimore d. J.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 6, No. 1. Vol. 14, No. 2. 3. Baltimore 1883 92.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. V, 5. 6. Ser. X, 1—11. Extra-Vol. 2—4. Baltimore 1887—93.

The Constitution of the empire of Japan with the speeches addressed to students of political science in the Johns Hopkins University. Baltimore 1889. — Essays in the constitutional history of the United States in the formative period 1775—1789. By Members of the Johns Hopkins University, edit. by *J. Franklin Jameson*. Boston, Newyork 1889. — Studies in Logic. By Members of the Johns Hopkins University. Boston 1883. — *Cruls, L.*, O clima do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro 1892. — *Gildersleve, Basil L.*, Essays and Studies educational and literary. Baltimore 1890 — *Harris, J. Rendel*, The teaching of the apostles (Διδαχη των αποστολων). New. edit., with facsimile text and a commentary, for the Johns Hopkins University. Baltimore, London 1887. New Testament Autographs. Baltimore s. a.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. Vol. 12, No. 1. Cambridge 1893.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 19. (Whole Ser. Vol. 27.) From May 1891 to May 1892. Selected from the Records. Boston 1893.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 4, No. 10. Boston 1892.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 25, P. 3. 4. Boston 1892.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 16, No. 11—14. Vol. 23, No. 4—6. Vol. 24, No. 1—5. 7. Vol. 25, No. 1. Cambridge, Mass. 1892. 93.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 14, No. 3. Cambridge, Mass. 1893.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1891/92. Cambridge, Mass. 1892.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 1, No. 2. Cincinnati 1891. Vol. 2, No. 1 5. Vol. 3, No. 1—3. Granville 1892. 93.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural science of Halifax. Ser. II. Vol. 1, P. 2. Halifax 1892.

Proceedings of the Haverford College Observatory 1892.

Reports of the director of the Michigan Mining School for 1890—92. Lansing, Mich. 1893.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. No. 25—27 (Vol. 5, Art. 4. 5. Vol. 6, Art. 1). — Sixth annual Report of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. 1891. Lincoln, Nebr. 1892. 93.

Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Vol. 8 (1888—1891). Madison 1892.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 6, P. 3. 4. Madison.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 6, Cuad. 3—12. T. 7, Cuad. 1. 2. México 1892. 93.

The geological and natural history Survey of Minnesota. Bulletin No. 7, 8, I. II. — The 20. annual Report, f. the year 1891. Minneapolis 1892. 93.

Contributions from the Lick Observatory [Mount Hamilton]. No. 3. Sacramento 1893.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 8, P. 2. Vol. 9, P. 1. New Haven 1892. 93.

Report for the year 1892/93, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven o. J.)

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. 1, Fasc. 3. 4. New Haven 1893.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. 8, No. 1—3. New York 1893.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. 12. New York 1892. 93.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 24, No. 4. Vol. 25, No. 1—3. New York 1892. 93.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1892. Vol. 10. Ottawa 1893.

Geological Survey of Canada: *Ferrier, Walter F.*, Catalogue of a stratigraphical collection of Canadian rocks. — *Hoffmann, Csin.*, Catalogue of section one of the Museum of the Geological Survey. Ottawa 1893.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1892, P. 2. 3. 1893, P. 1. Philadelphia 1892. 93.

Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. 3, P. 2. Philadelphia 1892.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. 30, No. 139. Vol. 40, No. 140. 141. Philadelphia 1892. 93.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. N. S. Vol. 17, P. 3. V. 18, P. 1. Philadelphia 1892. 93.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Resumen correspondiente á cada día. Año 1892, Jul.-Dic. 1893, Enero-Marzo.

Minerva. Rivista científica de la Sociedad de ingenieros de Puebla. Año 1, No. 5. 6. Puebla 1893.

Proceedings of the Rochester Academy of science. Vol. 2, Broch. 1. 2. Rochester, N. Y. 1892. 93.

Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 6, No. 2—8. St. Louis 1892. 93.

Bulletin of the Essex Institute. Vol. 1—8. 10—24. 25, No. 1—8. Salem 1869—1893. — Charter and By-laws of the Essex Institute with a List of its officers and members. ib. 1889. — A rough subject Index to the publications of the Essex Institute. S.-A. — Report of the annual Meetings [from Bulletin of Essex Institute] 1890—1892. — The fifth half century of the arrival of John Winthrop at Salem, Mass. Commemorative Exercices be the Essex Institute, 20. Jun. 1880. — The Morse Collection of Japanese Pottery. S.-A. Salem 1887. — *Lord, Otis P.* Asahel Huntington. Memorial Address delivered before the Essex Institute, Septb. 5 1871. ib. 1872. — *Osgood, S.* and *Batchelder, H. M.*, Historical sketch of Salem. 1628—1879. ib. 1879. — *Willson, B.*, Sermon preached at the North Church, Salem, March 5 1893.

Occasional Papers of the California Academy of sciences. 3. 4. San Francisco 1893.

Proceedings of the California Academy of sciences. II. Ser. Vol. 3, P. 2. San Francisco 1893.

Bulletin of the Geographical Society of California. Vol. 1, P. 1. San Francisco 1893.

Zoe. A Biological Journal. Vol. 1, Nr. 1—12. Vol. 2, No. 1—4. San Francisco 1890—92.

Transactions of the 24. and 25. annual meetings of the Kansas Academy of science (1891—92) with the reports of the Secretary. Vol. 13. Topeka, Kansas 1893.

Fifth annual Report of the Canadian Institute, Session 1892/93. Toronto 1893.

Transactions of the Canadian Institute. No. 5. 6. (Vol. 3, P. 1. 2.) Toronto 1892.

Seventh and Eighth annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1885/86. 1886/87. Washington 1891.

Pilling, Jam. Const., Bibliography of the Athapascan languages. Washington 1892.

—— Bibliography of the Chinookan languages. Washington 1893.

U. S. Department of Agriculture. Division of Ornithology and Mammalogy. Bulletin No. 3. 4. — North American Fauna. No. 7. Washington 1893. — Report for 1891, ib. 1892.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 34. No. 830. Transactions of the Anthropological Society of Washington. Vol. 3. 1883—1885. Washington 1885. — No. 664. *Winlock, Will. C.*, Bibliography of Astronomy for the year 1887. ib. 1888. — No. 665. *Bolton, H. Carringt.*, Bibliography of Chemistry for the year 1887. ib. 1888. — No. 843. *Abbe, Cleveland*, The mechanics of the earth's atmosphere. ib. 1893. — Vol. 35: No. 844. Smithsonian Meteorologic Tables. ib. 1893. — Vol. 36: No. 850. 851. *Bolton, H. Carringt.*, A select Bibliography of Chemistry 1492—1892. ib. 1893.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. 29. No. 842. *Michelson, Albert A.*, On the application of interference methods to spectroscopic measurements. Washington 1892.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey of the Rocky Mountain Region. — Contributions to North America Ethnology. Vol. 7. Washington 1890.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, Report of the U. S. National Museum for 1890. Washington 1891.

Bulletin of the U. S. National Museum. No. 39, P. A—G. No. 42. Washington 1891. 92.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 14 (1891), Washington 1892.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending June 30, 1892. Washington d. J.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 26. 27. (Washington 1893).

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 82—86. 90—96. Washington 1891—92.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. 17. 18. 19 (with Atlas). Washington 1891—93.

Eleventh annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior, 1889—90, by *J. W. Powell*. P. 1. 2. Washington 1891.

U. S. Geological Survey (Department of the Interior). Mineral Resources of the United States. Calendar year 1891. Washington 1892.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 34, Entr. 2—6. T. 35, Entr. 1—5. Buenos Aires 1892. 93.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. [Córdoba]. T. 10, Entr. 4. Buenos Aires 1890.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para 1892. 1893. (Anno 8. 9). Rio de Janeiro 1892. 93.

Actes de la Société scientifique du Chili. Tom. 2, Livr. 3. Santiago 1892.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 2. H. 5. 6. Santiago 1893.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 30 (1892), Afl. 3. 4. Deel 31 (1893), Afl. 1. 2. Batavia d. J.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 35, Afl. 5. 6. Deel 36, Afl. 2—6. Batavia, 's Hage 1892. 93.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door *J. A. van der Chijs*. Deel 11. Uitgegeven door het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1893.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over gehael Nederlands-India anno 1664. Uitgeg. door het Bataav. Genootsch. van kunsten en wetensch. med medemaking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toeficht van *J. A. van der Chijs*. Batavia, s'Hage 1893.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 14 (1891). Batavia 1892.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 13 (1891). Batavia 1892.

India Museum Notes. Vol. 2, No. 6. Vol. 3, No. 1. 2. Calcutta 1893.

Imperial University of Japan (Teckoku Daigaku), The Calendar for the year 25—26 Meji (1892—93). Tōkyō 1893.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 5, P. 3. 4. Vol. 6, P. 1—3. Tōkyō 1893.

Mitteilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 2, No. 1. Tokio 1893.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. New Ser. Vol. 4, P. 2. Melbourne 1892.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. 3, P. 2. Melbourne 1892.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 26 (1892) Sydney d. J.

New South Wales. Australian Museum. Report of Trustees for the year 1892. Sydney 1893.

---

2. Einzelne Schriften.

Bergbohm, Jul., Entwurf einer neuen Integralrechnung. H. 2. Leipzig 1893.

Blake, Edw. Mort., The method of indeterminate coefficients and exponents applied to differential equations. New York 1892.

Bloomfield, Maur., Contribution to the interpretation of the Veda. 5. Ser. (S.-A.). Baltimore 1893.

Cayley, Arth., The collected mathematical papers. Vol. 6. Cambridge 1893.

Fritsch, Karl, Ein neues Universalstativ für astronomische Fernrohre. (S.-A.). Berlin 1893.

Fritsche, H., Ueber die Bestimmung der geographischen Länge und Breite und der drei Elemente des Erdmagnetismus. St. Petersburg 1893.

Ganser, Anton, Der reine Gottesbegriff und dessen Wichtigkeit. Graz 1892.

Gömöri Havas, Sándor, Budapest Régiségei. T. 4. Budapest 1892.

Göttert, Adv., Lösung des 210-jährigen Räthsels der Schwerkraft. Mit Atlas. Posen 1893.

Hale, George E., On the condition of the suns surface in June and July 1892. S.-A.

—— On the probability of chance coincidence of solar and terrestrial phenomena. S.-A.

—— Photography of the corona without an eclipse. S.-A.

—— The spectroheliograph. S.-A.

Keeler, James E., Visual observations of the spectrum of β-Lyrae. S.-A.

—— The spectroscope of the Alleghany Observatory. S.-A.

Macfarlane, Alex., The imaginary of Algebra. Salem, Mass. 1892.

—— The fundamental theorems of Analysis generalized for space. Boston (1892).

Muybridge, E., Descriptive Zeopraxography. Philadelphia 1893.

Pihl, O. A. L., On occulting micrometers and their value as applied to exact astronom. measurments. Christiania 1893.

(*Smitt, Cecil,*) Catalogue of casts and sculptures from Persepolis and the neigborhood, illustrating the Art of the old Persian Empire from 550—340 b. C. (London).

Very, Frank W., The hail strom of May 20, 1893. S.-A.

Vincenti, Gius., Il fono-telegrafo. Ivrea 1891.

—— La fonografia universale Michela (Torino 1893).

Vogel, E., The atomic weights are, under atmospheric pressure, not identical with the specific gravities. S.-A.

Vogel, H. C., Ueber den neuen Stern im Fuhrmann. S.-A. Berlin 1893.

Volger, G. H. Otto, gen. *Senckenberg*, Die Lichtstrahlen. S.-A. Emden 1892.

Wahnschaffe u. *Nehring*, Ueber das Klinger Torflager. S.-A. Berlin 1892.

Walther, Joh., Einleitung in die Geologie als historische Wissenschaft. I. Bionomie des Meeres. II. Die Lebensweise der Meeresthiere. Jena 1893.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
MAY 27 1893
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

I.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD COLLEGE
MAY 27 1893
LIBRARY.

SITZUNG VOM 9. JANUAR 1893.

W. Ostwald, *Die Dissociation des Wassers.*

Bei seinen Versuchen, die elektrolytische Leitfähigkeit des Wassers zu bestimmen, ist F. Kohlrausch zunächst [1]) zu der Erkenntniss gekommen, wie ausserordentlich schwierig die Aufgabe ist, elektrolytisch reines Wasser herzustellen; er gelangte zu einer specifischen Leitfähigkeit von 0.7×10^{-10}. Durch Destilliren im luftleeren Raume erhielt er später [2]) 0.25×10^{-10} bei 18°, welches der kleinste Werth ist, der jemals beobachtet worden ist. Ob diese Leitfähigkeit noch von Verunreinigungen herrührt, oder eine Eigenschaft des Wassers darstellt, lässt sich vorerst nicht entscheiden; im letzten Falle ist sie jedenfalls ein oberer Grenzwerth.

Nehmen wir an, dass die specifische Leitfähigkeit des Wassers wirklich jenen Werth von 0.25 bei 18°, oder 0.28 bei 25° besitzt, so lässt sich hieraus der Dissociationsgrad des Wassers nach bekannten Ueberlegungen bestimmen. Zwischen Elektroden von 1 cm Entfernung würde ein Liter solchen Wassers die Leitfähigkeit 0.00028 besitzen. Enthielte dieses Wasser je ein Gramm-Aequivalent Wasserstoff- und Hydroxyljonen, so müsste, da die Leitfähigkeit der Wasserstoff- und Hydroxyljonen unter solchen Umständen 325 und 170 Einheiten beträgt, die Concentration der Jonen des Wassers $\frac{0.00028}{495} = 0.6 \times 10^{-6} =$ normal sein, d. h. es ist ein Gramm Wasserstoffjonen in ungefähr zwei Millionen Liter Wasser enthalten. Dabei muss daran festgehalten

1) Pogg. Ann. Erg. VIII, 1. 1878.
2) Wied. Ann. XXIV, 48. 1875.

werden, dass diese Concentration ein *oberer* Werth ist; der wirkliche ist entweder kleiner (wie viel, ist nicht bekannt) oder gleich demselben.

Man kann nun ferner die Dissociation des Wassers aus den Erscheinungen der Hydrolyse berechnen, doch kann ich aus Mangel an geeigneten Beobachtungszahlen hierauf nicht eingehen[1]).

Endlich ergiebt sich aus der Theorie der Gasketten, wie sie auf Grundlage der Theorien des osmotischen Druckes und der elektrolytischen Dissociation sich nach Analogie der von W. NERNST[2]) gegebenen Theorie der VOLTA'schen Ketten ableiten lässt, ein unabhängiger Weg zur Bestimmung der Dissociation des Wassers. Zur Erläuterung schicke ich zunächst Einiges über Gasketten voraus.

Eine mit gasförmigem Wasserstoff von gegebenem Druck im Gleichgewicht befindliche Elektrode von Platin, Palladium oder einem ähnlichen, aus Säuren keinen Wasserstoff entwickelnden Metalle muss gegen einen gegebenen Elektrolyt (z. B. verdünnte Schwefelsäure) einen ganz bestimmten Potentialunterschied zeigen, welcher von der *Natur des Metalles unabhängig* ist. Denn wäre dies nicht der Fall, wäre z. B. das Potential des mit Wasserstoff beladenenen Platins ein anderes, als des Palladiums unter gleichen Umständen, so könnte man durch Verbindung beider Elektroden eine Kette erhalten, in welcher vermöge des vorhandenen Potentialunterschiedes einerseits Wasserstoff verbraucht, andererseits welcher abgeschieden wird. Man könnte dadurch dem Wasserstoffgas, welches anfangs beiderseits gleichen Druck hatte, verschiedenen Druck ertheilen, und mittelst dieses Druckunterschiedes eine Maschine betreiben, wobei der Druck wieder ausgeglichen, und somit der elektrische Strom wieder ermöglicht wird. Man hätte mit anderen Worten ein Perpetuum mobile zweiter Art, was nicht möglich ist.

Man kann den Beweis auch kürzer mit Hülfe des Satzes führen: *was auf eine Art im Gleichgewicht ist, muss auf alle Art im Gleichgewicht sein*, welcher Satz nichts Anderes, als ein kurzer und sehr anwendungsfähiger Ausdruck des zweiten Hauptsatzes der Energetik ist.

---

1) Diese Lücke wird demnächst von anderer Seite ausgefüllt werden.
2) Ztschr. f. ph. Ch. IV, 129. 1889.

Man kann somit die mit Wasserstoff beladene Platin- oder Palladiumelektrode (letztere ist aus technischen Gründen vorzuziehen) als eine Elektrode von metallischem Wasserstoff betrachten, deren elektromotorische Kraft im Uebrigen von der Temperatur und dem Druck des Wasserstoffgases abhängt, mit welchem die Elektrode im Gleichgewicht ist. Eine solche Elektrode hat die Möglichkeit, Wasserstoffjonen in den mit ihr in Berührung stehenden Elektrolyt zu senden. Sind in dem Elektrolyt seinerseits Wasserstoffjonen vorhanden, so werden diese umgekehrt an die Elektrode treten, und man wird irgend eine Concentration der Jonen im Elektrolyt angeben können, bei welcher die Zahl der aus- und eintretenden Wasserstoffatome gleich geworden ist. Den zu dieser Concentration gehörigen osmotischen Druck nennen wir den *elektrolytischen Lösungsdruck*[1]) des betreffenden Kations, in diesem Falle des Wasserstoffs und bezeichnen ihn mit p_h.

Nun hängt der Potentialunterschied gemäss der erwähnten Theorie von Nernst von dem Verhältniss zwischen dem elektrolytischen Lösungsdruck und dem osmotischen Gegendruck p der im Elektrolyt befindlichen Jonen ab. Man gelangt zu der entsprechenden Formel am einfachsten mittelst des Princips der virtuellen Energieänderungen[2]). Bringen wir ein Gramm-Aequivalent Jonen aus der Elektrode in den Elektrolyt, so ist die entsprechende osmotische Arbeit $p_h v + \int_{p_h}^{p} v\,dp$, während die elektrische $\varepsilon_0 \pi$ beträgt; dabei ist v das von einem Gramm-Aequivalent des (einwerthig angenommenen) Jonen eingenommenen Volum, π der Potentialunterschied zwischen Elektrode und Elektrolyt und ε_0 die Constante des Faraday'schen Gesetzes, d. h. die an einem Gramm-Aequivalent beliebiger Jonen haftende Elektricitätsmenge von 96 540 Coul. Setzen wir das Gasgesetz $pv = RT$ als gültig voraus, so ist $p_h v = RT$ und $\int_{p_h}^{p} v\,dp = RT \ln \frac{p}{p_h}$, also

1) Der Begriff entspricht vollkommen den von Nernst (a. a. O.) eingeführten der »elektrolytischen Lösungstension« als dem Druck, unter welchem das Metall in Lösung zu gehen bestrebt ist; seine Definition, wie sie im Text gegeben ist, scheint mir aber etwas rationeller.

2) Ostwald, diese Berichte 1891, S. 276.

die osmotische Arbeit gleich $RT\left(1 + ln\frac{p}{p_h}\right)$. Diese ist negativ zu rechnen, da mit abnehmendem Druck die abgegebene Energie zunimmt. Setzen wir die verbrauchte elektrische Energie gleich der gewonnenen osmotischen, so ist

$$\pi\varepsilon_0 = -RT\left(1 + ln\frac{p}{p_h}\right) = RT\left(ln\frac{p}{p_h} - 1\right)$$

und der Potentialunterschied an der Elektrode beträgt

$$\pi = \frac{RT}{\varepsilon_0}\left(ln\frac{p_h}{p} - 1\right).$$

Schalten wir zwei analog gebaute Ketten mit gleichen Elektroden gegen einander, in welchen die osmotischen Gegendrucke im Elektrolyt p' und p'' betragen, so ist die elektromotorische Kraft dieser Combination

$$\pi' - \pi'' = \frac{RT}{\varepsilon_0}\left(ln\frac{p_h}{p'} - 1\right) - \frac{RT}{\varepsilon_0}\left(ln\frac{p_h}{p''} - 1\right) = \frac{RT}{\varepsilon_0} ln\frac{p''}{p'}.$$

Dies ist die Formel, von welcher wir Gebrauch machen werden.

Die besondere Gaskette, welche wir in Betracht ziehen wollen, besteht aus zwei mit Wasserstoff gesättigten Elektroden, von denen die eine in einer Säure-, die andere in einer Alkalilösung steht. Solche Ketten sind bisher nicht eigentlich Gegenstand der Untersuchung gewesen, obwohl sie es verdient hätten; denn sie entwickeln eine sehr bedeutende elektromotorische Kraft, welche etwas über 0.7 Volt bei normalen Lösungen der beiden Stoffe beträgt. In unvollkommener Gestalt sind sie allerdings schon sehr lange bekannt, denn die entsprechende, mit Sauerstoff an Stelle des Wasserstoffs geladene Kette (von der später gezeigt werden soll, dass sie dieselbe elektromotorische Kraft hat, wie die Wasserstoffkette) liegt der von Becquerel angegebenen, freilich völlig falsch gedeuteten pile à oxygène oder Säure-Alkalikette zu Grunde. Bei dieser wurde die Energiequelle in der Verbindung von Säure und Alkali gesucht, während sich erweisen lässt, dass der Vorgang der Salzbildung an sich überhaupt nicht elektromotorisch wirken kann, und die Oxydations- und Reductionsvorgänge an den Elektroden das Wesentliche sind.

Die Ursache der elektromotorischen Kraft dieser Kette lässt sich unmittelbar aus der Formel

$$\pi = \frac{RT}{\varepsilon_0} ln \frac{p''}{p'}$$

ersehen. Der osmotische Druck der Wasserstoffjonen in der Säurelösung werde mit p'' bezeichnet. In der Basislösung Wasserstoffjonen anzunehmen, scheint zunächst kein Grund vorzuliegen, denn da diese Lösung Hydroxyljonen in grossem Ueberschusse enthält, so können sich etwaige Wasserstoffjonen mit diesen zu Wasser verbinden. Wäre indessen demgemäss $p' = 0$, so müsste $\pi = \infty$ sein; da π im Gegentheil einen endlichen Werth besitzt, so muss auch p' einen solchen haben, wenn dieser auch sehr klein sein mag.

Auch gewährt eine eindringendere Ueberlegung die Ueberzeugung, dass auch Basislösungen Wasserstoffjonen enthalten müssen, wenn in reinem Wasser solche vorhanden sind; und dass letzteres der Fall ist, geht wie schon erwähnt, aus den Thatsachen der Hydrolyse mit Sicherheit hervor. Denn nach den Gesetzen des chemischen Gleichgewichts kann eine Vermehrung der Hydroxyljonen im Wasser durch Zusatz von Alkali nur so zu wirken, dass die Zahl der Wasserstoffjonen vermindert wird, man kann sie aber nicht gleich Null machen. Vielmehr muss, von secundären Einflüssen abgesehen, die Concentration der beiden Jonenarten stets eine solche sein, dass ihr Product einen constanten Werth besitzt. Was für die Concentrationen gilt, gilt naturgemäss auch für die ihnen proportionalen osmotischen Drucke.

Bezeichnet man demnach mit p die gleichen osmotischen Drucke des Wasserstoffs und Hydroxyls in reinem Wasser, mit p_a' und p_b' die entsprechenden verschiedenen Werthe in der Basislösung, mit p_a'' und p_b'' die in der Säurelösung, so haben wir die Beziehung

$$p^2 = p_a' p_b' = p_a'' p_b'' .$$

Von diesen Grössen ist p_b', der Druck der Hydroxyljonen in der Alkalilösung, und p_a'', der Druck der Wasserstoffjonen in der Säurelösung bekannt, oder kann aus der elektrischen Leitfähigkeit bestimmt werden; wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass wir bei der Ausführung des Versuches $p_b' = p_a''$ machen, d. h. Lösungen von gleichem Dissociationszustande nehmen.

Dann ist auch $p_a' = p_b''$; dieser Werth aber ergiebt sich aus unserer Formel, die wir gemäss der zuletzt eingeführten Bezeichnungsweise schreiben müssen

$$\pi = \frac{RT}{\varepsilon_0} ln \frac{p_a''}{p_a'},$$

aus dem gemessenen Werthe von π.

Zur numerischen Ausrechnung beachten wir, dass

$$RT = 2T \text{ Cal.}$$

in Wärmemaass ist, wenn man die Gasgleichung auf ein Gramm-Molekulargewicht bezieht. Eine Calorie ist weiter gleich 4.18×10^7 Erg, und da $\varepsilon_0 = 96540$ Coul. beträgt, so folgt, da 1 Volt $\times$ Coul. $= 10^7$ Erg, $\frac{RT}{\varepsilon_0} = 0.0000867\,T$ Volt. Geht man von den natürlichen Logarithmen auf dekadische über, so wird der Zahlencoefficient 0.0001996, welchen Werth man unbedenklich auf 0.0002 abrunden kann. Aus

$$\pi = 0.0002\,T \log \frac{p_a''}{p_a'}$$

folgt

$$\log p_a' = \log p_a'' - \frac{\pi}{0.0002\,T}.$$

Was nun den numerischen Werth von π anlangt, so behalte ich mir genauere Angaben darüber vor, da soeben in meinem Laboratorium eine eingehende Untersuchung dieser Ketten im Gange ist; er liegt für normale Lösungen von Säure und Basis und Zimmertemperatur bei 0.7 Volt, eher etwas darüber, als darunter. Nehmen wir vorläufig diesen Werth an, so folgt für das Verhältniss der beiden Drucke

$$\frac{p_a'}{p_a''} = 8.5 \times 10^{-13}.$$

Setzt man die Concentration der Wasserstoffjonen p_a'' in der benutzten Säurelösung gleich Eins, so ist daher die der Wasserstoffjonen in der Basislösung p_a'' gleich 8.5×10^{-13}. Diese ist aber gleich der der Hydroxyljonen in der Säurelösung p_b'', und da weiter $p_a'' p_b'' = p^2$ ist, so folgt

$$p = 0.9 \times 10^{-6}.$$

Dies ist somit der osmotische Druck oder die Concentration der Wasserstoff- oder Hydroxyljonen im reinen Wasser, wenn die der normalen Lösungen (ein Gramm-Molekulargewicht im Liter) gleich Eins gesetzt wird. Für denselben Werth haben wir oben aus der Leitfähigkeit des Wassers 0.6×10^{-6} gefunden. Beide Zahlen kommen sich nahe genug; daraus, dass die aus der Leitfähigkeit erhaltene etwas kleiner ist, geht hervor, dass erstens die benutzte Schätzung von π auf 0.7 V etwas zu niedrig ist; 0.75 V würden bereits den Werth 0.23×10^{-6} geben, welcher unter den aus der Leitfähigkeit abgeleiteten fällt. Zweitens lässt sich aber aus dem nahen Zusammenfallen der Werthe schliessen, dass die von Kohlrausch beobachtete minimale Leitfähigkeit des Wassers bereits wesentlich von der Natur dieser Flüssigkeit, nicht mehr von zufälligen Beimengungen bestimmt worden ist und mit ziemlicher Annäherung die wahre Leitfähigkeit des Wassers darstellt.

Es bleibt noch übrig, auf den Zusammenhang der eben besprochenen Kette mit der von Becquerel einzugehen, welche bekanntlich aus zwei Platinelektroden besteht, von denen eine in Alkali, die andere in Säure taucht; beide Elektrolyte sind mit einander in Berührung. Es ist zunächst bemerkenswerth, dass die Wirkung der Kette nicht von der unmittelbaren Wechselwirkung zwischen Säure und Alkali abhängt, denn es bildet sich alsbald zwischen beiden eine Schicht neutraler Salzlösung, welche die unmittelbare Berührung aufhebt. Auch giebt in der That die Kette keine andere elektromotorische Kraft, wenn man beliebige Salzlösungen zwischen Säure und Alkali schaltet. Das Wirksame in der Kette ist vielmehr der freie Sauerstoff, welchen sowohl die Lösungen wie auch die Elektroden, allerdings in sehr geringer Menge gelöst und adsorbirt enthalten. Diese geringe Menge ist der Grund, dass sich die Kette sehr schnell polarisirt.

Stellen wir geregelte Verhältnisse dadurch her, dass wir die Elektroden und ihre Umgebung durch Berührung mit Sauerstoffgas möglichst gesättigt erhalten, so ist der chemische Vorgang in der Kette ganz analog der eben erörterten Wasserstoffkette. In dieser tritt Wasserstoff an der Seite der Basis ein, um zunächst in den Jonenzustand überzugehen, und alsbald mit dem vorhandenen Hydroxyl zu neutralem Wasser zusammenzutreten, während auf der anderen Seite eine gleiche Anzahl von Wasserstoffjonen seine Ladung verliert, um in gewöhnliches Wasser-

stoffgas überzugehen. In der Sauerstoffkette tritt umgekehrt auf der Seite der Säure beständig Sauerstoff in die Lösung, um mit dem vorhandenen Wasser Hydroxyljonen zu bilden (Sauerstoffjonen sind in wässeriger Lösung nicht bekannt), welche mit den Wasserstoffjonen wieder zu Wasser zusammentreten[1]), während beim Alkali Hydroxyljonen ihre Ladung verlieren, und sich in Sauerstoff und Wasser spalten. In beiden Fällen ist die in Alkali stehende Elektrode Anode, für beide Fälle gilt dieselbe Gleichung, und beide Ketten müssen daher dieselbe elektromotorische Kraft haben. In der That liegen die für die Becquerel'sche Kette beobachteten Werthe etwas über 0.7 Volt.

Die vorstehenden Ueberlegungen gelten unter der Voraussetzung, dass die Elektroden nur als Leiter, nicht vermöge ihrer Substanz wirken. Im Falle des Wasserstoffs ist diese Voraussetzung bei Platin, Palladium, Kohle und ähnlichen Stoffen als erfüllt anzusehen, wie sich theoretisch begründen lässt. Zweifelhafter wird die Frage im Falle des Sauerstoffs. Hierüber sind die Ergebnisse der im Gange befindlichen experimentellen Untersuchungen abzuwarten.

Ferner sind aber die Ergebnisse der eben gemachten Erörterungen nicht auf den Fall der Bildung von Wasserstoff- und Hydroxyljonen aus gasförmigem Wasserstoff und Sauerstoff beschränkt. Sie müssen vielmehr immer gelten, wenn eine Quelle für die Bildung dieser Jonen vorhanden ist, d. h. bei allen Stoffen, die Sauerstoff oder Wasserstoff aufnehmen und abgeben können. Dies sind die Oxydationsmittel im engeren Sinne und die Gruppe der Reductionsmittel, bei welchen Wasserstoffjonen gebildet oder Hydroxyljonen verbraucht werden. Denn die Ursache der elektromotorischen Kraft ist der grosse Unterschied in den beiderseitigen osmotischen Drucken sowohl der Wasserstoff- wie der Hydroxyljonen. Alle elektrischen Vorgänge, durch welche nach beliebigen Zwischenreactionen in letzter Instanz dieser Druckunterschied verkleinert wird, gestatten naturgemäss die Überführung der osmotischen Energie in elektrische und sind der oben gegebenen Formel unterworfen.

---

1) Man kann auch einfacher annehmen, dass die Wasserstoffjonen daselbst ihre Ladung aufgeben, um mit neutralem Sauerstoff neutrales Wasser zu bilden. Für den erörterten Fall macht das keinen Unterschied.

Eine solche Beziehung ist von W. Bancroft[1]) experimentell gefunden worden, bevor noch die Theorie der Erscheinung bekannt war: Bancroft fand, dass Säuren die elektromotorische Kraft der Oxydationsmittel erhöhen, und die der Reductionsmittel vermindern; Basen verhalten sich umgekehrt. Von den Combinationen, die er untersucht hat, finde ich nur eine, welche zum Vergleich herangezogen werden kann. Hydroxylamin in saurer Lösung reducirt um 0.70 V schwächer, als in alkalischer. Da die Verdünnung geringer als normal war (die genaue Zahl ist nicht angegeben), so ist diese Beobachtung mit der früher gegebenen Zahl in gutem Einklang.

Es ist beachtenswerth, dass als Quelle der elektrischen Energie sich hier in erster Linie die osmotische Energie ausweist. Das Gleiche ergiebt sich für alle anderen Volta'schen Ketten. Die chemischen Verhältnisse kommen nur insofern bestimmend in Frage, als sie gewisse Werthe des Druckes oder bestimmte Beziehungen zwischen verschiedenen Drucken festlegen. Es ist daher historisch vollkommen erklärlich, dass die Theorie der Volta'schen Ketten fast ein Jahrhundert später gekommen ist, als die experimentelle Kenntniss derselben: sie hat auf die Theorie des osmotischen Drucks und die der elektrolytischen Dissociation warten müssen.

1) Ztschr. f. ph. Ch. X, 397. 1891.

A. Looss, *Zur Frage nach der Natur des Körperparenchyms bei den Trematoden*, nebst Bemerkungen über einige andere, zur Zeit noch offene Fragen.

Obgleich die parasitischen Plattwürmer in den letzten Jahren oft Gegenstand vergleichender Untersuchungen gewesen sind, so finden sich betreffs ihrer speciellen Organisation sowohl, wie ihrer Entwickelung doch noch eine Anzahl von Fragen, die einer definitiven Lösung harren. Erst nachdem diese erzielt ist, werden wir in den Stand gesetzt sein, die gegenseitigen Beziehungen und Verwandtschaftsverhältnisse aller klar zu übersehen. Für diesen Zweck aber dürften auch Einzeluntersuchungen ohne vergleichende Grundlage ihren Werth haben. Was die Trematoden anlangt, so ist man beispielsweise noch bis heute zu keiner einheitlichen Auffassung der bindegewebigen Grundsubstanz, welche den Körper dieser Thiere bildet, gelangt; bekanntlich haben dieselben keine echte Leibeshöhle, sondern alle Organe sind eingelagert und in eine weiche, schwammartige, nur von Lacunen durchzogene Gewebsmasse. Den Namen »Körperparenchym« gebrauchte zuerst Walter[1]); derselbe zeichnet auch bereits das bindegewebige Maschenwerk, freilich unter völliger Verkennung seiner Natur; hingegen berichtet Paulson[2]) von Diplozoon paradoxum bereits, dass das Körperparenchym eine homogene hyaline Grundsubstanz bilde, in welcher ovale Zellen

1) Walter, Beitr. zur Anat. u. Histol. einzelner Trematoden. Arch. f. Naturgesch. XXIV. 1850.

2) Paulson, Zur Anatomie v. Diplozoon paradoxum. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg VIIe Sér. T. IV. 1862.

und Kerne eingebettet sind. Eine genauere Analyse des Gewebes gab erst Leuckart in seinem Parasitenwerke[1]; er unterschied hier zwei Modificationen, von denen die eine eine homogene, äusserst feinkörnige Substanz mit zahlreichen eingelagerten Kernen darstellte, während die andere durch eine auffallende Aehnlichkeit mit den Zellen des Pflanzenkörpers sich auszeichnete. Die erstgenannte Form fand sich vorzugsweise bei Arten mit festerem Gefüge, während die letztere Ausbildungsweise bei den beiden Leberegeln und anderen Formen sich ausgeprägt zeigte. In ganz gleicher Weise, wie Leuckart, beschreibt auch Sommer die Körpergrundsubstanz des Leberegels als ein Conglomerat von grossen Zellen mit »zähflüssigem, fast schleimigem Protoplasma« und wenig sichtbaren, meist excentrisch gelegenen Kernen; zwischen diesen Zellen finde sich spärlich eine Intercellularsubstanz, welche die zelligen Elemente in ihrer Lage fixirt. Die Mehrzahl der späteren Untersucher dieser oder jener Trematodenform kamen zu denselben, oder wenigstens zu ähnlichen Resultaten. So berichtet Fischer[3] von Opisthotrema cochleare, dass die Zellen polygonal, häufig Sechsecke bildend, mit ihren dünnen Wänden dicht aneinanderschliessen und dass die engen Intercellularräume von den sich durchzwängenden Muskeln vollständig ausgefüllt werden. Leytenyi[4] spricht von einer Intercellularsubstanz, in welche die grossen, runden Bindegewebszellen mehr oder minder dicht eingelagert sind, und entsprechend lauten weiter die Angaben von Lorenz[5] bei Axine und Microcotyle, von Blumberg[6] bei Amphistomum conicum, von Stieda, Poirier, Villot u. a. Auch v. Linstow[7] nennt das Parenchym von Dist. cylindraceum zellig und betont die geringe Färbbarkeit der Zellen im Gegensatz zu der der Kerne.

---

1) Leuckart, Die menschl. Parasiten etc. 1. Aufl. Leipz. u. Heidelb. 1863.

2) Sommer, Die Anatomie d. Leberegels. Zeitsch. f. w. Zool. XXXIV. 1880.

3) Fischer, Ueb. d. Bau v. Opisthotrema cochleare. Zeitschr. f. w. Zool. XL. 1883.

4) Leytnyi, Ueb. d. Bau v. Gastrodisc. polymastos. Frankf. 1881.

5) Lorenz, Ueb. d. Organis. d. Gattungen Axine u. Microcotyle. Arbt. a. d. zool. Inst. Wien 1878.

6) Blumberg, Ueb. d. Bau d. Amphist. conicum. Dissert. Dorpat. 1871.

7) v. Linstow, Ueb. d. Bau u. d. Entw. d. Dist. cylindrac. Arch. f. micr. Anat. XXXVI. 1890.

Während nun hier nur eine einzige Form von Zellen als Bildnerinnen des Gewebes angenommen wird (abgesehen natürlich von verschiedenen Einlagerungen in die Grundsubstanz), trat 1879 Taschenberg[1]) nach Untersuchung gewisser ektoparasitischer mariner Trematoden (Tristomum, Onchocotyle, Pseudocotyle) mit einer anderen Deutung unserer Grundsubstanz hervor, nach welcher vor allem *verschiedene* Zellenarten in ihre Bildung eingehen sollten. Taschenberg betrachtet das Parenchym als ein Bindegewebe, welches zu einem Maschenwerke entwickelt ist, in dem die ursprünglichen Bildungszellen theils noch erhalten sind, theils aber nur an dem Protoplasma mit den darin eingelagerten Kernen sich erkennen lassen. Jene grossblasigen, Pflanzenzellen ähnlichen Gebilde sieht er nicht für von einer Membran umgebene Zellen an, sondern für Lücken im Bindegewebe, in denen je eine membranlose Zelle eingelagert ist. Grosse birn- oder spindelförmige, mit ein oder zwei Fortsätzen ausgerüstete Zellen werden als Bildnerinnen dieses Netzwerkes in Anspruch genommen. Die neue Deutung Taschenberg's fand sogleich vielfachen Anklang und zwar ganz augenscheinlich deshalb, weil, wie Leuckart ganz treffend sagt, die scheinbaren Zellenwände, welche die Substanzmasse des Fachwerkes zusammensetzen, oft viel zu derb sind, um als die mit einander verschmolzenen Wände der einfachen Blasenzellen gelten zu können. Trotz alledem aber beziehen sich die Bestätigungen der Taschenberg'schen Ansicht nicht nur auf Formen mit festerem, robusterem Gefüge, wie solches in hervorragendem Maasse die Tristomiden besitzen, auch kleinere und vielfach sogar schwächliche Formen sollten dasselbe zeigen. So wird es beschrieben von Kerbert[2]) bei Dist. Westermanni, welches übrigens nach Leuckart's Untersuchungen als identisch mit dem Dist. pulmonale Bälz zu betrachten ist[3]), von Ziegler[4]) bei Gasterostomum, von Schwarze[5]) bei Dist. en-

---

1) Taschenberg, Beitr. u. weitere Beitr. z. Kenntn. ectopar. mariner Trematod. Abh. d. Naturf. Ges. Halle 14. 1879, u. Festschr. ders. 1879.

2) Kerbert, Beitr. z. Kenntn. d. Trematoden. Arch. f. mikr. Anat. XIX. 1879.

3) Leuckart, Parasiten d. Menschen. 2. Aufl. III. Lief. p. 408.

4) Ziegler, Bucephalus u. Gasterostomum. Zeitschr. f. w. Zool. XXXIX. 1883.

5) Schwarze, Die postembr. Entwickl. d. Trematoden. Z. f. w. Z. XLIII. 1885.

dolobum und clavigerum, von Heckert[1]) an Dist. macrostomum, und auch von mir[2]) bei Dist. palliatum, welches von allen mir bekannten Distomen das robusteste Körperparenchym aufweist. Betreffs der Gerüstzellen konnte ich aber schon damals nur sagen, dass man »in ihnen manchmal einen, wenn auch nie sehr deutlichen Kern mit Kernkörperchen erkennen könne«. Auch Leuckart adoptirte in der zweiten Auflage seiner Parasiten des Menschen (1886) zunächst die Taschenberg'sche Deutung: »auf den ersten Blick ist man geneigt, die scharf gezeichneten, derben Contouren dieser Blasenzellen als genuine Zellenwände in Anspruch zu nehmen; doch hat sich im Laufe der Zeit allmählich immer bestimmter die Thatsache herausgestellt, dass ausser und zwischen diesen Blasenzellen noch eine zweite Form von Zellen in die Bildung des Körperparenchyms eingeht, die vielfach sich verästeln und in Fortsätze ausziehen, welche im Umkreise der Blasenzellen zu einem Maschenwerke zusammentreten und dadurch den Anschein der erwähnten Contourirung bedingen« (l. c. p. 14). Aber schon in der 1889 erschienenen dritten Lieferung wird dieser Standpunkt wiederum verlassen, wenigstens findet sich in den Beschreibungen der Grundsubstanz von D. hepaticum, lanceolatum, spathulatum und pulmonale (= D. Westermanni Kerbert) nichts mehr von den Gerüstzellen erwähnt. Das Parenchym von Dist. hepaticum besitzt einen Zellenbau, doch trägt Leuckart noch Bedenken, »die einzelnen Zellen als gewöhnliche Blasenzellen in Anspruch zu nehmen und die Substanzmasse des Fachwerkes als die mit einander verschmolzenen Zellenwände zu deuten«; er hält es für wahrscheinlicher, dass die Blasenzellen ihr Protoplasma im Laufe der Zeit durch *Ansammlung einer hellen Flüssigkeit* im Inneren auf eine der Wand anliegende feste Rindenschicht reducirt haben«. Bei der Beschreibung des Dist. pulmonale endlich überzeugt sich Leuckart direct von dem Nichtvorhandensein der verästelten Bindegewebszellen und führt die zu Grunde liegenden Bildungen »zum guten Theil« auf Ausläufer der Parenchymmuskeln zurück; ausserdem wird noch constatirt, dass die einzelnen Lückenräume des Gewebes oft nur unvollständig gegen einander abgesetzt sind, und

---

1) Heckert, Leucochloridium paradoxum etc. Biblioth. zool. Cassel 1889.

2) Looss, Beitr. z. Kenntn. d. Trematod. etc. Z. f. w. Z. XLI. 1884.

dass in ihnen Zellenkörper mit kugelförmig zusammengeballter feinkörniger Masse und bläschenförmigem Kerne eingelagert sind.

In der Hauptsache haben wir es, was die Analysirung des Körperparenchyms der Trematoden (die übrigen Plattwürmer lassen wir hier ganz ausser Acht) anbelangt, also mit zwei Auffassungen zu thun; nach der einen besteht dasselbe aus einem festen, von verästelten Zellen gebildeten Gerüstwerke, in dessen Lückenräumen anders gestaltete, mehr oder weniger veränderte und degenerirte Zellen liegen; nach der anderen Auffassung ist nur eine Sorte von Zellen da, die durch eine Intercellularsubstanz mit einander verbunden sind. Die Zellen selbst werden beschrieben entweder als »embryonal«, sie sollen beim Zerlegen des Wurmes in Schnitte ihren Inhalt verlieren, so dass nur die resistente Hülle für die Beobachtung übrig bleibt (Villot[1]), oder sie sind normal, oder endlich sie sind in verschiedener Weise verändert und degenerirt.

Nach meinen eignen neueren Beobachtungen nun, die sich auf eine grössere Anzahl erwachsener Formen[2]) und vor Allem auf die allmähliche Körperentwickelung von der Cercarie zum erwachsenen Wurme erstreckten, ist die letztgenannte Deutung die allein richtige. Nach meiner Ansicht setzt sich das Körperparenchym der Trematoden, abgesehen zunächst von den verschiedenen Einlagerungen, aus *ganz gleichartigen* Zellen zusammen, von denen im ausgebildeten Zustande hauptsächlich die ziemlich festen und dicken Membranen noch vorhanden sind. Diese letzteren schliessen dicht an einander an und sind durch eine Intercellularmasse mit einander verkittet; sie bilden so ein dem Seifenschaum ähnliches Maschen- oder Gerüstwerk, dessen Lücken in einzelnen Fällen, wie Leuckart bereits beobachtete, und wie ich bestätigen kann, durch theilweise Resorption der Wände in gegenseitige Communication treten. Die Lücken selbst sind während des Lebens von einer vollkommen farblosen, klaren

---

1) Villot, Organis. et développem. de quelques espèces de Trém. etc. Ann. d. Sc. Nat. Zool. 1879.

2) Ich untersuchte von den Monogenea nur: Tristomum papillosum, Polystomum integerrimum, Diplozoon paradoxum und Aspidogaster conchicola, von den Digenea: Amphistomum subclavatum, Distomum clavigerum, cygnoides, cylindraceum, echinatum, endolobum, globiporum, hepaticum, lanceolatum, leptostomum Olsson, Naja, neglectum, nodulosum, ovocaudatum, Richiardi, tereticolle, trigonocephalum, turgidum und variegatum.

Flüssigkeit, dem wässerig entarteten Protoplasma erfüllt; manchmal erkennt man in dem früheren Zellenleibe noch den verschieden, meist central gelagerten und von einem Hofe feinkörnigen, d. h. noch nicht völlig veränderten Plasmas umgebenen Kern. Bei den feisten und kräftigen Ektoparasiten ist die Grundsubstanz durch die Masse der Muskeln meist so verdeckt, dass sie nur hier und da noch zu erkennen und noch seltener genau zu analysiren ist. Das ganze Gewebe hat also nicht nur eine rein äusserliche Aehnlichkeit mit dem der Pflanzen, wie bei der ersten Beschreibung bereits Leuckart hervorhob, sondern diese Analogie gilt in der Hauptsache auch für den morphologischen und physiologischen Werth der beiderlei Bildungen.

Es wird sich nunmehr darum handeln, die von mir aufgestellte Behauptung zu begründen. Was zunächst die Beobachtungen an den erwachsenen Formen betrifft, so kann ich auf eine ausführliche Darstellung derselben wohl verzichten; in der Mehrzahl der Fälle stellt sich auf Schnitten durch conservirte und gefärbte Objecte des Parenchym freilich nicht in jener deutlichen und leicht verständlichen Form dar, wie bei Distom. hepaticum und Opisthotrema; ungefähr so wie hier findet es sich nur bei Dist. turgidum, variegatum, cylindraceum und Naja, vielleicht noch bei Amphistomum. Doch ist bei dem letzteren schon die ursprünglich regelmässige Gestalt der Lückenräume einer völlig regellosen gewichen, die, ganz abgesehen von einer durch eingelagerte Organe bedingten Deformirung, hauptsächlich in einer ganz unregelmässigen Verbiegung und Faltung der Wände besteht, wodurch das Gewebe auf dem Schnitt ein bedeutend weniger übersichtliches Bild giebt. Dabei sind die einzelnen Zellen in dem einen Falle ausserordentlich gross (Amphist., Dist. pulmonale, turgidum), im anderen sehr klein, dann aber natürlich viel zahlreicher (Dist. echinatum, tereticolle). In gewissen Fällen erscheinen weiter die Zellwände scharf begrenzt, dabei selbst dicker oder dünner, ja sogar oft sehr dünn (Dist. cylindraceum, variegatum, nodulosum), in anderen wieder verschwimmen sie nach Innen mehr oder weniger (Dist. palliatum, leptostomum). In den Lückenräumen findet man vielfach, besonders bei jüngeren Thieren die Reste von dem Körper der Zelle in Gestalt des von noch etwas Plasma umlagerten Kernes; später verflüssigt sich auch dieses Plasma völlig, dann quillt auch der Kern auf, verliert seine chromatische Substanz vollkommen und ver-

schwindet schliesslich ebenfalls. Der Inhalt der Zelle kann sich bei der Behandlung mit conservirenden Reagentien körnig niederschlagen, oder auch ganz klar bleiben. Die Zellenwände legen sich entweder dicht aneinander, oder sie nehmen, und das besonders da, wo mehrere in einem Punkte zusammenstossen, eine mehr oder weniger körnige Intercellularmasse zwischen sich. Kann nun schon diese durch ihre Einlagerung zwischen die Blasenzellen gelegentlich das Bild einer verästelten Zelle darbieten, so wird dieser Eindruck noch erhöht durch im Innern auftretende Bildungen, welche einen Kern vortäuschen. Das letztere wird hervorgerufen durch beim Schneiden ziemlich senkrecht getroffene Parenchymmuskeln oder feinere Excretionscanäle, die ja *zwischen* den Parenchymzellen hinziehen. Von der Existenz wirklicher verästelter Zellen mit deutlichem, zugehörigem Kern habe ich mich bei neueren Beobachtungen *nirgends* überzeugen können.

Hingegen zeigt sich bei einigen Formen — und hierher gehören meinen Erfahrungen nach besonders Diplozoon paradoxum, Dist. tereticolle, die Arten des Subgenus Echinostomum Dujard. u. a. — dass die Lückenräume im Parenchym ausserordentlich klein sind, ihre Zahl hingegen sehr stark wächst und dann mit der Zahl der dazwischen sichtbaren Kerne in grossem Missverhältniss steht. Eine genaue Untersuchung zeigt hier, dass eine grössere Zahl der unregelmässig gegen einander abgerenzten Lückenräume *einer* Zelle entspricht. Es verwandelt sich nicht deren ganzer Inhalt in jene wässerige Masse, welche sonst die Blase erfüllt, sondern es bleibt im Innern der Zelle ein Gerüstwerk, ein wirkliches »Spongioplasma« bestehen, ein feines Maschenwerk, in dessen Lücken dann das wässerig entartete übrige Plasma gelegen ist. Die einzelnen Wändchen, welche die Lücken von einander trennen, bleiben hier, wie auch die Zellwände selbst, ausserordentlich dünn, so dass es später sehr schwer wird, die Zellterritorien scharf gegeneinander abzugrenzen. Um so deutlicher zeigen aber noch jüngere Parenchymzellen den hier geschilderten Sachverhalt. Es scheint mir zweifellos, dass wir es hier mit einem Mittel zu thun haben, der ganzen Körpergrundsubstanz eine grössere Festigkeit unter gleichzeitiger Wahrung der Beweglichkeit zu geben. Alle die genannten Arten zeichnen sich durch ihr derbes, feistes Gefüge, zugleich aber durch ihre Beweglichkeit aus, was bei denjenigen Formen, wo die Festigkeit des Körpers durch blosse Verdickung

der Zellwände erzielt wird (Amphistomum subclav., Dist. turgidum, pulmonale u. a.) auffallend weniger der Fall ist. Uebrigens mögen beide Modificationen des Gewebes, die blasige und sagen wir, schwammige, oft in einander übergehen.

Die geschilderten Verhältnisse sind theilweise sehr schön auch an den lebenden Thieren zu studiren, deren Beobachtung in unserer Zeit allerdings — leider — oft ganz ausser Gebrauch zu kommen scheint. Hier sieht man an geeigneten Objecten die Zellen von einem ausserordentlich klaren und blassen Inhalte erfüllt, in welchem sich hier und da einige Körnchen und gelegentlich auch der Kern in Form eines fein contourirten Bläschens erkennen lässt. Bei der Contraction der Thiere werden die Körnchen hin- und hergeschoben, sie treten manchmal in eine benachbarte Lücke über, wodurch die Communication beider erwiesen ist. Die Parenchymmuskeln verlaufen *zwischen* diesen Zellen — daher bei manchen stärker muskulösen Formen die säulenförmige Anordnung des Parenchyms — sie hängen mit deren Wandungen *fest* zusammen und *endigen* vielfach zwischen ihnen, ohne sich bis an die Haut zu begeben. Man sieht bei der Contraction solcher Muskeln (die übrigens vollkommen unabhängig auch von der der nächst benachbarten erfolgt), wie die anliegenden Zellenwände mitgezogen werden, um beim Nachlassen der Contraction wieder in ihre frühere Lage zurückzukehren. Die Körperwand bleibt dabei oft durchaus unbeeinflusst, woraus ohne Weiteres erhellt, dass die Faser an ihr nicht sich inseriren kann. Von verästelten Zellen, deren Ausläufer unter einander in Verbindung treten und ein Gerüstwerk darstellen, bemerkt man hier absolut nichts; der Anschein des letzteren wird hervorgerufen lediglich von den Membranen der hyalinen Parenchymzellen, die gelegentlich zu 4 und 5 in einem Punkte zusammenstossen und so das Bild einer Sternzelle darbieten. Dieses Grundgewebe erstreckt sich auch in Saugnäpfe und Pharynx, nur dass hier seine Bestandtheile meist viel kleiner sind, die oben erwähnte Schwammstructur annehmen und bei muskulösen Thieren durch die Masse der Muskeln fast verdeckt werden.

Hier stehen auch jene grossen Zellen, die man seit den Untersuchungen Lang's[1]) gewöhnlich als Ganglienzellen auffasste

1) Lang, Unters. z. vergl. Anat. u. Histol. d. Nervensyst. d. Plathelen. Mitth. a. d. zool. Stat. Neapel II, 1881.

die ich dann als bindegewebige Elemente deutete, und für deren nervöse Natur neuerdings wieder Crety[1]) mit Entschiedenheit eingetreten ist, mit dem Netzwerke in Verbindung. Ich will gestehen, dass mir nach den neueren Erfahrungen über das Grundgewebe des Trematodenkörpers und besonders in Folge der Beobachtungen Heckert's[2]), der auch bei kleinen und einfachen Formen Nervenfasern bis zu ihnen verfolgte, ihre bindegewebige Natur selbst unwahrscheinlich geworden ist; andererseits geht aber Crety jedenfalls zu weit, wenn er das ganze, an sie anschliessende Netzwerk von Parenchymzellen für nervöser Natur erklärt. Ganz unhaltbar für *unsere* Formen ist die von Wright und Macallum[3]) für Sphyranura gegebene Deutung, dass diese Gebilde Renal-, d. h. Wimperzellen seien; man müsste sie dann während des Lebens flimmern sehen, aber das ist nie der Fall.

Sehr wichtige Einblicke in die Natur des Körperparenchyms erhalten wir auch durch das Studium von dessen *Entwickelung*. Ueber die allmähliche histologische Differenzirung des Cercarienkörpers besitzen wir ausser einer Anzahl auf die Entwickelung des Leberegels bezüglicher Angaben von Leuckart[4]) bis jetzt nur die Arbeiten von Schwarze[5]) und Heckert, von denen die letzte sich eigentlich nur auf das in mehrfacher Hin-

1) Crety, Intorno alla Struttura delle Ventose etc. Rendic. della R. Accad. dei Lincei. 1892.

2) Heckert, l. c. p. 58 u. Taf. IV. Fig. 62.

3) Journ. of Morphology. Vol. I. Boston 1887.

4) Besonders Parasiten d. Menschen, 2. Aufl. 3. Lfg.

5) Schwarze, l. c. Leider enthält diese Arbeit ausser einer Reihe wichtiger neuer Thatsachen auch mehrere Angaben, die ich durchaus nicht bestätigen kann. Auf einige solche Differenzen werden wir später noch zu sprechen kommen, hier will ich darauf hinweisen, dass u. a. Schwarze bei der Cerc. echinata und spinifera die Anlage des Cirrusbeutels für die des Ovariums hält (l. c. Taf. III. Fig. 30, 33, 35), obgleich bei dem erwachsenen Wurme das letzte nahe bei den Hoden liegt. Ferner kann ich die bereits bei Pagenstecher (Trematodenlarven und Trematoden) sich findende, von Schw. »durch einige 20 Versuche« bestätigte Angabe, dass das Dist. endolobum der Frösche aus der Cerc. armata v. Sieb. von Limn. stagn. sich entwickele, *nicht* bestätigen! Wiederholte, und mit aller möglichen Sorgfalt angestellte Fütterungsversuche haben mir stets die Cerc. ornata de la Val. von Planorb. corn. als Jugendform des Dist. endolobum ergeben, so dass ich im Gegensatze zu Schwarze die beiden letztgenannten Formen als zusammengehörig betrachte. (Zu demselben Resultate kam übrigens schon Engel: Sur le développem. d'un Distoma, Mém. de la soc. des sc. nat. Strasbourg T. VI. 1866.)

sicht abweichende Leucochloridium bezieht; in beiden wird auf die uns hier speciell interessirende Frage aber wenig eingegangen. Bekanntlich entwickelt sich die Cercarie aus einem Keimballen, der auf einem frühen Entwicklungstadium aus einem einfachen Haufen embryonaler Zellen besteht. Diese Zellen sind kaum gegeneinander abgesetzt, sie haben fast gar kein Protoplasma an sich, dagegen im Verhältniss sehr grosse Kerne, die sich intensiv färben und im Leben einen meist sehr grobkörnigen Inhalt besitzen. Sie vermehren sich durch Theilung auf mitotischem Wege, was man hier mitunter am *lebenden* Objecte beobachten kann (Amphistom.); einige von ihnen treten nach kurzer Zeit an die Oberfläche des Ballens, um dort zur Bildung einer zelligen Hülle Anlass zu geben. Aus dem im Inneren verharrenden Zellenmateriale bilden sich nun die gesammten Organe des späteren Wurmkörpers. Von einer Zurückführung derselben auf bestimmte Keimblätter, wie dies bei höheren Thierformen fast überall möglich ist, kann hier aber keine Rede sein. Zwar tritt in der Entwickelung mancher Formen vorübergehend ein Stadium auf, wo im Inneren des Embryonalkörpers ein von einer einfachen Zellenlage umgebener Hohlraum als Anlage des Darmes erkennbar ist, wo man also füglich von einem Ekto- (die zellige Hülle als solches aufgefasst) und Entoderm im Gegensatz zu einem Mesoderm — oder Mesoblast, oder Mesenchym — reden könnte. Aber dieses Mesenchym, welches schon ganz verkehrter Weise als Matrix für das äussere und das innere Blatt fungirt, also als das primäre aufgefasst werden müsste, dieses Mesenchym liefert nicht nur eine nach Verlust der gegenwärtigen neu auftretende, zellige Körperhaut, sondern auch Nervensystem, Geschlechtsorgane und den hinteren paarigen Theil des Darmes. In dieses dunkle Gebiet Licht zu bringen, überlasse ich Denjenigen, welche auf die Unantastbarkeit und Unentbehrlichkeit der Keimblätter schwören; so lange man aber noch nicht weiss, was bei unseren Würmern Ektoblast oder Mensenchym oder Entoderm ist, resp. ob ein solches überhaupt existirt, sollte man, meine ich, auch von dem Gebrauche dieser Namen als Bezeichnungen für irgendwelche Körpertheile absehen!

Ich erwähnte eben ganz allgemein eine nach Abwerfen der alten im Umkreise des Keimballens neu auftretende zellige Hülle; es ist mir gelungen, die Beobachtungen, die ich über die Häutungen der Entwicklungsformen von Amphistom. subclavatum

kürzlich veröffentlichte[1]), gegenwärtig auch an denen anderer Wurmarten[2]) zu wiederholen und zu vervollständigen; es scheint mir, als ob wir es hier mit allgemein gültigen Thatsachen zu thun haben. Da sie übrigens auch für die Auffassung der Haut des Trematodenkörpers von Einfluss sind, so will ich hier kurz darüber berichten. Meine Erfahrungen beziehen sich vorzugsweise auf die ersten Zustände von Redien und Cercarien, die sich in dieser Hinsicht vollkommen identisch verhalten. Bekanntlich verliert der Embryo bei der Einwanderung in den Zwischenwirth, in welchem er sich zur Sporocyste umbildet, sein Flimmerkleid — die flimmer*losen* Embryonen gedenke ich so bald als möglich auf diese Fragen hin zu studiren — aber die nach dieser Häutung neu auftretende Körperbedeckung zeigt, wie ich es bei Amphistomum genauer beobachten konnte, sogleich wieder Kerne, und sie bleibt augenscheinlich durch das ganze spätere Leben der Sporocyste als mehr oder minder deutlich kernhaltige Körperhaut erhalten. Das hat bereits Biehringer[3]) festgestellt, ohne freilich die Entstehung der Hülle zu kennen. Redien und Cercarien gehen hier nun einen Schritt weiter, indem sie auch diese zweite Haut wieder verlieren und an deren Stelle eine dritte erhalten. Schon kurz nach dem Auftreten der ersten zelligen Bedeckung bemerkt man an den Keimballen unter derselben wieder sich abplattende Zellen, die alsbald zu einer neuen Haut sich zusammenschliessen. Diese tritt schon nach kurzer Zeit dadurch, dass die bisherige äussere abgeworfen wird, an die Körperoberfläche und bleibt hier oft ziemlich lange durch ihre deutlich hervortretenden Kerne bemerkbar. Beide Häute sind, allerdings *neben*- und nicht *nach*einander, und in weniger typischer Form bereits von Heckert[4]) an den Keimballen des Leucochloridium beobachtet worden; Biehringer hat sie augen-

---

1) Looss, Amphistom. subclavat. u. seine Entw. Festschr. z. 70. Geburtst. Rudolf Leuckart's. Leipzig 1892.

2) Cercaria armata, ornata, tuberculata, cristata, echinata und verwandte Formen, C. Dist. perlati, C. cystophora, eine Cerc. aus Paludina impura, die augenscheinlich zu Monost. attenuatum der Enten gehört, und die ich, da ihr Körper dicht mit körnchenhaltigen Cystogenzellen durchsetzt ist, mit dem provisorischen Namen C. imbricata bezeichnen will, u. a.

3) Biehringer, Beitr. z. Anat. u. Entw.-Gesch. d. Tremat. Arbt. a. d. zool. Inst. Würzburg. Bd. VII. 1884.

4) Heckert, l. c.

scheinlich ebenfalls gesehen, aber für ein und dasselbe Gebilde gehalten. Ehe nun auch die zuletzt gebildete zellige Hülle abgeworfen wird, entsteht unter ihr — wie, ist schwer zu beobachten — eine dritte Haut, in der sich aber *niemals* Korngebilde nachweisen lassen, was auf diesem frühen Stadium jedenfalls möglich sein müsste. Diese dritte Haut gelangt bei einer nochmaligen Häutung an die Oberfläche und sie bleibt nun, bei Redien sowohl wie bei Cercarien, die definitive Körperbedeckung. Ich fasse sie als *Cuticula* auf und bringe ihr Auftreten mit der Metamorphose der Zellen im Inneren in Zusammenhang; dementsprechend bleibt sie auch bei den Redien, deren Körper fast nur als Behälter für die erzeugte Brut dient, ziemlich dünn, während sie bei den Cercarien und besonders den reifen Würmern eine bedeutende Mächtigkeit erreicht. Ich komme bald hierauf weiter zurück, wenden wir uns zunächst wieder unseren Keimballen zu.

Eine der ersten, noch vor der Differenzirung des Darmes an ihnen Platz greifende Veränderung ist nach Schwarze das »Auftreten« von dunkel sich färbenden, durchaus homogenen Zellenkernen, die an *verschiedenen* Stellen des Ballens vertheilt sind. Diese »Zellenkerne« treten allerdings mit grosser Regelmässigkeit auf, sie sind auch während des Lebens deutlich von den übrigen Elementen des Ballens unterscheidbar und zeigen sich als kleine, runde, stark lichtbrechende, deshalb äusserlich oft fettähnliche Kügelchen: aber sie haben mit *normalen* Kernen *nichts zu thun*. Dagegen möchte ich sie für degenerirende Kerne halten; einmal verschwinden sie während der weiteren Entwickelung des Ballens vollkommen, und dann sehen sie auch ganz so aus, wie die Kerne der nachweislich in Reduction und Auflösung begriffenen Cercarienkeime[1]). Man möchte beim Anblick dieser Kernchen in den Keimballen fast auf die Vermuthung kommen, dass etliche der zelligen Bestandtheile derselben als Bildungszellen, andere dagegen als blosse Nährzellen fungirten; und das umsomehr, als die Ballen im conservirten Zustande während dieser Zeit vollkommen das gleiche Bild ge-

1) Auch unter ganz normalen Existenzverhältnissen findet innerhalb der Ammen (Redien sowohl, wie Sporocysten) ein gelegentliches Absterben einzelner Nachkommen, mitunter sogar auf ziemlich weit vorgeschrittenen Stadien statt; dasselbe wird immer häufiger, je älter die Ammen werden.

währen, wie es bei den Eiern von Amphistomum kurz nach dem Eintritt der Dotterzellenkerne in den Embryonalkörper sich zeigt. Mit diesen dunklen, kernartigen Körpern aber hängen die späteren Genitalzellen der jungen Cercarie absolut nicht zusammen. Dieselben treten meist erst viel später deutlich hervor, im frischen Zustande als eine kleinzellige, stark körnige Masse fast ohne jedes Zellprotoplasma, im gefärbten Präparate als Haufen dicht gedrängter dunkler Kerne. Das Auftreten der Genitalzellen hängt zweifellos mit dem Anfange der Gewebeentwicklung im Körper zusammen, und zwar insofern, als diejenigen Zellen, welche jetzt zu einem besonderen Gewebe oder Organ sich differenziren, zunächst reichlicheres Plasma um sich sammeln und sich gegenseitig individualisiren, also zu deutlichen Zellen werden, indess die Genitalanlage auf dem bisherigen, indifferenten Zustande noch weiter verharrt. Ja es scheint, dass sie in der ersten Zeit sogar noch stark zusammengedrängt und auf ein Minimum beschränkt wird; ihre Zeit kommt erst später.

Von den sich differenzirenden Zellen der jungen Cercarie wird ein unter Umständen recht beträchtlicher Theil zu *Drüsen* umgebildet, entweder zu den *Stacheldrüsen*, deren nach vorn verjüngte Enden als Ausführungsgänge zwischen den anderen Zellen durchbrechen, um in der Nähe des Stachels zu münden, oder zu den *Cystogenzellen*, welche die spätere Cyste liefern, oder zu *Hautdrüsen*, und in wenigen Fällen endlich zu den eigenthümlichen *Stäbchenzellen*, die von Leuckart[1]) und Thomas[2]) in den Cercarien des Leberegels, ferner von Sonsino[3]) bei der Cerc. distomatosa aus Cleopatra bulimoides gefunden wurden und noch bei anderen Formen vorkommen (so Cerc. tuberculata De Filippi, Cerc. fallax Dies.). In allen diesen Fällen schwillt der Zellenleib immer mehr an, und in demselben zeigen sich, erst klein, dann grösser werdend, Einlagerungen in Form von Körnchen oder Stäbchen, welche später den ganzen Zellenleib dicht anfüllen, den *central* liegen bleibenden Kern aber meist frei und sichtbar lassen. Die Zellen sind alle nach der Körperfläche zu spitz ausgezogen, und

1) Leuckart, Parasit. d. Menschen. 2. Aufl. 3. Lief. p. 280 f.

2) Thomas, The Live-History of the Liver-Fluke. Quarterly Journal etc. New. Ser. Vol. 23. 1883.

3) Sonsino, Studi sui parassiti dei molluschi di acqua dolce etc. Festschr. z. 70. Geburtst. Rud. Leuckart's. Leipzig 1892. p. 144.

wenn man auch ihre Ausführungsgänge selten mit voller Deutlichkeit zu erkennen vermag, so kann man sich dagegen um so leichter von dem thatsächlichen Austreten ihrer Secretmassen überzeugen. Besonders ist dies der Fall bei den Cystogenzellen, und es ist bemerkenswerth, dass, obgleich sie mehrfach nur auf der Bauchseite münden (Cerc. hepatici, C. tuberculata), doch die von ihnen gelieferten Secretkörnchen sich sofort um den ganzen Körper in gleichmässiger Schichte herumlagern. Was die Stäbchenzellen anbelangt, so bleiben sie zunächst noch an Ort und Stelle; später aber werden auch sie entleert, wobei, wie ich glaube, ihr geformter Inhalt zur Verdickung der zuerst gebildeten Cyste Verwendung findet (Cerc. tuberculata); genauere Beobachtungen hierüber stehen mir leider noch nicht zu Gebote[1]). Mit der Entleerung des Inhaltes beschliessen diese Drüsenzellen aber keineswegs ihr Dasein. Bei Cercaria tuberculata sowohl, wie bei C. echinata überzeugte ich mich zweifellos davon, dass sie erhalten bleiben und den um diese Zeit bereits gebildeten Blasenzellen gleich werden, mit diesen also wahrscheinlich auch die gleich näher zu besprechenden späteren Schicksale theilen dürften.

Neben den Drüsenzellen legen sich im Körper der Cercarien sehr frühe schon die Organe des Distomenleibes an; auf welche Weise dies geschieht, darüber habe ich vor Kurzem bereits einige Mittheilungen gemacht[2]). An denjenigen Stellen nun, wo weder Drüsenzellen noch Organe gebildet werden, beginnen sich zunächst einzelne der zelligen Elemente zu dem späteren *Parenchyme* umzuformen; sie nehmen dabei stark an Volumen zu, ihr Protoplasma erhält eine wässerige Beschaffenheit, indess der Kern seine centrale Lage unverändert beibehält. Ich habe bis jetzt noch keine Anhaltspunkte dafür gefunden, dass dieser Umformungsprocess als eine Secretion aufzufassen sei, wie etwa bei der Bildung des Fett- oder Chordagewebes. Bekanntlich treten

1) Die von Leuckart (Parasiten 2. Aufl. p. 283) früher ausgesprochene Vermuthung, die fraglichen Gebilde möchten Myoblasten darstellen, ist von demselben inzwischen selbst wieder aufgegeben worden. Sonsino (l. c. p. 144) bemerkt, dass die Stäbchenzellen bei der C. distomatosa an derselben Stelle liegen, wo bei erwachsenen Exemplaren der Darm sich vorfindet, ohne aber über etwaige Beziehungen beider sich zu äussern. Von den Cystogenzellen sind die Stäbchenzellen *durchaus* verschieden.

2) Ueber Amphist. subclav. etc. l. c.

hier im Inneren des Zellkörpers erst kleine Secrettröpfchen auf, die allmählich an Volum zunehmen und zuletzt die ganze Zelle mehr oder weniger anfüllen, indem sie dabei das ursprüngliche Plasma auf einen schmalen, den Kern enthaltenden äusseren Saum zusammendrängen. Die meistens centrale, nur selten excentrische, aber fast niemals ganz parietale Lage des Kernes bei den Blasenzellen, sowie die allezeit gleichartige Beschaffenheit des Inhaltes deuten mehr auf eine Metamorphose des Protoplasmas hin; am ehesten könnte man noch bei den oben erwähnten »Schwammzellen« an eine Secretion denken. Es entstehen durch diese Metamorphose schliesslich Gebilde von blasenartigem Aussehen mit fester Wand und flüssigem Inhalt, die bereits von Schwarze unter dem Namen Blasenzellen beschrieben, aber ihrer Bedeutung nach nicht völlig erkannt wurden. Schwarze schreibt ihnen mechanische Functionen zu und fasst sie als Druckerzeuger auf, welche aber bei dem aus gebildeten Thiere überflüssig werden sollen, da das letztere nur noch geringe mechanische Leistungen übe. Demnach scheint Schwarze die Blasenzellen für etwas anderes zu halten, als die späteren Parenchymzellen; das sind sie aber nicht; gerade die Parenchymzellen der erwachsenen Würmer besitzen meiner Ansicht nach die hauptsächliche mechanische Function, Träger der inneren Organe und Antagonisten der gesammten Musculatur zu sein; die Blasenzellen der Cercarien sind die ersten Anfänge der Bildung dieser späteren Grundsubstanz, sie verlieren also ihre Bedeutung nicht bei der Uebertragung und Reifung des Wurmes, sondern gewinnen sie im Gegentheil dann erst vollkommen. Die zwischen den Blasenzellen liegen bleibenden unveränderten Körperzellen der Cercarien sollen nach Schwarze später das bindegewebige Maschenwerk darstellen, welches die Lückenräume des Parenchyms zwischen sich nimmt.

Ich spreche, wie erwähnt, diese Blasenzellen als die ersten, sich bildenden Parenchymzellen des Trematodenkörpers an. Ihre Zahl ist, entsprechend den Grössenverhältnissen des Cercarienleibes, zunächst ganz allgemein noch eine geringe, sie wechselt aber ausserdem noch je nach der Menge des disponiblen Raumes. Cercarien, welche in ihrem Inneren sehr massenhafte Drüsen aufweisen, besitzen solche Blasenzellen fast gar nicht, oder diese fungiren, wenn man will, zunächst noch als Drüsen (so u. a. bei den echinostomen Cercarien); andere, bei denen

nur wenige Drüsen vorhanden sind, zeigen sie mit grosser Deutlichkeit (C. armata und ornata). Am typischsten aber entwickeln sie sich im Schwanze der Cercarien, also da, wo gar keine besonderen Organe ihre Entstehung nehmen; und hier zeigt sich auch ihre vollkommene Identität mit den Parenchymzellen des erwachsenen Wurmes.

Ursprünglich besteht der Cercarienschwanz aus einem rein zelligen Blastem wie der Körper, ist er doch nur eine sich abschnürende Partie desselben. Während seiner weiteren Entwickelung aber wird ein Theil seines Zellenmateriales zu der im Schwanze oft sehr starken Muskulatur (echinostome Cerc., C. tuberculata, macrocerca u. a.) aufgebraucht, der andere bildet sich zu Blasenzellen um, deren Wände dicht aneinanderschliessen und ein feines Netzwerk darstellen, in dessen Lückenräumen die kleinen Kerne stets deutlich nachweisbar bleiben. Vollkommen unveränderte, also *noch indifferente* Elemente *bleiben* im Schwanze der völlig erwachsenen Cercarie wohl *niemals zurück*, und schon deshalb scheint mir eine Umwandlung des abgeworfenen Cercarienschwanzes in eine neue Amme *ganz ausgeschlossen*. Diese alte, von K. E. v. Baer für Bucephalus als blosse Vermuthung geäusserte Ansicht[1]), die später von Diesing[2]) und Pagenstecher[3]) als bewiesene Thatsache verfochten wurde, ist in neuerer Zeit trotz des Widerspruchs Leuckart's[4]) von Ercolani[5]) wieder hervorgesucht und auf das Eifrigste vertheitigt worden. Am schwerwiegendsten könnten von Ercolani's neuerlichen Angaben betreffs dieser Propagationsweise die über die Cercaria cristata gemachten sein, und in der That bezeichnete Pagenstecher die letzteren als eine besondere Leistung[6]). Da nun meine Beobachtungen an dem genannten Thiere ein wesentlich anderes Resultat ergeben haben, als das Ercolani'sche, so mögen einige Mittheilungen darüber hier Platz finden.

---

1) K. E. v. Baer, Beitr. z. Kenntn. d. niederen Thiere etc. p. 583.

2) Diesing, Revision der Cercarien. Sitz.-Ber. d. Kais. Acad. XV. 1855.

3) Pagenstecher, Trematodenlarven u. Trematoden. Heidelb. 1857. — Ueber Cerc. cotylura. Verh. d. naturh.-med. Ver. Heidelb. II. 1862. p. 210.

4) Leuckart, Die menschl. Parasiten I. p. 512.

5) Ercolani, Dell' Adattamento della specie etc. Mem. dell' Acad. di Bologna Ser. IV. 2. 1881.

6) Pagenstecher, Zur Entwicklungsgesch. d. Tremat. Verh. d. Naturw.-Med. Ver. Heidelberg. N. F. III. 1886 p. 41.

Cercaria cristata, von De la Valette entdeckt[1]), später von De Filippi[2]) und Ercolani auf's Neue untersucht, sollte nach ihres Entdeckers Angaben eine Altrix filiformis, perlonga haben, während De Filippi sowohl, wie Ercolani Sporocysten als Erzeugerinnen der massenhaft vorhandenen Keimballen und Cercarien überhaupt nicht auffinden konnten. Während aber De Filippi vorsichtig sich weiterer Urtheile enthält, verwendet Ercolani diesen negativen Befund im Sinne seiner Theorie, indem er die Cercarienschwänze zu neuen Ammen heranwachsen lässt; da echte Sporocysten nicht zu finden waren, so schien allerdings das massenhafte Auftreten der Cercarien der Annahme einer solchen Propagationsweise günstig. Es liegen nun dieser Behauptung insofern auch positive Thatsachen zu Grunde, als man gerade bei der Cerc. cristata sehr oft eingeschnürten und zwischen den Einschnürungen kugelig aufgetriebenen Schwänzen begegnet (die so deformirten Schwänze fasst E. als Uebergangsbildungen zu neuen Ammen auf); aber diese Einschnürungen betreffen zunächst in ganz der gleichen Weise auch die Cercarien*leiber*, von denen meines Wissens noch Niemand eine Rückverwandlung in Keimschläuche behauptet hat, und sie sind weiter Erscheinungen des allmählichen Absterbens der ausserordentlich zarten Thiere, die den Aufenthalt ausserhalb ihrer Sporocyste kaum eine Viertelstunde vertragen können. Hierin liegt auch der, wie mir scheinen will, leicht ersichtliche Grund für die von Ercolani so stark betonte Thatsache, dass man in manchen Schneckenindividuen nur Cercarien mit einer »coda fertile«, in anderen nur solche mit der »coda sterile« findet. Wenn die Schnecke nur eine Stunde todt gelegen hat, bevor sie zur Untersuchung kommt, noch viel auffallender aber, wenn zu dem als Untersuchungsflüssigkeit dienenden Schneckenblute nur eine Kleinigkeit Wasser hinzutritt (z. B. wenn die Schnecke vor der Untersuchung nicht abgetrocknet wird), machen sich an den *unreifen* Cercarien die genannten — bei anderen Formen übrigens genau ebenso auftretenden — Veränderungen geltend; sofort nach dem Oeffnen der Schnecke und in reinem Schneckenblute untersuchte Parasiten zeigten sie mir niemals.

Die wirklichen Ammen der C. cristata haben weder De

1) De la Valette, Symbolae ad Trem. evol. hist. p. 28. Taf. II. Fig. K.
2) De Fillippi, IIIe Mémoire etc. l. c.

Filippi, noch Erolani und augenscheinlich auch De la Valette nicht gesehen (vorausgesetzt, dass nicht auch hier verschiedene, schwer trennbare Arten vorkommen, was mir sehr wahrscheinlich ist), denn sie sind nicht, wie der letztere angiebt, lang und fadenförmig, sondern gerade im Gegentheil, kurz, sackförmig, durchschnittlich etwa 0,2 mm lang und 0,1 mm breit; sie liegen ausserdem innerhalb der Lobuli der Leber und verdrängen dabei deren Zellen so vollständig, dass man ihre Wandungen für die der Leberlobuli hält, in welch letzteren dann ihre Brut direct zu liegen scheint. Aus diesem Grunde sind die Sporocysten auch verhältnissmässig schwer frei zu präpariren und es kann bei oberflächlicher Beobachtung leicht genug kommen, dass man sie völlig übersieht. C. cristata *hat* also eine *echte* Sporocyste und die Brut dieser Sporocyste entsteht auch und entwickelt sich, soweit meine Beobachtungen gegenwärtig reichen, ganz auf die sonst übliche Weise, obgleich der sehr eigenthümliche Wurm, dessen Jugendform sie ist, weder ein Monostomum noch ein Distomum darstellt. Damit ist, glaube ich, der Beweis geliefert, dass zunächst die C. cristata eine besondere Reproductionsweise *nicht* nöthig hat, und weiter, dass die von Ercolani aufgestellten Behauptungen über die Verwandlung von Cercarienschwänzen in neue Ammen, auch was die C. cristata anbelangt, keineswegs zutreffend sind; damit fällt natürlich auch die Bedeutung, die ihnen Pagenstecher als Stützen seiner Hypothese zugeschrieben hat[1]).

---

1) Nicht anders verhält es sich mit der grösseren Mehrzahl der übrigen Beobachtungen und Schlüsse Ercolani's, was ausser von Pagenstecher besonders von Leuckart und Schwarze gelegentlich hervorgehoben wird. Ueber einen der »neuen« Funde Ercolani's ist mir zufällig, glaube ich, ein Licht aufgegangen. E. behauptet, ausser bei Sporocysten auch bei Redien eine Vermehrung durch Theilung beobachtet zu haben und er giebt hiervon auch eine auf Cerc. echinata (hierunter sind *alle* unsere echinostomen Cercarien, kurz und bündig, zusammengewörfen worden!) bezügliche Abbildung. So viele Hunderte dieser Redien aller Arten ich nun auch zu Gesichte bekommen, nie ist mir ein *sicheres* Anzeichen einer spontanen Theilung aufgestossen, wohl aber sieht man bei den Echinatacercarien sehr oft, wie in den älteren Redien eine der eingeschlossenen reifen Cercarien, offenbar im Drange nach der Freiheit, in das äusserste *Hinterende* der Mutter sich hineinzwängt. Dann scheint auch dieses einen Saugnapf zu besitzen; aus den in den Körperwandungen reichlich vorhandenen Pigmentansansammlungen kann man sich leicht einen anhängenden Darm construiren (na-

Während im Cercarienschwanze also gewöhnlich alle zelligen Elemente einer Metamorphose in Blasenzellen unterliegen, ist dies im Körper der Cercarien nicht der Fall. Hier bleiben im gesammten Umkreise des Leibes meist dicht unter der Körperwand, dann aber noch in der Nachbarschaft der sich anlegenden Organe, immer unveränderte Zellen, entweder in continuirlicher Lage, oder aber in einzelne Gruppen vereinigt, erhalten, und diese Zellencomplexe sind für das *Wachsthum* der Würmer von höchster Bedeutung. Der Körper der Cercarien ist vielfach ausserordentlich klein im Verhältniss zur Grösse des erwachsenen Thieres: diese Volumzunahme beruht einmal auf einer mitunter sehr auffälligen *Vergrösserung* der histologischen Elemente während des Ueberganges zum definitiven Zustand, andererseits und wohl zum grösseren Theile aber auf einer *Vermehrung* dieser Elemente. Die Organe des Körpers liefern sich das neue Material selbst durch Theilung und Vermehrung ihrer Zellen, die alle wenigstens eine Zeit lang fortpflanzungsfähig bleiben. Dasselbe ist aber bei den blasig entarteten Zellen des Parenchyms nicht mehr möglich — und so sehen wir denn, wie, um auch hier einen Zuwachs zu ermöglichen, im Parenchyme immer eine Zahl von *nicht veränderten Zellen* erhalten bleibt, welche sich theilen und so das Material für eine Vermehrung der Parenchymelemente und damit für ein Wachsthum des Körpers abgeben können.

Ursprünglich lagen diese unverändert und indifferent gebliebenen Zellen nicht nur in der Nähe der Körperwand, sondern auch in der Umgebung der wachsenden Organe, besonders der Geschlechtsorgane, und sie sind hier auch mehrfach von Larven und encystirten Würmern beschrieben worden. Sie fallen aber meist schon frühzeitig einer Metamorphose anheim, und so kommt es, dass bald nur noch die in der Nähe der Körperfläche gelegenen vorhanden bleiben. Uebrigens sind es nicht nur Blasenzellen, welche aus ihnen hervorgehen; eine Anzahl verwandelt sich augenscheinlich in Muskelfasern (Parenchymmuskeln), andere zu jenen sogenannten sternförmigen Zellen,

---

mentlich wo dieser nicht sehr voluminös ist), und trägt vielleicht gar die Redie zufällig irgendwo am Leibe eine Einschnürung, dann ist ihre Theilung bewiesen — wenn man sich mit einem solchen »Beweise« zufrieden giebt.

welche den Verschluss der Flimmertrichter bilden. Die feinsten Excretionscanäle sind erneuten Beobachtungen nach Lückenräume *zwischen* den Parenchymzellen, die sich an ihrem Ende etwas verbreitern, um hier den wimpernden Fortsatz der Terminalzelle in sich aufzunehmen; auch diese Terminalzelle ist eine Parenchymzelle, die anstatt blasig zu entarten, den flimmernden Fortsatz gebildet hat. Endlich liess man meines Wissens bis jetzt ganz allgemein auch die *Dotterstöcke* aus Parenchymzellen hervorgehen, wenigstens spricht sich Leuckart in solchem Sinne aus [1]). Diese Annahme beruht jedoch auf einem Irrthume. Bei sehr jungen Dist. perlatum, und vollständiger noch bei Dist. endolobum konnte ich beobachten, wie im Anfange der Geschlechtsentwickelung aus dem Centrum der weiblichen Geschlechtsanlage hervor, nach jeder Seite ein Zellenstrang auswächst. Dieser gabelt sich später in der Nähe der Körperwand in einen nach vorn und einen nach hinten laufenden Ast, und jeder dieser Aeste bekommt noch später kleine seitliche Knospen, die sich mit zahlreicheren Zellen füllen. Ich werde an einem anderen Orte noch näher hierauf zurückkommen; zunächst beweisen diese Thatsachen aber, dass die Dotterstöcke nicht dem Parenchyme angehören, sondern von der Geschlechtsanlage aus ihren Ursprung nehmen.

Durch die stetig fortschreitende Umbildung der indifferenten Elemente in fixe Gewebszellen wird nun aber das subcutane Lager derselben durchaus nicht erschöpft; die Beobachtung lehrt vielmehr, dass es im gesammten Umkreise des Körpers bis in das Alter der Würmer bestehen bleibt; es repräsentirt meiner Ansicht nach das *Material*, *aus welchem durch Vermehrung und Bildung neuer Elemente*, welche sich später in Parenchymzellen umwandeln, *eine Vergrösserung des Körpers ermöglicht wird;* ein Gebilde also, welches der Cambiumschicht des Pflanzenkörpers anatomisch und physiologisch vollkommen entspricht.

Bisher sind diese Zellenlager, die man bei allen daraufhin untersuchten Trematoden aufgefunden hat, wohl *meist* als *Hautdrüsen* gedeutet worden, trotzdem die Auffindung von Ausführungsgängen mit Sicherheit nie gelingen wollte. Ich sage hier nicht ohne Absicht *meist*, denn es war nicht allgemein der Fall. Während Leuckart sich anfangs ebenfalls dieser Auffassung an-

1) Leuckart, Parasiten etc. I. Bd. 4. Lief. p. 165.

geschlossen hatte, kommt er bei erneuter Untersuchung des Leberegels und besonders bei der des Lungenegels, Dist. pulmonale, zu Resultaten, die, wenn auch nur als Vermuthungen geäussert, auf dasselbe hinauslaufen, was mir als auf Grund vergleichender Beobachtungen als zweifellos erscheint. Leuckart erklärt unter Hinweis auf die Parenchymzellen der Cercarien die fraglichen Zellen zunächst für Gebilde, die ihre Entwickelungsgeschichte noch nicht abgeschlossen haben und wird in dieser Ansicht bestärkt durch die Beobachtung, dass die jüngsten der hüllenlosen (i. e. indifferenten) »Parenchymzellen mit den distalen Segmenten der scheinbaren Hautdrüsen öfters so innig verbunden sind, dass die Vermuthung nahe liegt, es möchten dieselben durch Vergrösserung und körnige Umbildung des Protoplasmas *direct aus den Zellen* des Ballens *hervorgehen*«[1]). Ich hatte, schon ehe ich diesen Passus fand, mir mein Urtheil über die fraglichen Elemente gebildet und freue mich jetzt umsomehr, meine Ansicht gleich von so competenter Seite her unterstützt zu sehen.

Dies ist meines Wissens aber die einzige Stimme, die sich bis jetzt bestimmt *gegen* die Drüsennatur der in Rede stehenden Gebilde richtet; hingegen sind dieselben von mancher anderen Seite sehr unbestimmt und wohl nur deswegen als Drüsen aufgefasst worden, weil eine andere, angemessenere Deutung vor der Hand sich noch nicht finden liess. *Für* ihre secretorische Function hat sich in jüngster Zeit mit Entschiedenheit Brandes ausgesprochen[2]) und sie ganz allgemein für die Bildnerinnen der »Cuticula« der Würmer in Anspruch genommen. Wenn nun Brandes' Angaben auch meist auf Formen Bezug haben, die mir nicht zu Gebote stehen, über die ich also kein definitives Urtheil habe, so kann ich mich doch der Vermuthung nicht entschlagen, dass mein verehrter College auch die hier in Rede stehenden Zellen mit für Hautdrüsen genommen hat, wie bis jetzt eben fast allgemein geschehen. Es ist das allerdings um so leichter möglich, als die fraglichen Zellen mitunter in ganz auffälliger Weise nach der Körperwand hin in Fortsätze ausgezogen *erscheinen*, was mir namentlich bei Dist. echinatum öfters vorkam;

1) Leuckart, Paras. d. Menschen. 2. Aufl. 4. Lief. p. 188 u. 414.

2) Brandes, Z. feineren Bau d. Trematoden. Zeitschr. f. wiss. Zool. LIII. 1891. — Mündlicher Mittheilung zufolge ist übrigens Brandes neuerdings selbst von dieser Auffassung zurückgekommen.

bei genauerem Zusehen entpuppten sich aber alle die vermeintlichen Ausführungsgänge als feine Spalträume zwischen Parenchymzellen, in denen theilweise Fasern nach der Haut zogen und in welche unsere »Drüsen« mit dem einen Ende eingekeilt lagen. Das Protoplasma dieser »Drüsen« zeigt ausserdem nirgends den für diese Gebilde sonst so charakteristischen Habitus, und, was die Hauptsache ist, jene Zellen sehen ganz anders aus, als die wirklichen, unzweifelhaften, augenscheinlich stets *einzelligen* Hautdrüsen, die man bei allen (mir bekannten) Würmern namentlich in der Umgebung des Mundes und am Halse auffinden kann. Sie sind besonders während des Lebens wegen ihres stark lichtbrechenden Inhaltes in die Augen fallend und *ihre* Ausführungsgänge lassen sich auch deutlich und ohne Mühe bis an die *Aussen*fläche der Cuticula verfolgen. Diese echten Hautdrüsen sind aber, soweit ich bis jetzt gesehen habe, niemals sehr zahlreich, und doch haben die betreffenden Würmer eine theilweise sehr starke Cuticula, zu deren Absonderung jene spärlichen Absonderungsorgane absolut nicht genügen könnten. Ein *Absonderungsproduct* ist aber meinen Beobachtungen nach die Cuticula zweifellos, wie aus ihrem ersten Entstehen und aus ihrem ganzen übrigen Verhalten hervorgeht. Ich besitze Präparate (von C. echinata), welche sogar für eine wenigstens *theilweise* Betheiligung der Hautdrüsen der *Cercarie* an ihrer Bildung sprechen; es breitet sich nämlich das gefärbte Secret dieser Drüsen auf der Bauchseite zu einer ebenfalls gefärbten Hülle aus, nur ist unter dieser Hülle eine weniger gefärbte Cuticula mit Stacheln bereits vorhanden. Zunächst enthalte ich mich noch eines definitiven Urtheils über diese Verhältnisse; doch stehe ich vollkommen auf der Seite von Brandes, insoweit er die ältere Leuckart'sche Ansicht von der *cuticularen Natur* der Haut vertheidigt. Denn *ganz ausgeschlossen* erscheint mir dem anatomischen und entwickelungsgeschichtlichen Verhalten nach eine Auffassung derselben als metamorphosirtes Epithel, als »Ektoderm«! Wenn auch die Thatsache, dass alle anderen Thiere ein solches haben, den Gedanken nahe legen mag, bei unseren Würmern ebenfalls danach zu *suchen*, so kann sie doch keineswegs als Motivirung dafür gelten, den Thieren ein solches anzu*construiren*. Für eine Construction aber halte ich es, wenn man ohne irgend welche positiven Beweise entweder das »Ektoderm« abgeworfen sein, und die Basalmembran dieses problematischen

Epithels zur Cuticula avanciren lässt (Schneider[1]), Minot[2])), oder wenn man, nur gestützt auf ganz vereinzelte Funde von »Kernresten« in der Haut (denen aber eine weit grössere Zahl vollkommen negativer Resultate gegenüber steht), und trotzdem kein Mensch ein sicheres Anzeichen dieses Ueberganges gesehen hat, von metamorphosirtem Epithel redet (Kerbert[3]), Ziegler[4]), Biehringer[5]) und in neuester Zeit Monticelli[6]), der sich bis zur Aufstellung eines »ectoderma sinciziale« versteigt). Wie die Angabe Kerbert's zu Stande gekommen sein mag, darüber hat Poirier eine mir sehr plausibel erscheinende Vermuthung aufgestellt[7]); die Schlüsse Biehringer's entbehren jeder Begründung und, wie wir gesehen haben, auch der thatsächlichen Grundlage, und ebensowenig sind Ziegler's und Monticelli's Befunde von allgemeinerer Beweiskraft. Am schwerwiegendsten in dieser Hinsicht dürften die Angaben von Braun sein[8]), der bei verschiedenen Ektoparasiten an bestimmten Körperstellen *deutliche* Epithelzellen, und bei Monostomum mutabile wenigstens zahlreiche Kerne in der Haut auffand[9]). So interessant und beachtenswerth diese Beobachtungen sicher auch sind, so geben auch sie doch keine endgültigen Beweise ab, da sie einmal nur locale Bildungen sind, und auf ihre genetische Beziehung zu der benachbarten Cuticula keinerlei Licht werfen. Ich verweise zur Bekräftigung dieses Einwurfes auf die Thatsache, dass z. B. die Cuticula des Oesophagus und das Epithel des Darmes, obwohl beide direct in einander übergehen, doch *nachweisbar* durchaus verschiedenen Ursprung haben[10]). In der That äussert sich auch Braun in der Frage nur sehr zurückhaltend. Grossen Werth legen die Verfechter

1) Schneider, A., Untersuch. an Plathelminthen. 14. Ber. d. Oberhess. Gesellsch. etc. 1873.

2) Minot, On Distom. crassicolle etc. Mem. Bost. Soc. Nat. Hist. III. 1878.

3) Kerbert, l. c.

4) Ziegler, Bucephalus u. Gasterostom. etc.

5) Biehringer, l. c. p. 6.

6) Monticelli, Cotylogaster Michaelis etc. Festschr. z. 70. Geburtst. Rud. Leuckart's. 1892. p. 189 u. 193.

7) Poirier, Contrib. à l'hist. des Trématodes. Arch. de Zool. exp. IIe sér. III. 1885. p. 491.

8) Braun, Einige Bem. üb. d. Körperbed. etc. Centralbl. f. Bakt. u. Parasitenk. VII. 1890 p. 597.

9) Braun, Bronn's Classen u. Ordn. etc. IV. Bd. Vermes p. 590.

10) Looss, Amphist. subclavat. etc. l. c. p. 464.

von der Auffassung der Trematodenhaut als eines metamorphosirten Epitheles weiter auf das Verhalten der in noch mancher anderen Hinsicht abweichenden Gattung Temnocephala. Nach den übereinstimmenden Angaben ihrer Untersucher (Haswell, Monticelli, Braun, Brandes) setzt sich die Haut hier aus drei mehr oder weniger scharf gesonderten Schichten zusammen, von denen die mittlere ausser Porencanälen oder Vacuolen deutliche Kerne enthält. Dass aber allein mit dem Auffinden dieser Kerne unter der äusseren kernlosen Schicht der Haut der Nachweis von der epithelialen oder gar epidermoidalen Natur der ganzen Haut geliefert sein soll, kann ich nicht zugeben; vor allem aber nicht, dass auf Grund *eines* Befundes auch die Körperbedeckung aller übrigen Trematoden zu einem metamorphosirten Epithel gestempelt werden soll (vergl. hierzu die Bemerkungen von Brandes zum feineren Bau etc. l. c. p. 24 f.).

Ich fasse, wie gesagt, die Trematodenhaut als ein Absonderungsproduct auf. Auf die Frage nun, von welchem Theile des Körpers sie abgesondert wird, vermag ich freilich zunächst noch keine vollkommen objective Antwort zu geben; meine subjective Ueberzeugung aber ist es, dass ihre Bildung in der Hauptsache *von dem Körperparenchym ausgeht.* Man kann sich jedenfalls vorstellen, dass bei der Umwandlung der indifferenten in die blasig aufgetriebenen Parenchymzellen ein Stoff gebildet wird, der, äusserlich unsichtbar, an der Oberfläche angelangt in die zähflüssige Cuticularsubstanz sich verdichtet; liegen ja doch die sich umbildenden Parenchymzellen immer in der Nähe der Körperfläche. Damit stimmt es ganz gut, dass man beim Absterben der Thiere (auch bei längerem Liegen unter dem Drucke des Deckgläschens bei der Untersuchung) zahlreiche Blasen einer vollkommen hyalinen Substanz *durch* die Cuticula *hindurchtreten* und auch diese selbst sich allmählich in ein Convolut glänzender Kugeln und Ballen auflösen sieht; damit stimmt es ferner sehr wohl, dass die Cuticula mit dem Alter der Thiere durchschnittlich immer dicker wird, ohne aber an demselben Individuum immer und überall dieselbe Dicke zu haben, und damit stimmt es endlich auch, dass das erste Auftreten der Cuticula ungefähr mit der ersten Differenzirung der inneren Organe des Cercarienkörpers zusammenfällt. Dass die Haut ein, wenn auch zähes, doch weiches und flüssiges Product ist, wird bewiesen dadurch, dass die Inhaltsmassen der Cystogendrüsen bei den Cercarien ohne

weiteres und ohne nachweisbare Oeffnungen durch sie hindurchtreten [1]) (C. tuberculata, diplocotylea u. a.). Dasselbe thun, wie erwähnt, bei Druck Tröpfchen des hyalinen Parenchymzelleninhaltes; ob diese Tröpfchen, die auch beim allmählichen Absterben der Würmer austreten, und die bei nicht *ganz frisch* conservirten Würmern in *der Haut fixirt* werden, nicht gelegentlich als die ominösen »Kernreste« figurirt haben mögen, will ich hier dahingestellt sein lassen; beim Betrachten der Kerbert'schen Abbildungen aber (bes. Fig. 3 Taf. 26 l. c.) möchte ich fast darauf wetten [2]). Woher die Stacheln entstehen, ist mir noch völlig dunkel. Ohne allen Zweifel bleibt die Genese und die Natur dieser Körperhaut immer noch eine offene Frage, eine Frage aber, deren Lösung *nur* auf dem Wege genauester *Beobachtung*, besonders der Entwicklung, gefunden werden kann!

Leipzig, 15. December 1892.

---

1) Aus diesem Grunde stehe ich auch den verschiedenen Angaben über »Porencanäle«, welche die Haut durchsetzen sollen, sehr skeptisch gegenüber. Vor allem habe ich solche am *frischen, lebendigen* Object nie sicher beobachtet; was man aber auf Schnitten sieht, das ist in Bezug auf seinen Werth als *Normales* so lange in Zweifel zu ziehen, als man die Geschichte des betr. Präparates nicht *genau* kennt. Von der Cuticula des Dist. hepaticum besitze ich z. B. Schnittpräparate, wo sie einmal als homogene Schicht erscheint, andere, wo in ihr leichte Quersteifungen (Porencanäle) auftreten, so wie sie u. a. Ziegler zeichnet, und endlich solche, wo sie eher das Aussehen schlecht erhaltener Flimmerhaare, denn das einer »Haut« hat. Diese letzteren Präparate stammen von Würmern, die eine kurze Zeit in Wasser gelegen hatten. Dieselbe Erscheinung zeigt der ausserordentlich dicke »Cuticularsaum« im Darme des Amphist. subclavatum: bei frisch conservirten Thieren homogen oder höchstens fein gestreift, zerfällt derselbe bei längerem Liegen des Wurmes in Wasser oder in dünnem Alkohol in eine Masse, die todt und bewegungslos, wie sie im Präparat dann vorliegt, viel eher an lange und verfilzte Haare (man würde sie natürlich als Flimmerhaare *deuten*), als an einen im Leben homogenen und gleichartigen Saum erinnert. Und so wie hier, wirkt sicherlich auch anderswo die Zeit, die zwischen der Conservirung und der Entfernung des Wurmes aus seinen natürlichen Existenzbedingungen liegt, verändernd auf dessen Bau ein.

2) Nur beiläufig verweise ich hier auf Juël's Ausspruch, wie er von Braun in Bronn's Classen und Ordnungen etc. (l. c. p. 590) referirt wird. Juël findet in der Haut des Schwanzes von Apoblema-Arten kleine Hohlräume und grössere rundliche Blasen, die er aber selbst wegen ihrer wechselnden Grösse »nicht als Kernreste hinzustellen« wagt.

M. Krause, *Ueber Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind.*

Im Folgenden sollen Differentialgleichungen dritter Ordnung untersucht werden, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen, deren Integrale zwar eindeutig, aber nicht mehr sämmtlich doppeltperiodisch sind. Es bildet diese Notiz eine Ergänzung zu der Notiz vom 7. December 1891 in diesen Berichten. Es soll zunächst ein specielles Beispiel genommen werden, in welchem die Ausnahmefälle ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden können, dann aber soll ein allgemeiner Fall behandelt werden, in dem es wesentlich darauf ankommt, die Form der Integrale in möglichst einfacher Weise festzustellen. Der allgemeinere Fall umfasst nicht alle in Betracht kommenden Differentialgleichungen dritter Ordnung, indessen können die fehlenden Fälle ohne jede Schwierigkeit nach derselben Methode behandelt werden.

Während des Verlaufes der Untersuchungen des Verfassers über Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten ist im 15. Bande der Acta mathematica eine Arbeit von Herrn Stenberg erschienen, die die Ausnahmefälle für *alle* Picard'schen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung näher untersucht. Mit dieser Arbeit berührt sich die folgende in einigen Punkten, in anderen weicht sie von ihr ab.

§ 1.

Specielle Untersuchung der Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Integrale einen und denselben einfachen Unendlichkeitspunkt haben.

Die allgemeine Untersuchung des in der Ueberschrift charakterisirten Falles ist in § 2 der citirten Notiz enthalten. Wir

wollen uns auf den Fall beschränken, dass die Werthe von λ einander gleich sind, dann ergab sich die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^3\varphi(v)}{dw^3} + (c_1 - 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w),$$

während die Gleichungen bestehen:

$$c_4 = 3\lambda, \quad c_1 = -3\lambda^2 + 1 + k^2,$$
$$k^2 \cdot u = -3k^2 \cdot \lambda \cdot x + A,$$
$$A = c_3 + 2\lambda^3 + 2(1 + k^2)\lambda$$

und die Integrale im Allgemeinen die Form haben:

$$y = \frac{\vartheta_1(v + \nu_\varepsilon)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_\varepsilon)}{\vartheta_0(\nu_\varepsilon)} v + \lambda \cdot w}, \quad \varepsilon = 1, 2, 3.$$

Es sollen jetzt die Ausnahmefälle betrachtet werden. In diesen muss ein Integral jedenfalls die Form haben:

$$(2) \qquad y_1 = \frac{\vartheta_1(v + \nu_1)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)} v + \lambda \cdot w}.$$

Schreiben wir nun unsere Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{dw^3} + Q\frac{dy}{dw} + Ry = 0$$

und setzen:

$$(3) \qquad y = y_1 \int z\, dw,$$

so ergiebt sich für z die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(4) \qquad \frac{d^2z}{dw^2} + 3\frac{d\log y_1}{dw}\frac{dz}{dw} + \left(3\frac{d^2y_1}{dw^2}\frac{1}{y_1} + Q\right)z = 0.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d\log y_1}{dw} = \lambda + \frac{\mathrm{cn}\,\omega_1 \cdot \mathrm{dn}\,\omega_1}{\mathrm{sn}\,\omega_1} - \frac{\mathrm{sn}\, w}{\mathrm{sn}\,\omega_1 \cdot \mathrm{sn}(w + \omega_1)},$$

und ähnlich einfach ist $\frac{d^2y_1}{dw^2}$ zu berechnen. Setzen wir diese

Werthe in unsere Differentialgleichung ein, so nimmt sie die Form an:

$$\frac{d^2z}{dw^2} + P_1 \frac{dz}{dw} + Q_1 \cdot z = 0 \,, \tag{5}$$

$$P_1 = 3\left(\lambda + \frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} - \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_1)}\right),$$

$$Q_1 = 3k^2 \operatorname{sn}^2 w - 2 - 2k^2 + 3k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \omega_1 + 6\lambda\left(\frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} - \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_1)}\right).$$

Die Coefficienten dieser Differentialgleichung besitzen die Unendlichkeitspunkte $w = -\omega_1$ und $w = iK'$.

Der zweite ist kein Unendlichkeitspunkt der Integrale, wohl aber der erste und zwar ist derselbe von der Ordnungszahl zwei. Unter solchen Umständen setzen wir:

$$z = \frac{\vartheta_0(v)^2}{\vartheta_1(v+\omega_1)^2}\, e^{2\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v} \cdot z_1 \,, \tag{6}$$

und erhalten für z_1 die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2z_1}{dw^2} + \left(3\lambda - \frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} + \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_1)}\right)\frac{dz_1}{dw} = k^2 z_1 (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 \omega_1) \,. \tag{7}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich unmittelbar auf eine früher behandelte zurückführen. In der That, wir hatten die Gleichung gefunden (siehe diese Berichte, Sitzung vom 13. Juni 1892):

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + (c_1 + k^2 \cdot \operatorname{sn}\alpha \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha))\frac{d\varphi(v)}{dw} = \varphi(v)(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}(w+\alpha) + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w) \,,$$

deren Integrale im Allgemeinen die Form haben:

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_1(v+\nu')}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v} \,.$$

Setzen wir $\alpha = \omega_1 + iK'$, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{d^2\varphi(v)}{dw^2} + \left(c_1 + \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_1)}\right)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\left(c_3 + \frac{c_4 \cdot k \cdot \operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}(w+\omega_1)} + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w\right).$$

Dabei bestehen die Beziehungen:

$$k \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot c_4 = -\frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} - c_1 ,$$
$$c_3 = -c_4 \cdot k^2 \cdot \operatorname{cn}\omega_1 \operatorname{dn}\omega_1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 .$$

Setzen wir:

$$\varphi(v) = \varphi_1(v)\, e^{lw} ,$$

und bestimmen l aus der Gleichung:

$$l = k \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot c_4$$

oder was dasselbe sagt aus der Gleichung:

$$c_4 = -\frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} - l ,$$

so leistet $\varphi_1(v)$ der Gleichung Genüge:

$$\frac{d^2\varphi_1(v)}{dw^2} + \left(l - \frac{\operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}\omega_1} + \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_1)}\right)\frac{d\varphi_1(v)}{dw}$$
$$= k^2 \cdot \varphi_1(v)\,(\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2\omega_1) .$$

Das ist aber unsere Gleichung für z_1, wenn an Stelle von l: 3λ gesetzt wird. Mithin erhalten wir die beiden Integrale:

$$(8)\qquad z_1'' = \frac{\vartheta_0(v+\nu_1'')}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_1'(\nu_1'')}{\vartheta_1(\nu_1'')}v - 3\lambda \cdot w} ,$$
$$z_1''' = \frac{\vartheta_0(v+\nu_1''')}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_1'(\nu_1''')}{\vartheta_1(\nu_1''')}v - 3\lambda \cdot w} ,$$

wobei die beiden Grössen ν_1'' und ν_1''' aus der Gleichung bestimmt sind:

$$c_1 \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}\omega_1^{(\varepsilon)} = \operatorname{sn}(\omega_1 - \omega_1^{(\varepsilon)}) , \quad \varepsilon = 2, 3 .$$

Es ist dieses der allgemeine Fall für die Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es fragt sich, ob in ihm eins oder zwei der Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung aufhören können doppeltperiodisch zu sein.

Die beiden noch fehlenden Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung lauten:

$$(9)\qquad \begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{\vartheta_0(v)^2}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2}\, e^{2\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v} \cdot z_1'' \cdot dw\,, \\ y_3 &= y_1 \int \frac{\vartheta_0(v)^2}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2}\, e^{2\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v} \cdot z_1''' \cdot dw\,. \end{aligned}$$

Soll nun eins dieser Integrale z. B. y_2 aufhören doppeltperiodisch zu sein, so muss die Function:

$$\frac{\vartheta_0(v)^2}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2}\, e^{2\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v} \cdot z_1''$$

eine doppeltperiodische Function erster Art sein. Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen hierfür lauten:

$$-3\lambda \cdot 2K + \frac{2\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)} - \frac{\vartheta_1'(\nu_1'')}{\vartheta_1(\nu_1'')} = 2m\pi i\,,$$

$$2\nu_1 - \nu_1'' = m \cdot \tau + m_1\,,$$

wobei m und m_1 beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Setzen wir den Werth von ν_1'' aus der letzten Gleichung in die vorletzte ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Formel:

$$\frac{d\log\vartheta_0(\nu_1)}{d\omega_1} + \frac{d\log\vartheta_0(\nu_1'')}{d\omega_1''} = \frac{d\log\vartheta_0(\nu)}{d\omega} + k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{sn}\omega_1'' \cdot \operatorname{sn}\omega\,,$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_1''\,,$$

die Gleichung:

$$\begin{aligned} 3\lambda &= -\frac{\operatorname{cn}2\omega_1 \cdot \operatorname{dn}2\omega_1}{\operatorname{sn}2\omega_1} + k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 \cdot \operatorname{sn}2\omega_1 \\ &= -\frac{\operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1}{\operatorname{sn}^2\omega_1} + \frac{1}{\operatorname{sn}2\omega_1} \end{aligned}$$

oder auch:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &6\lambda \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1 \\ &= 1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 - 2\left(1 - (1+k^2)\operatorname{sn}^2\omega_1 + k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1\right). \end{aligned}$$

Es ergiebt sich also für ω_1 eine Bedingungsgleichung, die zu den früheren hinzukommt. Unter diesen greifen wir die Gleichung heraus:

$$k^2 \cdot \operatorname{sn}\omega_1 \cdot \operatorname{cn}\omega_1 \cdot \operatorname{dn}\omega_1 = -3\lambda \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 + A ,$$

dann ergiebt sich für $\operatorname{sn}^2\omega_1$ die quadratische Gleichung:

$$-3k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 + 2k^2(1 + k^2 + 9\lambda^2)\operatorname{sn}^2\omega_1 - k^2 - 6A \cdot \lambda = 0 .$$

Nun ergiebt sich aber andrerseits durch Quadriren für $\operatorname{sn}^2\omega_1$ die kubische Gleichung:

$$k^6 \cdot \operatorname{sn}^6\omega_1 - (1 + k^2 + 9\lambda^2)k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 + (k^2 + 6\lambda A)k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 = A^2 .$$

Die hinreichende und nothwendige Bedingung für das Zusammenbestehen dieser beiden Gleichungen besteht aber in dem Verschwinden der Discriminante der letzten. Setzen wir wie vorhin an Stelle von $3\lambda : l$, so lautet diese Discriminante:

$$\text{(11 a)} \qquad \sum_0^4 d_n \cdot A^n = 0$$

$$d_4 = -27 ,$$

$$d_3 = 4l(q + qk^2 + l^2),$$

$$d_2 = 2(-2 + k^2 + 3k^4 - (4 + 23k^2 + 4k^4)l^2 - (2 + 2k^2)l^4) ,$$

$$d_1 = 4k^2 \cdot l(-6k^2 + (1 + k^2 + l^2)^2) ,$$

$$d_0 = -4k^6 + k^4(1 + k^2 + l^2)^2 .$$

Wir können dieselbe auch schreiben:

$$\text{(11 b)} \quad 27A^4 - (k^2 + 2l \cdot A)^2 L^2 - 18A^2(k^2 + 2l \cdot A)L + 4A^2 \cdot L^3 + 4(k^2 + 2l \cdot A)^3 = 0 ,$$

$$L = 1 + k^2 + l^2 .$$

Die Integrale y_2 und y_3 sind dann leicht zu bestimmen, wenn y_1 gegeben ist.

In der That, es ist:

$$\omega_1'' = 2\omega_1 ,$$

und ebenso folgt:

$$\omega_1''' = -\omega_1 + iK' ,$$

von Perioden abgesehen.

Mithin wird:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\vartheta_0(v) \cdot \vartheta_0(v+2\nu_1)}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2}\, dw\,,$$

$$y_3 = y_1 \int \frac{\vartheta_0(v) \cdot \vartheta_1(v-\nu_1)}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2}\, e^{3\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v - 3\lambda \cdot w}\, dw\,.$$

Die Function innerhalb des zweiten Integrales ist eine periodische Function zweiter Art. Dieselbe kann nach bekannten Regeln dargestellt werden. Dasselbe gilt in Bezug auf die Entwickelung für die Function innerhalb des ersten Integralzeichens. Wir erhalten die Resultate:

$$y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2(w+\omega_1)}\right) dw\,,$$

(12)

$$y_3 = \frac{\vartheta_1(v+\nu_3)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_3)}{\vartheta_0(\nu_3)}v + \lambda \cdot w}$$

$$\nu_3 = -2\nu_1 + \frac{\tau}{2}\,.$$

Es bleibt also nur noch übrig ω_1 zu bestimmen. $\mathrm{sn}^2\omega_1$ ist die gemeinsame Wurzel einer kubischen und einer quadratischen Gleichung. Als Werth derselben ergiebt sich:

(13)
$$k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 = \frac{9A^2 - (k^2 + 2l \cdot A)L}{6k^2 + 12l \cdot A - 2L^2}\,,$$

wobei A aus der angegebenen Gleichung vierten Grades bestimmt ist.

Es kann die Auflösung der biquadratischen Gleichung für A ersetzt werden durch die Auflösung einer biquadratischen Gleichung für $\mathrm{sn}^2\omega_1$, die unmittelbar aus der Gleichung:

$$l = -\frac{\mathrm{cn}\,2\omega_1 \cdot \mathrm{dn}\,2\omega_1}{\mathrm{sn}\,2\omega_1} + \frac{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1}{\mathrm{sn}\,2\omega_1}$$

folgt und den Werth annimmt:

(14)
$$9k^4 \cdot \mathrm{sn}^8\omega_1 - 4k^2(3 + 3k^2 + l^2)\,\mathrm{sn}^6\omega_1$$
$$+ 2(4 + 14k^2 + 4k^4)\,\mathrm{sn}^4\omega_1 - (4 + k^2 + l^2)\,\mathrm{sn}^2\omega_1 + 4 = 0\,.$$

Der einer jeden Wurzel entsprechende Werth von A ist dann aus der Gleichung bestimmt:

$$-3k^4 \cdot \mathrm{sn}^4\omega_1 + 2k^2(1+k^2+l^2)\,\mathrm{sn}^2\omega_1 - k^2 - 2l \cdot A = 0 .$$

Wir erhalten den

Lehrsatz. *Im ersten Ausnahmefall nimmt die Differentialgleichung die Form an:*

$$\frac{d^3\varphi(v)}{dw^3} + \left(-3\lambda^2 + (1+k^2) - 3k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w\right)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\left(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w + 3k^2 \cdot \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w\right) .$$

Willkürlich bleibt die Constante c_4, während λ den Werth annimmt:

$$\lambda = \frac{c_4}{3} ,$$

und

$$c_3 = A - 2\lambda^3 - 2(1+k^2)\lambda$$

aus der vorhin angegebenen biquadratischen Gleichung zu bestimmen ist.

Die drei Integrale lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v + \lambda \cdot w} ,$$

$$y_2 = y_1 \int\left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2(w+\omega_1)}\right) dw ,$$

$$y_3 = \frac{\vartheta_1(v+\nu_3)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_3)}{\vartheta_0(\nu_3)}v + \lambda \cdot w} ,$$

wobei ν_1 und ν_3 aus den früher angegebenen Gleichungen zu bestimmen sind.

Zu denselben Resultaten können wir auch auf einem andern Wege gelangen. In der That, die beiden Integrale y_1 und y_3 haben die allgemeine Form. Nehmen wir dieselben als bekannt an, so lautet der Werth des dritten Integrals:

$$(15) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{y_3 \cdot dw}{d^2} - y_3 \int \frac{y_1 \cdot dw}{d^2} ,$$

$$d = y_3 \frac{dy_1}{dw} - y_1 \frac{dy_3}{dw} .$$

Soll nun dieses Integral aufhören doppeltperiodisch zu sein, so muss die Function innerhalb eines der beiden Integralzeichen doppeltperiodisch sein, z. B. innerhalb des ersten. Es ergiebt das die Gleichungen:

$$2\nu_1 + \nu_3 = m_1 + (2m+1)\frac{\tau}{2},$$

$$-3\lambda + 2\frac{d\log\vartheta_0(\nu_1)}{d\omega_1} - \frac{d\log\vartheta_1(2\nu_1)}{d(2\omega_1)} = 0.$$

Wir sehen, wir kommen zu den früheren Resultaten.

Hiermit ist der Fall erledigt, dass beide Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung doppeltperiodisch sind. Wir nehmen jetzt den Ausnahmefall, der in der citirten Note ausführlich behandelt worden ist.

Im Allgemeinen führt derselbe zu keinen neuen Resultaten. Es muss c_1 der Gleichung Genüge leisten:

$$c_1^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 + 2\,\mathrm{sn}\,\omega_1(\mathrm{cn}\,\omega_1 \cdot \mathrm{dn}\,\omega_1 \pm k\,\mathrm{sn}^2\alpha)\,c_1 + 1 = 0$$

oder wir erhalten die Gleichung:

$$-\mathrm{cn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{dn}^2\omega_1 \pm 2(u + l\cdot\mathrm{sn}^2\omega_1)\,k\,\mathrm{sn}\,\omega_1 + l^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega_1 + 1 = 0$$

oder auch:

$$-\mathrm{cn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{dn}^2\omega_1 \pm \frac{2A}{k}\,\mathrm{sn}\,\omega_1 + l^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega_1 + 1 = 0$$

oder auch:

$$k^4\cdot\mathrm{sn}^6\omega_1 - 2k^2\cdot\mathrm{sn}^4\omega_1(1+k^2+l^2) + \mathrm{sn}^2\omega_1(1+k^2+l^2)^2 = \frac{4A^2}{k^2}\cdot$$

Nun leistet $\mathrm{sn}^2\omega_1$ aber auch der früheren Gleichung dritten Grades Genüge, also auch der Gleichung

$$3k^4\cdot\mathrm{sn}^4\omega_1 - 2k^2\cdot\mathrm{sn}^2\omega_1(1+k^2+l^2) + 4(k^2+2l\cdot A) - (1+k^2+l^2)^2 = 0.$$

Dieses Resultat sagt aber aus, dass die ursprüngliche kubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln und ausser ihnen noch die Wurzel $\mathrm{sn}^2\omega_1$ besitzt. Wir kommen also zu dem früheren Falle, nur dass ω_1 jetzt die Rolle spielt, die früher ω_3 inne hatte. Jedenfalls ergiebt sich nichts Neues.

Ein neues Moment tritt vielmehr erst dann ein, wenn alle drei Grössen ω_1, ω_2, ω_3 zusammenfallen.

Es käme dann zu den früheren Gleichungen noch die Beziehung hinzu:

$$\nu_1 = \nu_3 + m' + m_1' \cdot \tau$$

oder also:

$$(16) \qquad \nu_1 = \frac{\tau}{6} + \frac{m' + m_1' \cdot \tau}{3} .$$

Die gefundenen Werthe von ν_1 haben also die Eigenthümlichkeit, dass sie $\operatorname{sn} 3\omega_1$ unendlich gross machen. Nun ist ganz allgemein:

$$\operatorname{sn} 3\omega = \operatorname{sn}\omega \frac{3 - 4(1+k^2)\operatorname{sn}^2\omega + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega - k^4 \cdot \operatorname{sn}^8\omega}{1 - 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega + 4k^2(1+k^2)\operatorname{sn}^6\omega - 3k^4 \cdot \operatorname{sn}^8\omega} .$$

Mithin erhalten wir die Gleichung:

$$(17) \quad 3k^4 \cdot \operatorname{sn}^8\omega_1 - 4k^2(1+k^2)\operatorname{sn}^6\omega_1 + 6k^2 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 - 1 = 0 .$$

Zu demselben Resultat wären wir gelangt, wenn wir die Bedingung dafür aufstellen, dass die cubische Gleichung:

$$k^6 \cdot \operatorname{sn}^6\omega_1 - (1+k^2+l^2)k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 + (k^2 + 2l \cdot A)k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 = A^2$$

drei gleiche Wurzeln besitzt. Dazu muss sein:

$$k^2 \cdot \operatorname{sn}^2\omega_1 = \frac{1+k^2+\lambda_1^2}{3} ,$$

$$k^4 \cdot \operatorname{sn}^4\omega_1 = \frac{k^2 + 2l \cdot A}{3} ,$$

$$k^6 \cdot \operatorname{sn}^6\omega_1 = A^2 ,$$

oder also:

$$A = \frac{(1+k^2+l^2)^2 - 3k^2}{6l} ,$$

während für l die Gleichung stattfindet:

$$(18) \qquad 4(1+k^2+l^2)^3 l^2 = 3((1+k^2+l^2)^2 - 3k^2)^2 .$$

Ersetzen wir hierin l^2 durch $\operatorname{sn}^2\omega_1$, so erhalten wir genau die obige Gleichung. Wir sehen, dass in diesem Falle die Differentialgleichung *keinen* willkürlichen Coefficienten mehr enthält. l oder was dasselbe sagt 3λ ist aus der soeben hingeschriebenen Gleichung bestimmt. Ist λ gegeben, so folgen die übrigen Grössen aus den vorhin aufgestellten Gleichungen, so dass es nur noch übrig bleibt, die Werthe der drei Integrale hinzuschreiben. Dieselben lauten, wie unmittelbar aus der vorhin citirten Notiz folgt:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+\nu_1)}{\vartheta_0(v)} \cdot e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_1)}{\vartheta_0(\nu_1)}v + \lambda w},$$

$$(19) \qquad y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2(w+\omega_1)}\right) dw,$$

$$y_3 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2(w+\omega_1)}\right) dw \int \left(1 - \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1 \cdot \mathrm{sn}^2(w-\omega_1)}\right) dw.$$

Die einzige Schwierigkeit besteht noch in der Berechnung des letzten Integrales.

Wir wollen wie früher setzen:

$$(20) \qquad A l_1(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0} e^{-\frac{\vartheta_0''}{2\vartheta_0}v^2},$$

so wird:

$$y_3 = y_1 \int \left(1 + c\frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2}\right)\left(w + c\frac{d \log A l_1(w-\omega_1)}{dw}\right) dw,$$

$$c = \frac{1}{k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\omega_1}.$$

Erwägen wir die Beziehung:

$$\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw} - \frac{d \log A l_1(w-\omega_1)}{dw}$$

$$= -\frac{\mathrm{sn}\, 2\omega_1}{\mathrm{sn}(w+\omega_1)\,\mathrm{sn}(w-\omega_1)} + \frac{d \log A l_0(2\omega_1)}{d(2\omega_1)},$$

so kann gesetzt werden:

$$y_3 = y_1 \left(\frac{w^2}{2} + c\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw} w + \frac{c^2}{2}\left(\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw}\right)^2\right)$$

$$+ c^2 \cdot y_1 \int \frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2} \frac{\mathrm{sn}\, 2\omega_1 \cdot dw}{\mathrm{sn}(w+\omega_1)\,\mathrm{sn}(w-\omega_1)}$$

$$+ y_1 \cdot c(\log A l_1(w-\omega_1) - \log A l_1(w+\omega_1)).$$

Nun ist aber:

$$\frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2} \frac{\mathrm{sn}\, 2\omega_1}{\mathrm{sn}(w+\omega_1)\,\mathrm{sn}(w-\omega_1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw}$$

$$+ \alpha_2 \frac{d \log A l_1(w-\omega_1)}{dw} + \alpha_3 \frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2} + \alpha_4 \frac{d^3 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^3},$$

wobei die Constanten α_1, α_2, α_3, α_4 die Werthe besitzen:

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = -k^2 \operatorname{sn}^2 \omega_1 ,$$

$$\alpha_3 = -\frac{\operatorname{cn} 2\omega_1 \cdot \operatorname{dn} 2\omega_1}{\operatorname{sn} 2\omega_1}, \quad \alpha_4 = \tfrac{1}{2},$$

und α_0 ebenso einfach bestimmt ist.

Mithin erhalten wir das Resultat:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{w^2}{2} + c\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw} w + \frac{c^2}{2}\left(\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw}\right)^2$$
$$+ c^2\left(\alpha_0 \cdot w + \alpha_3 \cdot \frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2}\right).$$

Wir können auch die Form wählen:

$$(21) \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{w^2}{2} + c\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw}(w+\alpha')$$
$$+ \frac{c^2}{2}\left(\left(\frac{d \log A l_1(w+\omega_1)}{dw}\right)^2 + \frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_1)}{dw^2}\right),$$

wo α' eine leicht hinschreibbare Constante bedeutet. Hiermit sind wir am Ziel. Die Formeln sind so ausführlich entwickelt, dass der betreffende Lehrsatz nicht hingeschrieben zu werden braucht.

§ 2.

Allgemeine Untersuchung der Ausnahmefälle.

Wir nehmen jetzt den allgemeinen Fall. In demselben können die Integrale beliebige Unendlichkeitspunkte besitzen. Es folgt leicht, dass wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, annehmen können, dass der Punkt $w = iK'$ der einzige Unendlichkeitspunkt der Integrale ist. In der That, besitzen die drei Integrale die Unendlichkeitspunkte b_1, b_2, $\cdots b_m$ von den höchsten Ordnungszahlen $n_1, n_2, \ldots n_m$, so substituiren wir in der Differentialgleichung an Stelle der abhängigen Veränderlichen y die Grösse:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v-b_1)^{n_1} \cdots \vartheta_1(v-b_m)^{n_m}}{\vartheta_0(v)^{n_1+\cdots n_n}}\, y .$$

Dieselbe leistet dann einer analogen Gleichung Genüge, wie y,

nur dass in den Coefficienten einige Unendlichkeitsstellen mehr auftreten. Die drei Integrale besitzen als einzigen Unendlichkeitspunkt den Punkt $w = iK'$. Wir können uns also in der That auf diesen Fall beschränken. Wir wollen nun der Einfachheit halber annehmen, dass in den Coefficienten *kein* weiterer Unendlichkeitspunkt enthalten sei, indem wir bemerken, dass im allgemeinen Falle die Betrachtung ganz analog durchzuführen ist. In dem genannten Falle nun hat die Differentialgleichung die Form:

$$\frac{d^3\varphi(v)}{dw^3} + (c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\frac{d\varphi(v)}{dw}$$
$$= \varphi(v)\,(c_3 + c_4 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w + c_5 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\, w \cdot \mathrm{cn}\, w \cdot \mathrm{dn}\, w)\ , \tag{1}$$

wobei von den Coefficienten nur zwei willkürlich bleiben.

Ein Integral hat die Form:

$$y_1 = \prod_{r=1}^{r=n} \frac{\vartheta_1(v+\nu_r)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_r)}{\vartheta_0(\nu_r)}v + \lambda \cdot w}\ . \tag{2}$$

Hierbei kann angenommen werden, dass die Grössen $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n$ alle von einander verschieden sind, vorausgesetzt, dass sie nicht etwa den Werth $\frac{\tau}{2}$ besitzen, was auszuschliessen ist.

Dieses eine Integral nehmen wir als bekannt an und setzen:

$$\varphi(v) = y_1 \int z \cdot dw\ , \tag{3}$$

so ergiebt sich für z die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2z}{dw^2} + 3\frac{d\log y_1}{dw}\frac{dz}{dw} + \left(3\frac{d^2y_1}{dw^2}\frac{1}{y_1} + c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w\right) z = 0\ . \tag{4}$$

Setzen wir:

$$y_1 = e^{\lambda w} \cdot y_1'\ ,$$

so folgt:

$$\frac{d\log y_1'}{dw} = \Sigma D_r\ ,$$

$$\frac{1}{y_1'}\frac{d^2y_1'}{dw^2} = 2nk^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w - n(1+k^2) + k^2 \Sigma \mathrm{sn}^2 w_r + 2\sum_{r,s}{}' D_r \cdot D_s\ ,$$

$$D_r = \frac{\mathrm{cn}\,\omega_r \cdot \mathrm{dn}\,\omega_r}{\mathrm{sn}\,\omega_r} - \frac{\mathrm{sn}\, w}{\mathrm{sn}\,\omega_r \cdot \mathrm{sn}(w+\omega_r)}\ .$$

Mithin erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(5)\quad \frac{d^2z}{dw^2} + 3(\Sigma D_r + \lambda)\frac{dz}{dw} + (3E + c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\, z = 0\,,$$

$$E = 2nk^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w - n(1+k^2) + k^2 \Sigma \mathrm{sn}^2 \omega_r + 2\Sigma D_r' \cdot D_s + 2\lambda \Sigma D_r + \lambda^2\,.$$

Man überzeugt sich, dass diese Differentialgleichung Integrale besitzt, welche die Punkte $w = -\omega_r$ als doppelte Unendlichkeitspunkte haben. Unter solchen Umständen setzen wir:

$$(6)\quad z = z_1 \Pi \frac{\vartheta_0(v)^2}{\vartheta_1(v+\nu_r)^2} e^{2\frac{\vartheta_0'(\nu_r)}{\vartheta_0(\nu_r)}v}$$

und erhalten für z_1 die Differentialgleichung:

$$(7)\quad \frac{d^2z_1}{dw^2} + (3\lambda - \Sigma D_r)\frac{dz_1}{dw} + (E_1 + c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w)\, z_1 = 0\,,$$

$$E_1 = 2nk^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w - n(1+k^2) + k^2 \Sigma \mathrm{sn}^2 \omega_r + 2\Sigma D_r \cdot D_s + 3\lambda^2\,.$$

Wir wollen uns nun an Stelle von ω_r gesetzt denken $\omega_r' + iK'$, so geht unsere Differentialgleichung über in:

$$\frac{d^2z_1}{dw^2} + (3\lambda + \Sigma D_r')\frac{dz_1}{dw} + (E_1' + c_1 + c_2 \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w) z_1 = 0\,,$$

$$D_r' = \frac{\mathrm{cn}\,\omega_r' \cdot \mathrm{dn}\,\omega_r'}{\mathrm{sn}\,\omega_r'} + k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\omega_r' \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\omega_r')\,,$$

$$E_1' = 2nk^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w - n(1+k^2) + \sum \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \omega_r'} + 2\Sigma D_r' \cdot D_s' + 3\lambda^2\,.$$

Nun folgt aber mit leichter Mühe die Gleichung:

$$\Sigma D_r' \cdot D_s' = b_0 + \sum_{r=1}^{r=n} b_r \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}\,\omega_r' \cdot \mathrm{sn}\,w \cdot \mathrm{sn}(w+\omega_r') + b_{n+1} \cdot k^2 \cdot \mathrm{sn}^2 w\,,$$

$$b_0 = \sum \frac{\mathrm{cn}\,\omega_r' \cdot \mathrm{dn}\,\omega_r'}{\mathrm{sn}\,\omega_r'} \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\omega_s' \cdot \mathrm{dn}\,\omega_s'}{\mathrm{sn}\,\omega_s'}\,,$$

$$b_r = \sum_s \left(\frac{\mathrm{cn}\,\omega_s' \cdot \mathrm{dn}\,\omega_s'}{\mathrm{sn}\,\omega_s'} + \frac{\mathrm{sn}\,\omega_s'}{\mathrm{sn}\,\omega_r' \cdot \mathrm{sn}(\omega_r' - \omega_s')} \right),$$

$$b_{n+1} = \frac{n \cdot n - 1}{2}\,,$$

wobei die Summe nach s über $1, 2, \cdots n$ mit Ausnahme von $s = r$ zu nehmen ist.

Unter solchen Umständen nimmt die Differentialgleichung für z_1 die Form an:

$$(8)\quad \frac{d^2 z_1}{dw^2} + (3\lambda + \Sigma D_r')\frac{dz_1}{dw} + (b_0' + k^2 \Sigma b_r \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{sn}\omega_r' \cdot \operatorname{sn}(w+\omega_r') + (c_2 + n\cdot(n+1))k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 w)\, z_1 = 0\,,$$

$$b_0' = b_0 - n(1+k^2) + \sum \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \omega_r'} + c_1 + 3\lambda^2\,.$$

Damit haben wir jene Form gefunden, die unseren Betrachtungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu Grunde gelegt worden ist.

Der einzige Unendlichkeitspunkt der Integrale ist $w = iK'$. Die Ordnungszahlen sind leicht zu finden. Setzen wir:

$$z_1 = (w - iK')^\mu + \cdots,$$

so folgt:

$$\mu(\mu - 1) + \mu \cdot n + n(n+1) + c_2 = 0\,.$$

Nun ist bei gleichen λ gefunden worden:

$$c_2 = -l^2 + l\cdot n - n^2 + 3(l-n) - 2,$$

also folgen die beiden Werthe:

$$\mu = l - (n+1) \quad \text{und} \quad \mu = -l + 2\,.$$

Bei ungleichen λ war:

$$c_2 = -3n(n+1)\,,$$

also wird:

$$\mu = -2n \quad \text{oder} \quad n+1\,.$$

l kann die Werthe annehmen $-n+2, -n+3, \cdots 0, 1 \cdots n$. Dabei ist, wie leicht folgt, der Fall $l = \frac{n+3}{2}$ im Falle eines ungeraden n auszuschliessen. Es nimmt also bei geradem resp. ungeradem n μ die Werthe an:

$$-\frac{n}{2}, \quad \cdots -2n\,,$$

$$-\frac{n-1}{2}, \quad \cdots -2n\,.$$

Mit der vorgetegten Differentialgleichung können wir nun nach früheren Methoden verfahren. Setzen wir an Stelle von $-\mu : \mu$, so haben im Allgemeinen die beiden Integrale die Form:

$$(9)\qquad \begin{aligned} z_1'' &= \prod_1^{\mu} \frac{\vartheta_1(v+\nu_s'')}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(v_s'')}{\vartheta_0(v_s'')}v+\lambda''\cdot w}, \\ z_1''' &= \prod_1^{\mu} \frac{\vartheta_1(v+\nu_s''')}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(v_s''')}{\vartheta_0(v_s''')}+\lambda'''\cdot w}. \end{aligned}$$

Dabei sind die ν_s'' von einander verschieden, es sei denn, dass sie gleich $\frac{\tau}{2}$ oder etwa gleich einem der Werthe ν_r sind. Im letzten Falle können nicht mehr wie zwei Werthe einander gleich sein. Dasselbe gilt von den Grössen ν_s'''.

Daneben kann nun aber der Ausnahmefall stattfinden. In demselben wird an Stelle von z_1''' der Ausdruck treten:

$$(10)\qquad z_1''' = z_1'' \int \frac{\vartheta_0(v+\nu_1')\cdots\vartheta_0(v+\nu_n')\cdot\vartheta_0(v)^{2\mu}}{\vartheta_1(v+\nu_1'')^2\cdots\vartheta_1(v+\nu_\mu'')^2\cdot\vartheta_0(v)^n}\, dw .$$

Erwägen wir nun, dass $2\mu \geqq n$ ist, so folgt, dass wir setzen können:

$$\begin{aligned} &\frac{\vartheta_0(v+\nu_1')\cdots\vartheta_0(v+\nu_n')\,\vartheta_0(v)^{2\mu}}{\vartheta_1(v+\nu_1'')^2\cdots\vartheta_1(v+\nu_\mu'')^2\,\vartheta_0(v)^n} \\ &= d_0 + \sum d_s \cdot \frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_s'')}{dw^2} . \end{aligned}$$

Hierbei ist freilich die Voraussetzung nothwendig, dass alle Grössen ν_s'' von den Grössen ν_r verschieden sind, eine Voraussetzung, die zunächst beibehalten werden möge.

Es folgt dann:

$$(11)\qquad z_1''' = z_1'' \left(d_0 \cdot w + \sum d_s \cdot \frac{d \log A l_1(w+\omega_s'')}{dw} \right),$$

wobei die Grössen d_0 und d_s unmittelbar bestimmt sind.

Wir nehmen nun den ersten und allgemeinen Fall. Die den Werthen z_1'' und z_1''' entsprechenden Werthe von $z : z''$ und z''' lauten:

$$z'' = \frac{\vartheta_0(v)^{2n}\cdot\vartheta_1(v+\nu_1'')\cdots\vartheta_1(v+\nu_\mu'')}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2\cdots\vartheta_1(v+\nu_n)^2\cdot\vartheta_0(v)^\mu}\, e^{2\sum\frac{\vartheta_0'(\nu_r)}{\vartheta_0(\nu_r)}v-\sum\frac{\vartheta_0'(\nu_s'')}{\vartheta_0(\nu_s'')}v+\lambda''\cdot w},$$

(12)

$$z''' = \frac{\vartheta_0(v)^{2n}\cdot\vartheta_1(v+\nu_1''')\cdots\vartheta_1(v+\nu_\mu''')}{\vartheta_1(v+\nu_1)^2\cdots\vartheta_1(v+\nu_n)^2\cdot\vartheta_0(v)^\mu}\, e^{2\sum\frac{\vartheta_0'(\nu_r)}{\vartheta_0(\nu_r)}v-\sum\frac{\vartheta_0'(\nu_s''')}{\vartheta_0(\nu_s''')}v+\lambda'''\cdot w}.$$

Im Allgemeinen werden diese Functionen doppeltperiodische Functionen zweiter Art sein, deren einzige Unendlichkeitspunkte die Punkte $v = -\nu_r$ sind. In diesem Falle werden die entsprechenden Grössen y auch ihrerseits doppeltperiodische Functionen sein, so dass wir den allgemeinen Fall erhalten, der zu besonderen Betrachtungen keinen Anlass bietet. Anders verhält sich die Sache, wenn eine oder beide der Grössen z'', z''' doppeltperiodische Functionen erster Art sind. Dann kommen wir in der That zu Ausnahmefällen. Nehmen wir zunächst an, z'' wäre eine doppeltperiodische Function erster Art. Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen sind unmittelbar klar und brauchen nicht erst hingeschrieben zu werden. Jedenfalls folgt dann:

$$z'' = e_0 + \sum e_r \cdot \frac{d^2 \log A l_1(w+\omega_r)}{dw^2},$$

wo die Werthe der Constanten e_0 und e_r unmittelbar gegeben sind. Mithin wird:

$$y_2 = y_1\left(e_0\cdot w + \sum e_r\cdot\frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}\right), \tag{13}$$

so dass in diesem Falle das Integral unmittelbar bestimmt ist. Genau so einfach ist der Fall zu behandeln, dass beide Grössen z'' und z''' doppeltperiodische Functionen erster Art sind.

Damit ist der Fall vollkommen erledigt, dass die Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung beide doppeltperiodisch sind.

Nun nehmen wir den Ausnahmefall. Da sind wieder zwei Unterfälle zu unterscheiden. Erstens kann das eine Integral doppeltperiodisch von der zweiten Art sein — zweitens von der ersten Art. Den ersten Fall können wir ausscheiden, da wir zu keinen principiell neuen Resultaten kommen — es möge in Bezug hierauf auf die Betrachtungen des ersten Paragraphen ver-

wiesen werden. Es bleibt also nur der zweite Fall übrig. In demselben erhalten wir wie vorhin:

$$(15)\quad \begin{aligned} y_2 &= y_1\left(e_0\cdot w+\sum e_r\cdot\frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}\right),\\ y_2 &= y_1\int\left(e_0+\sum e_r\cdot\frac{d^2\log A l_1(w+\omega_r)}{dw^2}\right)dw\\ &\quad\cdot\int\left(d_0+\sum d_s\frac{d^2\log A l_1(w+\omega_s'')}{dw^2}\right)dw. \end{aligned}$$

In diesen Integralen sind die Grössen e und d sämmtlich bekannt. Die ganze Schwierigkeit liegt demnach in der Auswerthung des letzten Integrales. Dasselbe kann aber analog behandelt werden, wie das entsprechende im vorigen Paragraphen.

Wir haben dabei vor Allem von zwei Formeln Gebrauch zu machen, nämlich der Formel:

$$\begin{aligned} \frac{d\log A l_1(w+\omega_s'')}{dw} &= \frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}\\ &+\frac{d\log A l_1(\omega_s''-\omega_r)}{d\omega_s''}-\frac{\operatorname{sn}(\omega_s''-\omega_r)}{\operatorname{sn}(w+\omega_s'')\operatorname{sn}(w+\omega_r)}, \end{aligned}$$

und zweitens der Formel:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}\,\frac{\operatorname{sn}(\omega_s''-\omega_r)}{\operatorname{sn}(w+\omega_s'')\operatorname{sn}(w+\omega_r)}\\ &=\alpha_0^{(rs)}+\alpha_1^{(rs)}\frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}+\alpha_2^{(rs)}\frac{d\log A l_1(w+\omega_s'')}{dw}\\ &\quad+\alpha_3^{(rs)}\frac{d^2\log A l_1(w+\omega_r)}{dw^2}-\tfrac{1}{2}\frac{d^3\log A l_1(w+\omega_r)}{dw^3}. \end{aligned}$$

In dieser Formel sind die Grössen $\alpha_0^{(rs)},\ldots\alpha_3^{(rs)}$ bekannt.

Es folgt dann mit leichter Mühe für das letzte Integral der Ausdruck:

$$\begin{aligned} (16)\quad \frac{y_2}{y_1} &= e_0\cdot d_0\cdot\frac{w^2}{2}+d_0\sum e_r\frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}(w+\alpha_r)\\ &+\frac{d}{2}\sum e_r\left(\left(\frac{d\log A l_1(w+\omega_r)}{dw}\right)^2+\frac{d^2\log A l_1(w+\omega_r)}{dw^2}\right). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck ist gesetzt worden:

$$d=d_1+d_2+\cdots,$$

während die Grössen α_r bekannte Constanten bedeuten.

Hiermit sind wir vollkommen am Ziele.

Die Form, welche wir dem letzten Integral gegeben haben, ist verschieden von der Form, welche Herr Stenberg seinen Integralen giebt. Der Unterschied besteht darin, dass Herr Stenberg auf der rechten Seite nur *eine* Function

$$\frac{d \log A l_1 (w + \omega)}{dw}$$

beibehält, wobei ω eine ganz willkürlich gewählte Grösse bedeutet, während in unserer Formel eine Reihe von Grössen

$$\frac{d \log A l_1 (w + \omega_r)}{dw}$$

enthalten sind. Letztere sind dadurch charakterisirt, dass die Grössen ω_r die Nullpunkte des ersten Integrales bilden. Daneben hat aber Herr Stenberg in seinen fertigen Integralen doppeltperiodische Functionen erster Art stehen, deren Bestimmung noch übrig bleibt, während bei unserer Darstellung dieselben bestimmt sind. Es ist die vorliegende Form gewählt worden, weil die Nullpunkte des ersten Integrales als gegebene Grössen anzusehen sind und von ihnen im Wesentlichen die Form des Factors von y_1 abhängt.

W. Ostwald, *Zur Thermochemie der Jonen.*

Den ersten Schritt in die Thermochemie der Jonen hat Arrhenius[1]) gethan, als er aus den Erscheinungen der Neutralisation die Wärmetönung bei der Vereinigung von Wasserstoff- und Hydroxyljonen zu Wasser auf 135 *K* berechnete, woraus sich unter Benutzung der Verbrennungswärme des Wasserstoffs von 684 *K* die Summe der Bildungswärme von 1 g Wasserstoff- und 17 g Hydroxyljonen aus den gasförmigen Elementen zu 549 *K* ergiebt. Desgleichen ermittelte Arrhenius die Wärmetönungen, welche bei der Dissociation einer Anzahl von Säuren in ihre Jonen auftreten, und die gleichfalls stets die Summe zweier Jonisationswärmen, der des Kations und des Anions darstellen.

Die einzelnen Werthe, welche der Bildung eines bestimmten Jons, z. B. des Wasserstoffjons entsprechen, ergeben sich aus diesen Rechnungen nicht, und es scheint angesichts der Thatsache, dass niemals eine Art Jonen allein entsteht, sondern dass stets äquivalente Mengen positiver und negativer Jonen sich gleichzeitig bilden müssen, keine Aussicht auf die Bestimmung der Einzelwerthe vorhanden zu sein. Indessen ist hier doch ein Ausweg vorhanden. Die Bildung der positiven und negativen Jonen ist zwar zeitlich, aber nicht räumlich aneinander geknüpft, und es giebt Vorgänge, welche durch gleichzeitige Bildung der beiden Jonenarten an verschiedenen Stellen die gesonderte Bestimmung der den einzelnen zukommenden Grössen gestatten.

---

1) Ztschr. f. ph. Ch. IV, 97. 1889. Vgl. Ostwald, ib. III, 588. 1889.

Der den nachstehenden Ausführungen zu Grunde liegende Gedanke ist folgender. Bestimmt man an einer Elektrode, an der irgend ein Jon entsteht oder verschwindet, die auftretende Wärmetönung, so ist diese die Summe zweier Grössen. Einmal wird eine bestimmte Elektricitätsmenge von dem Potential der Elektrode auf das des Elektrolyts gebracht, wobei eine entsprechende Energiemenge aus- oder eintritt; sodann wird eine proportionale Menge von Jonen gebildet oder zerstört, und die zugehörige Bildungswärme addirt oder subtrahirt sich in Bezug auf die vorige. Kennt man nun erstens die Gesammtwärme, und zweitens den Potentialunterschied an der Elektrode, so kann man durch Abziehen der elektrischen Energie von der Gesammtwärme die Jonisationswärme erhalten.

Beide zur Rechnung erforderlichen Werthe sind gegenwärtig experimentell zugänglich; die Gesammtwärme auf zwei Wegen, der Potentialunterschied bisher leider nur auf einem, so dass die sehr erwünschte Controle an diesem Punkte noch nicht ausgeführt werden kann. Auch ist noch kein zweiter Weg zur unabhängigen Bestimmung einzelner Jonisationswärmen bekannt; ein solcher würde rückwärts wieder die Controle des Potentialunterschiedes ermöglichen. Doch steht zu hoffen, dass, nachdem einmal *ein* Zugang zu dem Punkte gefunden worden ist, die Ermittelung anderer Wege nicht allzu lange wird auf sich warten lassen.

Die Wärmetönung, welche an den Elektroden einer Zersetzungszelle auftritt, ist mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen. Ueber die Angabe, dass an der Anode eine Erwärmung, an der Kathode eine Abkühlung (oder geringere Erwärmung) eintritt, ist zuerst Bouty[1]) hinausgegangen, welcher mittelst seiner Thermometer-Elektroden den Betrag dieser Wärmetönungen in einzelnen Fällen bestimmte, und ihn für Kupfer und Zink nahezu gleich, für Silber aber von entgegengesetztem Zeichen (derart, dass die Kathode sich erwärmt, die Anode sich abkühlt) fand. Spätere Untersuchungen von H. Jahn[2]) und Gill[3]) lieferten zum Theil abweichende Ergebnisse, aus deren Verschiedenheiten die grosse Schwierigkeit derartiger Bestimmungen zu Tage tritt.

---

1) Journ. de Phys. VIII, 289 u. 344. 1889; ib. IX, 306. 1880 u. ff.
2) Wied. Ann. XXXIV, 784. 1888. 3) Wied. Ann. XL, 137. 1890.

Neben dieser ziemlich unsicheren unmittelbaren Messung der Wärmetönungen an den Elektroden giebt es aber noch ein mittelbares Verfahren, welches grösserer Genauigkeit fähig ist, und keine weiteren hypothetischen Voraussetzungen bedingt. Es ist dies die Messung der Aenderung, welche der Potentialunterschied an der Elektrode mit der Temperatur erfährt. Man führt sie aus, indem man in einer symmetrisch angeordneten Zelle (z. B. Kupfersulfat zwischen Kupferelektroden) die eine Berührungsstelle auf anderer Temperatur hält, als die andere. Für diesen Fall gilt ebenso wie beim galvanischen Element die Gleichung der virtuellen Energieen, hier der elektrischen und der thermischen,

$$\varepsilon d\pi = s dT = \frac{w}{T} dT$$

$$w = \varepsilon T \frac{d\pi}{dT}.$$

Hier ist ε die Elektricitätsmenge, s die ihr proportionale Entropieänderung, welche gleich $\frac{w}{T}$ ist, wo w die aufgenommene Wärme bedeutet; $d\pi$ ist die Aenderung des Potentials durch die Temperaturänderung, T die absolute Temperatur. Die Elektricitätsmenge bezieht man am besten auf Gramm-Formelgewicht des Jons; sie beträgt alsdann $n \times 96540$ Coul., wo n die Valenz des sich bildenden oder verschwindenden Jons ist. Der Coefficient $\frac{d\pi}{dT}$ wird natürlich mittelst endlicher Unterschiede der Temperatur bestimmt, was zulässig ist, da der Werth sich nur langsam mit der Temperatur ändert. Bei der Rechnung hat man zu beachten, dass ein Volt $\times$ Coulomb gleich 0.2391 Cal. oder 0.002391 K ist; für die 96540 Coul., welche an einem Grammäquivalent beliebiger Jonen haftete, beträgt der Factor 230.9, wenn die elektromotorische Kraft in Volt ausgedrückt ist. Es ist demnach

$$w = 230.9 \times n T \frac{d\pi}{dT},$$

wo w, wie üblich auf ein Formelgewicht in Grammen, also z. B. 63.4 g Kupfer oder 35.46 g Chlor bezogen ist.

Für Kupfer und Kupferelektroden hatte Bouty z. B.

$$\frac{d\pi}{dT} = 0.00076$$

gefunden. Daraus ergiebt sich $w = 102\ K$.

Wir wenden uns nun zum zweiten Theile unserer Aufgabe, der Bestimmung des Potentialunterschiedes zwischen der Elektrode und dem Elektrolyt. Ich habe im Jahre 1887 [1]) gezeigt, dass es auf Grundlage der Theorie von Helmholtz über die elektrocapillaren Erscheinungen möglich ist, Messungen des fraglichen Potentialunterschiedes zunächst für Quecksilber und viele Elektrolyte auszuführen. Da wir vermöge der späteren Arbeiten von Nernst [2]) und Planck [3]) die Potentialunterschiede zwischen verschiedenen Lösungen wenigstens für viele Fälle berechnen können, so gewährt uns die Kenntniss eines einzigen Potentialunterschiedes zwischen einem Metall und einem Elektrolyt die Möglichkeit, alle anderen derartigen Werthe mittelst gewöhnlicher elektromotorischer Messungen an Ketten zu bestimmen. Denn die elektromotorische Kraft der Ketten ist die Summe der folgenden Potentialunterschiede:

π_1 zwischen der Elektrode A und dem Elektrolyt a
π_2 zwischen dem Elektrolyt a und dem Elektrolyt b
π_3 zwischen dem Elektrolyt b und der Elektrode B
π_4 zwischen der Elektrode B und der Elektrode A.

Von diesen vier Werthen ergiebt sich π_4 aus dem thermoelektrischen Coefficienten der Metalle B und A, oder aus ihrer Peltierwärme; es ist bekannt, dass der Potentialunterschied zwischen verschiedenen Metallen sehr klein ist, so dass wir ihn für unsere Zwecke vernachlässigen können. Der Werth π_2 lässt sich, wie erwähnt, häufig berechnen, wenn die Beschaffenheit der Lösungen gegeben ist. Es ist im Allgemeinen möglich, die Lösungen so zu wählen, dass die Rechnung ausführbar ist. Auch dieser Werth ist klein, und lässt sich durch passende Wahl der Lösungen leicht innerhalb einige Millivolt halten; auch diese Grösse soll zunächst vernachlässigt werden. Daraus folgt, dass die elektromotorische Kraft π der Kette gleich $\pi_1 + \pi_3$ zu setzen ist; aus

1) Ztschr. f. ph. Ch. I, 583. 1887.
2) ib. IV, 129. 1889.
3) Wied. Ann. XL, 561. 1890.

n Elektroden mit zugehörigem Elektrolyt kann man $n - 1$ verschiedene unabhängige Ketten zusammensetzen und sie messen; man bedarf daher zur Bestimmung der n einzelnen Potentialunterschiede zwischen den Elektroden und den Elektrolyten weiter nur einer einzigen derartigen unmittelbaren Messung.

Als sichersten Werth, der sich aus meinen Untersuchungen und denen Paschen's[1]) ergiebt, nehme ich den Potentialunterschied zwischen Quecksilber und einer normalen Chloridlösung (das Kation ist ohne Einfluss, besondere Verhältnisse ausgenommen) bei Gegenwart von Calomel

$$Hg,\ HgCl,\ KCl(1\ l) = 0.560\,V\,.$$

Der Potentialunterschied liegt in solchem Sinne, dass das Quecksilber positiv ist, falls der Elektrolyt das Potential Null hat, oder dass der Elektrolyt in Bezug auf das Quecksilber negativ ist.

Hieraus, und aus den elektromotorischen Kräften verschiedener Ketten vom Typus der Daniell'schen, deren Messung meist von F. Braun und von A. Wright ausgeführt worden ist, und deren Discussion im Einzelnen hier zu weit führen würde[2]), erhalte ich ferner folgende Potentialunterschiede zwischen den Metallen und den normalen Lösungen ihrer Salze, wobei das Potential des Metalls stets gleich Null gesetzt worden ist:

Magnesium	1.22 Volt
Zink	0.51 »
Aluminium	0.22 »
Cadmium	0.19 »
Eisen	0.06 »
Blei	— 0.10 »
Kupfer	— 0.60 »
Quecksilber	— 0.99 »
Silber	— 1.01 »

Die Werthe sind zum Theil nicht sehr sicher, doch glaube ich, dass die Fehler sich im Allgemeinen auf einige hundertstel Volt beschränken.

Um nun nach diesen Vorbereitungen die Berechnung der Jonisationswärme durchzuführen, beachten wir, dass die an der Elektrode beim Durchgang der Elektricitätsmenge $n\,\varepsilon_0$ eintretende

1) Wied. Ann. XLI, 42. 1890 u. ff.

2) Vgl. Ostwald, Lehrb. d. allg. Chemie II, 871 u. ff. 2. Aufl. 1898.

Wärme w gleich dem Verbrauch der elektrischen Energie $n\varepsilon_0\pi$ plus dem Verbrauch an Wärme zum Jonisationsvorgang j ist; wir haben

$$w = n\varepsilon_0\pi + j; \quad j = w - n\varepsilon_0\pi,$$

wobei immer eintretende Energie positiv, austretende negativ gerechnet werden soll[1]).

Geht beispielsweise die positive Elektricitätsmenge $2\varepsilon_0$ von einer Kupferelektrode in die Lösung, so wird die Wärmemenge $w = 102\,K$ ausgeschieden; es ist $w = -102\,K$. Ferner ist nach der eben gegebenen Tabelle $\pi = -0.60\,V$; fällt die Elektricitätsmenge $2\varepsilon_0$ um diesen Betrag, so tritt eine Energiemenge aus, welche nach dem S. 56 gegebenen Coefficienten äquivalent $277\,K$ ist; wir haben demnach $n\varepsilon_0\pi = 277\,K$. Daraus folgt

$$j = 175\,K.$$

Der positive Werth von j lehrt nach der getroffenen Festsetzung, dass dem Kupfer, wenn es in zweiwerthige Jonen übergeführt wird, die Energiemenge von $175\,K$ zuzuführen ist. Der Uebergang des Kupfers in Jonen verbraucht somit Energie, der umgekehrte Uebergang würde ebensoviel entwickeln.

Aus dieser einen Jonisirungswärme lassen sich nun, so weit die thermochemischen Daten bekannt sind, alle anderen einzelnen Jonisirungswärmen ableiten, und zwar ebenso für Kationen, wie für Anionen. Um beispielsweise die Jonisirungswärme des Zinks zu finden, benutzen wir die Thatsache, dass die Fällung des Kupfersulfats durch metallisches Zink unter Bildung von Zinksulfat und metallischem Kupfer eine Wärmetönung von $501\,K$ ergiebt. Nun besteht dieser Vorgang darin, dass die Kupferjonen ihre Ladung verlieren und in Metall übergehen, während beim Zink das Umgekehrte stattfindet; die hierbei frei werdende Wärme stellt also nichts dar, als den Unterschied der Jonisirungswärme von Zink und Kupfer. Es ist hierbei allerdings die nicht vollkommen zutreffende Voraussetzung gemacht worden, dass die Lösungen beider Salze vollständig dissociirt sind, doch beträgt die hierbei gemachte Vernachlässigung voraussichtlich weniger, als die Unsicherheit der den übrigen Rechnungen zu Grunde liegenden Zahlen.

Von den $501\,K$, welche bei dieser Reaction entwickelt wer-

---

1) In der Thermochemie ist die umgekehrte Wahl des Zeichens üblich.

den, rühren 175 *K* vom Kupfer her, welche beim Uebergange aus dem Jonenzustande in den des Metalls frei werden; die übrigen 326 *K* entstehen durch den Uebergang des metallischen Zinks in Zinkjonen. Hier ist demnach das Zeichen der Wärmetönung umgekehrt, als beim Kupfer; während bei diesem die Jonen aus dem Metall unter Aufnahme von Energie entstehen, wird beim Zink ein ganz erheblicher Energiebetrag frei, wenn es in den Jonenzustand übergeht. Dieser Gegensatz entspricht vollkommen dem chemischen Verhalten beider Metalle: Zink löst sich leicht in Säuren, d. h. bildet leicht Jonen, während umgekehrt Kupfer leicht reducirt wird, und von Säuren nur unter Mitwirkung von Oxydationsmitteln (z. B. des Sauerstoffs der Luft) gelöst werden kann.

Aus der Jonisirungswärme des Zinks lässt sich die des Wasserstoffs ableiten, welche von erheblichem Interesse ist. Zink löst sich in Salzsäure nach Thomsen unter Entwickelung von 342 *K*. Der Vorgang besteht in dem Entstehen von Zinkjonen und dem Uebergang der vorhandenen Wasserstoffjonen in gasförmigen Wassserstoff. Der erste Theil der Reaction entwickelt, wie oben gefunden, 326 *K*, es bleibt somit für den zweiten Theil eine Entwickelung von 16 *K*, die den Uebergang von Wasserstoffjonen in das neutrale Gas begleitet. Umgekehrt werden bei der Bildung von Wasserstoffjonen aus gasförmigem Wasserstoff 16 *K* für je zwei Atome, also 8 *K* für jedes gebunden. Die Zahl fällt wegen ihrer Kleinheit auf, welche die möglichen Unsicherheiten ihrer Bestimmung nicht viel übersteigt. Es ergiebt sich hieraus, dass die Jonisirungswärme der Metalle sehr nahe zusammenfällt mit der Wärmetönung, welche bei der Auflösung derselben Metalle in wässrigen Säuren auftritt; sie ist um 8 *K* für jedes entwickelte Atom Wasserstoff kleiner.

Auf gleiche Weise lassen sich die Jonisirungswärmen der anderen Metalle berechnen; ich gebe nachstehend eine Tabelle darüber, die im Wesentlichen auf den thermochemischen Messungen J. Thomsen's beruht.

		für eine Valenz
Kalium	+ 610 *K*	610 *K*
Natrium	+ 563 »	563 »
Lithium	+ 620 »	620 »
Strontium	+ 1155 »	578 »
Calcium	+ 1070 »	535 »

		für eine Valenz
Magnesium	+ 1067 *K*	534 *K*
Aluminium	+ 1175 »	392 »
Mangan	+ 481 »	240 »
Eisen (Ferrojonen)	+ 200 »	100 »
» (Ferrojonen in Ferrijonen)	— 121 »	— 121 »
Kobalt	+ 146 »	+ 73 »
Nickel	+ 135 »	68 »
Zink	+ 326 »	163 »
Kadmium	+ 162 »	81 »
Kupfer (Cuprijonen)	— 175 »	— 88 »
» (Cuprojonen)	— 170 » (?)	— 170 » (?)
Quecksilber	— 205 »	— 205 »
Silber	— 262 »	— 262 »
Thallium	+ 10 »	+ 10 »
Blei	— 10 »	— 5 »
Zinn	+ 20 »	+ 10 »

Die Tabelle enthält mancherlei Bemerkenswerthes. Die Jonisirung des Eisens zum zweiwerthigen Ferrojon entwickelt 200 *K*; die Aufnahme einer weiteren Einheit verbraucht aber 121 *K*. Daher wirken Ferrisalze als ziemlich kräftige Oxydationsmittel.

Kupfer giebt beim Uebergange in das Cuprojon einen Wärmeverbrauch von etwa 170 *K*. Genau lässt sich die Zahl nicht bestimmen, da keine Bildungswärme eines gelösten Cuprosalzes bekannt ist; ich habe die Lösungswärme des Cuprochlorids gleich — 100 geschätzt, woraus sich die angeführte Zahl ergeben hat. Der Uebergang eines Cuprojons in ein zweiwerthiges Cuprijon giebt überhaupt zu keiner wesentlichen Wärmetönung Anlass.

Beim Quecksilber sind für das zweiwerthige Merkurijon keine verwerthbaren thermochemischen Daten vorhanden.

Intessant ist die Gruppe Thallium, Blei, Zinn, deren Jonisirungswärmen sämmtlich von Null nicht viel verschieden sind.

Sämmtliche Metalle, welche leicht Jonen bilden, haben positive, die anderen negative Jonisirungswärmen.

In gleicher Weise lassen sich die Jonisirungswärmen der Anionen berechnen. Die Bildungswärme der wässrigen Salzsäure aus gasförmigem Chlor und Wasserstoff beträgt 393 *K* für *HCl*. Der Vorgang besteht im Sinne der Dissociationstheorie aus

dem gleichzeitigen Uebergang von freiem Chlor und Wasserstoff in ihre Jonen. Da die Bildung der Wasserstoffjonen 8 *K* für jedes Jon verbraucht, so ist die Jonisirungswärme des Chlors 401 *K*. Diesem grossen Energieaustritt bei dem Uebergange des Chlors in Chlorjonen entsprechen die kräftigen chemischen Wirkungen des Chlors, die in wässriger Lösung in letzter Instanz ausschliesslich auf die Bildung von Chlorjonen hinauskommen.

Für Brom berechnet sich die Jonisirungswärme, bezogen auf den flüssigen Zustand, zu 291 *K*, für Jod zu 139 *K*, für Fluor endlich zu 498 *K*.

Von besonderem Interesse ist schliesslich die Jonsirungswärme des Sauerstoffs. Zwar kennen wir in wässriger Lösung keine Sauerstoffjonen, sondern nur Hydroxyljonen; dies ist aber auch die Form, in welche gasförmiger Sauerstoff bei seinen Oxydationswirkungen bei Gegenwart von Wasser übergeht.

Als Grundlage der Rechnung dient die eingangs erwähnte Zahl von 135 *K*, welche Arrhenius für die Bildungswärme des Wassers aus Wasserstoff- und Hydroxyljonen berechnet hatte. Da die Bildungswärme des Wassers aus Sauerstoff- und Wasserstoffgas 684 *K* beträgt, so entwickelt die Bildung der Wasserstoff- und Hydroxyljonen 684—135 = 549 *K*, und da hiervon für den Wasserstoff — 8 *K* zu rechnen sind, so folgen 557 *K* für die Bildung von Hydroxyljonen aus Sauerstoff- und Wasserstoffgas. Rationeller ist es, die Bildung der Hydroxyljonen aus Sauerstoff und Wasser zu berechnen. Sie ergiebt sich zu 430 *K* für jedes Atom Sauerstoff. Um derartige Rechnungen mit Sicherheit auszuführen, empfiehlt es sich, eine kurze Bezeichungsweise für die Jonen einzuführen. Ich wähle aus typographischen Gründen Punkte für Kationen, Striche für Anionen, und zwar so viele, als die Valenz des Jons beträgt. $K^{\cdot}$ bedeutet dann Kaliumjonen, Cl' Chlorjonen, *beide in wässriger Lösung*. Wir erhalten dann Reactionsgleichungen, welche den gewöhnlichen thermochemischen Reactionsgleichungen völlig analog sind; so haben wir für die vorbesprochenen Elemente:

$$Cu = Cu^{\cdot\cdot} - 175\ K$$
$$Zn = Zn^{\cdot\cdot} + 326\ »$$
$$H = H^{\cdot} - 8\ »$$
$$Cl = Cl' + 401\ »$$

u. s. w.

Nun haben wir für die Bildung des Wassers aus Wasserstoff- und Hydroxyljonen 135 K, somit die Gleichung

$$H\cdot + OH' = H^2O + 135\,K\,.$$

Wird die Gleichung mit -4 multiplicirt, und mit den Gleichungen über die Jonisationswärme des Wasserstoffs und die Bildungswärme des Wassers verbunden, so ist

$$4\,H^2O = 4\,H\cdot + 4\,OH' - 540\,K\,.$$
$$4\,H\cdot = 2\,H^2 + 32\,K$$
$$2\,HO^2 + O^2 = 2\,H^2O + 1638\,K$$

und daraus folgt durch Addition

$$O^2 + 2\,H^2O = 4\,OH' + 4 \times 215\,K\,.$$

Diese ziemlich erhebliche Zahl entspricht der oxydirenden Wirkung des freien Sauerstoffs, welche sich immer zeigt, wenn nicht durch die sogenannten passiven Widerstände die Reactionsgeschwindigkeit bis zur Unmerklichkeit herabgedrückt wird.

Diese Rechnungen lassen sich offenbar beliebig weit fortsetzen; für den vorliegenden Zweck wird das Mitgetheilte genügen, um die Durchführbarkeit einer Thermochemie der Jonen bis in alle Einzelheiten zu erweisen. Bei eingehenderer Bearbeitung der Aufgabe wird allerdings auf den Umstand Rücksicht genommen werden müssen, dass die bisher gemachte Voraussetzung von der vollkommenen Dissociation der betrachteten Stoffe nicht völlig richtig ist; doch steht der Bestimmung und Berücksichtigung der entsprechenden Correctionen keine principielle Schwierigkeit entgegen.

Zum Schluss soll noch der Zusammenhang erörtert werden, in welchem die S. 59 gegebene Formel

$$w = n\varepsilon_0\pi + j$$

mit anderweit bekannten Gesetzen steht. Ersetzen wir w durch seinen Werth $w = n\varepsilon_0 T\frac{d\pi}{dT}$ und wenden die Gleichung auf die beiden Elektroden einer Volta'schen Kette vom Daniell'schen Typus an, so haben wir

$$w_1 = n\varepsilon_0\pi_1 + j_1 = n\varepsilon_0 T\frac{d\pi_1}{dT}$$

$$w_2 = n\varepsilon_0\pi_2 + j_2 = n\varepsilon_0 T\frac{d\pi_2}{dT}$$

$$\pi_1 - \pi_2 = -\frac{j_1 - j_2}{n\varepsilon_0} + T\frac{d\pi_1 - d\pi_2}{dT}.$$

Hier ist $\pi_1 - \pi_2$ der Potentialunterschied an den beiden Elektroden der Kette; $\frac{d\pi_1 - d\pi_2}{dT}$ ist der Temperaturcoefficient der elektromotorischen Kraft der Kette, welche die Summe der einzelnen Temperaturcoefficienten sein muss[1]); das negative Zeichen des zweiten rührt daher, dass die zweite Elektrode in ihrer Anordnung der ersten entgegen gerichtet ist. Die Grösse $j_1 - j_2$, der Unterschied der Jonisirungswärmen beider Metalle, hat eine besonders einfache Bedeutung: er stellt nichts, als die Wärmeentwickelung dar, welche infolge des chemischen Vorganges in der Kette auftreten würde, wenn dieser keine elektrische Energie entzogen würde. Im Falle des Daniell'schen Elementes ist $j_1 - j_2$ der Unterschied der Jonisirungswärme von Zink und Kupfer, dieser aber ist nach S. 59 gleich der Reactionswärme bei der Zersetzung des Kupfersulfats durch Zink, welches der chemische Vorgang in der Daniell'schen Kette ist. Es ist $j_1 - j_2$ demnach die sogenannte chemische Wärme der Kette; bezeichnen wir sie mit $-W$, wo das Minuszeichen der üblichen Rechnungsweise der Thermochemie (vgl. S. 59, Anm.) entspricht, so haben wir bei gleichzeitigem Ersatz von $\pi_1 - \pi_2$ durch π

$$\pi = \frac{W}{n\varepsilon_0} + T\frac{du}{dT}.$$

Diese Gleichung ist die wohlbekannte Formel von Willard Gibbs und v. Helmholtz, welche die elektromotorische Kraft umkehrbarer Ketten mit der Reactionswärme W und dem Temperaturcoefficienten ihrer elektromotorischen Kraft in Verbindung bringt. Dass sie sich aus der Anwendung des S. 59 aufgestellten Ansatzes ergiebt, ist zwar kein absoluter Beweis für dessen Richtigkeit, doch aber eine werthvolle Probe.

Diese Darlegung gilt zunächst für Ketten vom Typus der Daniell'schen, d. h. für solche, deren Elektroden von den Lösungen ihrer Salze umgeben sind. Da die Formel von Gibbs und Helmholtz aber für alle Ketten gültig ist, muss noch erwiesen

---

1) Die Temperaturcoefficienten, welche von der Berührung der Metalle unter sich, sowie der beiden Lösungen herrühren, sollen wegen ihrer Kleinheit ausser Betracht bleiben.

werden, dass auch Ketten vom Typus der Calomelkette (Zink, Chlorzink, Calomel, Quecksilber) mit einem »unlöslichen« Salz sich in gleicher Weise behandeln lassen.

Zum Zwecke dieses Nachweises behandeln wir zunächst eine einfachere Kette, von welcher der Uebergang auf andere ohne Weiteres möglich ist; sie sei von folgender Zusammensetzung. Eine Silberelektrode befindet sich in einer Lösung von Silbernitrat; diese grenzt an eine Lösung von Kaliumnitrat, diese an eine Lösung von Kaliumchlorid, in welcher Chlorsilber aufgeschlämmt ist, und sich wiederum eine Silberelektrode befindet. Wir haben hier zwei Elektroden von gleichem Metall, und die Berührung der verschiedenen Lösungen (die alle von gleicher molekularer Concentration sein sollen) befinden sich keine elektromotorischen Kräfte, welche die Grössenordnung 0.001 *V* übersteigen; trotzdem hat eine solche Kette eine elektromotorische Kraft von etwa 0.4 *V*.

Nach der Theorie des elektrolytischen Lösungsdruckes, wie sie von W. Nernst aufgestellt worden ist[1]), rührt die Potentialdifferenz von dem verschiedenen osmotischen Gegendrucke her, welchen die Silberelektroden beiderseits erfahren. Einerseits beträgt in der Nitratlösung der Druck für normale Lösung über 20 Atmosphären, und ist der Concentration der Lösung proportional, andererseits ist die Concentration der Silberjonen in der Chlorkaliumlösung mit suspendirtem Chlorsilber wegen der sehr geringen Löslichkeit des letzteren ausserordentlich klein. Wird der Druck der Silberjonen in der Nitratlösung mit p_n, der in der Chloridlösung mit p_c bezeichet, so ist der Potentialunterschied an beiden Silberelektroden gegeben durch die Formel

$$\pi = \frac{RT}{\varepsilon_0} ln \frac{p_n}{p_c} = 0.0002\, T \log \frac{p_n}{p_c} ,$$

indem sich der elektrolytische Lösungsdruck der Silberelektroden heraushebt, da er beiderseits gleiche Werthe hat.

Wird nun eine derartige Kette erwärmt, so nimmt einerseits der Druck p_n nach bekannten Gesetzen proportional der absoluten Temperatur zu. Der Druck p_c aber nähme nur dann nach dem gleichen Gesetz zu, wenn die Concentration der Silberjonen

1) Ztschr. f. ph. Ch. IV, 129. 1889. Vgl. diese Berichte 1893, S. 3.

die gleiche bliebe. Dies findet nicht statt, sondern die Löslichkeit des Chlorsilbers wächst mit steigender Temperatur. Nun lässt sich schon die Löslichkeit des Chlorsilbers selbst unmittelbar wegen ihres zu geringen Betrages nicht messen, noch weniger also ihre Aenderung mit der Temperatur. Die Temperaturzunahme der Löslichkeit lässt sich aber auf anderem Wege leicht und genau ermitteln.

Mach der Analogie zwischen Dampfdruck und Lösungsdruck hat van't Hoff[1]) für die Aenderung des osmotischen Druckes in einer gesättigten Lösung mit der Temperatur den der entsprechenden Dampfdruckformel unter Einführung der Gasgesetze nachgebildeten Ausdruck gegeben

$$\frac{d\,ln\,p}{d\,T} = \frac{-\varrho}{R\,T^2} + \frac{1}{T},$$

wo ln der natürliche Logarithmus und ϱ die Lösungswärme des Stoffes ist; R ist die Gasconstante und T die absolute Temperatur. Die Lösungswärme des Chlorsilbers ergiebt sich aus der Fällungswärme eines gelösten Silbersalzes mit einem gelösten Chlorid; denn da nach dem Hess'schen Gesetz der Thermoneutralität die Bildung des *gelösten* Chlorsilbers aus zwei neutralen Salzen die Wärmetönung Null ergeben müsste, so ist die beobachtete Wärmetönung von 158 K gleich der negativ gerechneten Lösungswärme des Chlorsilbers. Aus der Kenntniss von ϱ ergiebt sich somit die von $\frac{d\,ln\,p}{d\,T}$ oder von $\frac{1}{p} \cdot \frac{d\,p}{d\,T}$.

Differenziren wir nun die S. 65 gegebene Gleichung

$$\pi = \frac{R\,T}{\varepsilon_0}\, ln\, \frac{p_n}{p_c}$$

nach T, so ist zu beachten, dass wegen der constanten Concentration p_n in der Nitratlösung p_n der absoluten Temperatur proportional, und daher $\frac{d\,ln\,p_n}{d\,T} = \frac{1}{T}$ ist. Wir erhalten zunächst

$$\frac{d\,\pi}{d\,T} = \frac{R}{\varepsilon_0}\, ln\, \frac{p_n}{p_c} + \frac{R\,T}{\varepsilon_0}\, \frac{d}{d\,T}\, ln\, \frac{p_n}{p_c}$$

oder, indem wir die ursprüngliche Gleichung substituiren, und die eben gemachte Bemerkung über p_n berücksichtigen,

---

1) Arch. néerland. XX, 53.

$$\pi = T\frac{d\pi}{dT} - \frac{RT^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{d\ln p_c}{dT} - \frac{1}{T}\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer hat aber nach der S. 66 gegebenen Gleichung den Werth $\frac{-\varrho}{RT^2}$, und damit folgt

$$\pi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} + T\frac{d\pi}{dT},$$

wiederum die Gleichung von Gibbs und Helmholtz. Denn in der fraglichen Kette besteht der Vorgang darin, dass aus dem Silbernitrat sich Silber abscheidet, während auf der anderen Seite auf Kosten der Elektrode und des vorhandenen Chlorkaliums sich Chlorsilber bildet. Dabei werden einerseits eben so viele Jonen NO_3 wie andererseits Kaliumjonen verfügbar, die zusammen das bilden, was man gelöstes Kaliumnitrat nennt. Das Ergebniss ist somit die Fällung von Chlorsilber unter Verbrauch von Silbernitrat und Chlorkalium, und unter Bildung von Kaliumnitrat. Diese Reactionswärme ist aber gerade dieselbe Zahl, welche oben als Lösungswärme erkannt und zur Berechnung des Temperatureinflusses benutzt wurde.

Im Sinne unserer ursprünglichen Darstellung können wir schliesslich folgende Betrachtung anstellen. Der chemische Vorgang in unserer Silberkette besteht einerseits in der Verwandlung von Silberjonen in metallisches Silber, andererseits in der Verwandlung einer gleichen Anzahl Chlorjonen in Chlorsilber unter Mitwirkung des metallischen Silbers der Elektrode. Die Wärmetönung ist daher an der Kathode gleich der negativen Jonisationswärme des Silbers. Den Vorgang an der Anode können wir nach Nernst's Vorgang so auffassen, als bestände sie aus einer metallisch leitenden Form des Chlors, denn eine mit Chlorsilber überzogene Silberelektrode verhält sich in Bezug auf die Bewegungen der Chlorjonen ganz ebenso, wie eine Zinkelektrode in Zinksulfat sich bezüglich der Bewegungen der Zinkjonen verhält. Demnach können wir auch von einer Jonisationswärme des Chlors mit Bezug auf eine derartige Elektrode sprechen, und erhalten ihren Betrag auf folgende Art.

Die gleichzeitige Umwandlung von Silber- und Chlorjonen in festes Chlorsilber entwickelt, wie erwähnt, 158 *K*. Nun entwickeln sich nach den Angaben der Tabelle auf S. 61, beim Uebergang der Silberjonen in das Metall 262 *K*, folglich bedingt

die Umwandlung von Chlorsilber in Metall und Chlorjonen eine Wärmetönung von 105 *K*, und diese Zahl ist als Jonisationswärme des Chlors aus dem Chlorsilber aufzufassen.

In Formeln ergiebt sich die Rechnung folgendergestalt:

$$Ag' + Cl' = AgCl + 157\ K$$
$$Ag' \quad\quad = Ag \quad + 262\ »$$
daher $$Cl' = AgCl - Ag - 105\ »$$

Die Jonisationswärme des Chlors aus dem Chlorsilber ist gleich dem Unterschied zwischen der Fällungswärme des Chlorsilbers und der Jonisationswärme des Silbers. Somit ist der Unterschied bei der Jonisationswärme an den Elektroden unseres Silberelements $j_1 - j_2$ (vgl. S. 64) gleich der Fällungswärme des Chlorsilbers; bei den früheren Betrachtungen war das gleiche Resultat erhalten worden.

Diese Erörterungen zeigen den engen Zusammenhang, in welchem die verschiedenen Betrachtungsweisen der Volta'schen Kette, nämlich die ältere rein thermodynamische oder vielmehr energetische von Gibbs und v. Helmholtz, die auf die einzelnen Potentialunterschiede vermöge der Helmholtz'schen Theorie der elektrischen Doppelschichten zurückgehende, und schliesslich die osmotische Theorie von Nernst unter einander stehen. Es handelt sich in allen diesen Fällen um die Anwendung der gleichen energetischen Grundsätze, und die verschiedenen Betrachtungsweisen unterscheiden sich schliesslich nur durch das Maass des Eindringens in die einzelnen Bestandtheile der Gesammterscheinung, welches sie gestatten. Die Anzahl der Thatsachen, welche durch diese Betrachtungsweise ihre sachgemässe Darstellung und somit Deutung finden, ist ungemein gross. Das Vorangegangene soll nur ein Beispiel dafür liefern; den Vergleich mit der Erfahrung habe ich in einigem Umfange in dem soeben erschienenen zweiten Bande meines Lehrbuches der allgemeinen Chemie durchgeführt, wobei sich ergeben hat, dass die Gesammtheit der elektrochemischen Beobachtungen sich ohne wesentliche Lücke durch die genannten Theorieen darstellen lässt. Wenn auch naturgemäss noch zahlreiche Beobachtungen eingehender Bearbeitung und Aufklärung harren, so handelt es sich doch nur noch um secundäre Fragen des Ausbaues; in seinen entscheidenden Punkten kann man das nahezu hundertjährige Problem der Volta'schen Kette als gelöst ansehen.

SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1893.

Robert Behrend, *Electrometrische Analyse.*

Die im Folgenden mitgetheilte Untersuchung verdankt ihre Entstehung einer gelegentlichen Uebung in der Handhabung physikalischer Apparate, für welche Herr Professor OSTWALD mir in freundlichster Weise die Mittel seines Laboratoriums zur Verfügung gestellt hatte. Für die Anregung zu der Untersuchung, sowie für die bereitwillige Ueberlassung von Apparaten zur Fortführung derselben im I. chemischen Laboratorium der Universität bin ich Herrn Professor OSTWALD zu lebhaftem Danke verpflichtet.

Die nahen Beziehungen der Potentialdifferenzen, welche an der Berührungsfläche verschieden concentrirter Lösungen von Electrolyten auftreten, zu den osmotischen Drucken der Jonen in den Electrolyten sind zuerst von W. NERNST (Z. physikal. Chemie IV. 129 ff.) erkannt und experimentell nachgewiesen worden. Die electromotorische Kraft ist nach NERNST (a. a. O. S. 138) dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses der osmotischen Drucke (p) der Jonen sowie der absoluten Temperatur proportional und ferner abhängig von der Wanderungsgeschwindigkeit der Jonen:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0.860\, T \frac{u-v}{u+v} ln \frac{p_1}{p_2} \times 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Auch die an der Grenzfläche umkehrbarer Electroden auftretenden electromotorischen Kräfte sind in demselben Sinne von NERNST erörtert worden. Für bezüglich des Kations umkehrbare Electroden (Metall in einer Salzlösung desselben Metalls) finden die Beziehungen zwischen electromotorischer Kraft und osmotischem Druck der Jonen ihren Ausdruck in der Gleichung (a. a. O. S. 148):

$$\varepsilon = 0.860\, ln \frac{P}{p} \times 10^{-4} \text{ Volt},$$

für bezüglich des Anions umkehrbare Electroden (z. B. mit Chlorsilber überzogenes Silber in Chlorkaliumlösung) in der Gleichung

$$\varepsilon' = 0.860\, ln \frac{p}{P_1} \times 10^{-4} \text{ Volt}.$$

P, ursprünglich als Integrationsconstante in der Rechnung erhalten, ist von NERNST in ihrer physikalischen Bedeutung charakterisirt (a. a. O. S. 22) und als electrolytische Lösungstension bezeichnet. P ist danach als der Druck aufzufassen, unter welchem die Electrode Jonen in Lösung zu schicken bestrebt ist.

In allgemeinster Form sind diese Beziehungen zwischen osmotischem Druck der Jonen und electromotorischer Kraft von OSTWALD (Lehrbuch 2. Aufl. II. 827) formulirt in der Gleichung

$$-n_i RT\, d(ln\, p) = n_e \varepsilon_0\, d\pi$$

oder

$$d\pi = -\frac{n_i}{n_e} \cdot \frac{RT}{\varepsilon_0}\, d\,(ln\, p),$$

wo R die Gasconstante ist, T die absolute Temperatur, p der osmotische Druck der Jonen, π die electromotorische Kraft, ε_0 die Constante des FARADAY'schen Gesetzes, n_i ein Factor, welcher die Anzahl der von dem Drucke p_1 auf p_2 übergehenden Molekeln und n_e ein Factor, welcher die Anzahl der vom Potential π_1 auf π_2 übergehenden electrolytischen Aequivalente bezeichnet.

Die Constante $\frac{RT}{\varepsilon_0}$ ist für Zimmertemperatur (17°) = 0.0251 Volt, also

$$d\pi = -\frac{n_i}{n_e}\, 0.0251 \cdot d\,(ln\, p)$$

oder

$$= -\frac{n_i}{n_e} \cdot 0.058\, d\,(\log p).$$

Integrirt ergiebt die Gleichung

$$\pi_1 - \pi_2 = \pi = \frac{n_i}{n_e} \cdot 0.058 \log \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \text{ Volt}.$$

Für die Potentialdifferenz zwischen einem einwerthigen Metalle und einer Salzlösung desselben Metalls ergiebt sich, da $\frac{n_i}{n_e} = 1$ wird,

$$\pi = 0.058 \log \left(\frac{P}{p}\right).$$

Für eine Kette: Metall — Salzlösung 1 — Salzlösung 2 — Metall kommen zunächst die electromotorischen Kräfte zwischen den Electroden und den Salzlösungen in Betracht; diese sind, wenn beide Electroden aus demselben Metall bestehen:

$$\pi_1 = 0.058 \log \left(\frac{P}{p_1}\right)$$

$$\pi_2 = 0.058 \log \left(\frac{P}{p_2}\right).$$

Da beide einander entgegenwirken, so ergiebt sich die gesammte electromotorische Kraft an den Electroden

$$\pi_1 - \pi_2 = \pi = 0.058 \log \frac{p_2}{p_1} \text{ Volt.}$$

Die an der Grenzfläche der Lösungen auftretenden electromotorischen Kräfte lassen sich in einfacher Weise berechnen, wenn man die Summe der osmotischen Drucke der Jonen in beiden Lösungen gleich macht. Für verdünnte Lösungen leicht dissociirbarer Salze erreicht man dies annähernd, wenn man dieselben gleichconcentrirt macht. Bei den folgenden Versuchen ist diese Bedingung meist erfüllt worden, indem wenn möglich $^1/_{10}$ normale Salzlösungen verwendet wurden.

In diesem Falle ist (Ostwald Lehrbuch 2. Aufl. II. 850) $\pi = 0.0002\, T \log \frac{U_1 + V_2}{V_1 + U_2}$, wo U und V die Wanderungsgeschwindigkeiten der Jonen darstellen. Nur für den Fall einer grossen Verschiedenheit der Wanderungsgeschwindigkeiten weicht der Werth $\frac{U_1 + V_2}{V_1 + U_2}$ stark von 1 und mithin sein Logarithmus von 0 ab. Die von Planck für verschiedene Lösungen berechneten Werthe für π (Wiedemann's Annalen XL. 561 ff.), die sich mit Nernst's Messungen in guter Uebereinstimmung befinden, steigen dementsprechend nur in den Fällen, wo die enorm grosse Wanderungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs einseitig ins Spiel kommt, auf mehrere hundertstel Volt. Da es sich bei der folgenden Untersuchung durchweg um sehr bedeutende Potentialdifferenzen an den Electroden handelte, so konnten die geringen

electromotorischen Kräfte zwischen den Lösungen zunächst vernachlässigt werden.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Electroden desselben Metalles, welches beiderseits in miteinander communicirenden Lösungen steht, giebt nun ein directes Maass für die Concentration der Jonen des Metalles in den betreffenden Lösungen (OSTWALD, Lehrbuch 2. Aufl. II. 881). Für einwerthige Metalle haben wir

$$\frac{\pi}{0.058} = \log \frac{p_2}{p_1} \text{ Volt.}$$

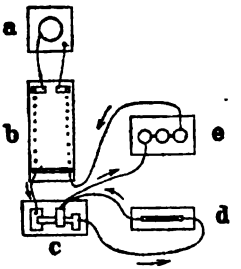
Ist die Concentration der Metallionen in der einen Lösung bekannt, so ist sie es auch in der anderen. Man kann auf diese Weise die Anwesenheit von Metallionen in Lösungen, in denen das Metall durch chemische Reactionen überhaupt nicht mehr zu erkennen ist, nicht nur nachweisen, sondern auch die Concentration der Jonen quantitativ bestimmen. Von diesem Gesichtspunkte aus habe ich zunächst die Potentialdifferenzen von Quecksilberelectroden in Lösungen verschiedener Quecksilbersalze gegen einander bestimmt.

Die Versuche wurden folgendermassen ausgeführt.

Die Lösungen befanden sich in kleinen cylindrischen Gläschen von 50 mm Höhe und 15 mm Durchmesser. Durch den luftdicht schliessenden Stöpsel führte ein unten geschlossenes mit Quecksilber gefülltes Glasröhrchen zur Quecksilberelectrode hinab. Die Verbindung mit der Electrode war durch ein eingeschmolzenes Stückchen Platindraht hergestellt. Etwa in der Höhe von 30 mm trugen die Gläschen ein rechtwinklig nach unten gebogenes Glasröhrchen, dessen unteres Ende durch ein Bäuschchen Filtrirpapier geschlossen war. Die Verbindung zwischen zwei solchen Gläschen wurde durch Eintauchen der Ansatzröhrchen in ein mit $n/_{10}$ Kaliumnitratlösung gefülltes Schälchen hergestellt. In das Quecksilber der inneren Röhrchen tauchten die zum Electrometer führenden Drähte. Diese Anordnung gestattet ein schnelles und bequemes Auswechseln der einzelnen Lösungen.

Zur Messung diente ein LIPPMANN'sches Capillarelectrometer in der von LE BLANC (Z. physikal. Chemie V. 471, s. a. OSTWALD, Lehrbuch 2. Aufl. II. 813) beschriebenen Form. Der ganze Apparat zeigte folgende Anordnung.

a. Leclanché.
b. Widerstandskasten.
c. Schlüssel.
d. Electrometer.
e. Lösungen.



Während der Ruhestellung des Schlüssels ist das Electrometer in sich geschlossen, beim Niederdrücken wird die durch Pfeile angedeutete Verbindung hergestellt. Der Widerstandskasten ist in 9×100 plus 10×10 Einheiten eingetheilt. Indem man von der Stelle ausgeht, wo die Zehner und Hunderter an einander grenzen, kann man durch Verschieben des Drahtes links in Sprüngen von $^1/_{10}$ der electromotorischen Kraft des Leclanché, durch Verschieben des Drahtes rechts in Sprüngen von $^1/_{100}$ fortschreitend entsprechende electromotorische Kräfte derjenigen der zu messenden Kette entgegenschalten und dadurch das Electrometer in die Nullstellung zurückbringen.

Man bestimmt nun am Widerstandskasten zwei Potentialdifferenzen, zwischen denen die der zu messenden Kette liegt, und bestimmt die Bruchtheile des Intervalls nach Verhältniss der Ausschläge. (Vgl. Ostwald, Lehrbuch 2. Aufl. II. 812.)

Das Electrometer gab für $^1/_{100}$ Leclanché 3—4 Scalentheile Ausschlag, Zehntel-Scalentheile konnten geschätzt werden.

Die electromotorische Kraft des Leclanché-Elementes wurde von Zeit zu Zeit mit der eines geaichten Calomel-Elementes verglichen, sie erwies sich als leidlich constant. Gefunden wurde sie

am	5.	November	= 1.194 Volt
»	11.	»	= 1.183 »
»	17.	»	= 1.198 »
»	22.	»	= 1.194 »
»	24.	»	= 1.195 »
»	26.	»	= 1.192 »
»	6.	December	= 1.190 »
»	14.	»	= 1.186 »
»	13.	Januar	= 1.185 »

Zur Messung wurde stets die zu untersuchende Lösung mit einer solchen von $n/_{10}$ Chlorkalium, dann mit einer Lösung von $n/_{10}$ Bromkalium und schliesslich die Lösungen von Chlorkalium und Bromkalium zu einer Kette zusammengestellt. Nur wenn die Differenz der electromotorischen Kräfte der beiden ersteren Ketten auf höchstens einige Tausendstel Leclanché mit der electromotorischen Kraft der letzten übereinstimmte, wurde die Messung als genau angesehen. Gleichzeitig ermöglichte die Messung der bekannten Potentialdifferenz der Kette Chlorkalium — Bromkalium eine stetige Controle des Zustandes der Apparate.

Meistens wurden sehr schwer lösliche, im analytischen Sinne unlösliche Quecksilbersalze untersucht. Hier war natürlich die Herstellung von $^1/_{10}$ normalen Lösungen unmöglich und es wurde daher nur das betreffende negative Jon meist in Gestalt des Kalisalzes in $^1/_{10}$ normaler Lösung verwendet. Ausserdem wurde der Lösung stets etwas von dem schwerlöslichen Quecksilbersalz zugefügt. Man erreicht dadurch zweierlei: Einmal sättigt sich die Lösung sehr schnell mit Quecksilberionen und man erhält sehr bald im Gleichgewicht befindliche Lösungen. Zweitens werden etwaige Verunreinigungen der Lösungen durch Salze, welche eine höhere Potentialdifferenz gegen Quecksilber zeigen als das zu untersuchende, unschädlich gemacht. Die Erzeugung der höheren Potentialdifferenz beruht ja darauf, dass die betreffenden Stoffe die Quecksilberionen aus den Lösungen entfernen, indem sie sich mit ihnen verbinden, und somit den osmotischen Druck der Quecksilberionen herabdrücken. Die Anwesenheit des überschüssigen Quecksilbersalzes bedingt aber einen sofortigen Ersatz der entfernten Quecksilberionen.

Die gemessenen Potentialdifferenzen sind natürlich nicht denen gleich, welche die schwerlöslichen Quecksilbersalze in reinem Wasser gegen Quecksilber zeigen würden, sondern höher. Denn da z. B. in einer Lösung von Quecksilberchlorür, wenn letzteres im Ueberschuss am Boden liegt, das Product der Quecksilber- und der Chlorionen nach den Gesetzen der Massenwirkung constant sein muss, so wird der osmotische Druck der Quecksilberionen durch die in der Chlorkaliumlösung vorhandenen Chlorionen entsprechend herabgedrückt.

Eine directe Bestimmung des osmotischen Druckes der Quecksilberionen in einer Lösung von Quecksilberchlorür in reinem Wasser durch Messung der Potentialdifferenz würde,

abgesehen von der Schwierigkeit, welche das geringe Leitvermögen der Lösung bedingt, an der Unmöglichkeit scheitern, hinlänglich reines Wasser zu beschaffen.

Aus demselben Grunde, aus dem die Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und reinem Wasser nicht unendlich gross gefunden wird, wie es die Theorie verlangt, sondern kleiner, würde auch die Potentialdifferenz der Quecksilberchlorürlösung gegen Quecksilber zu klein gefunden werden. Genau wie in reines Wasser würden auch in die Quecksilberchlorürlösung durch den gelösten Sauerstoff oder andere Verunreinigungen weitere Quecksilberionen hineingebracht werden[1]).

Bis auf eine kleine Correctionsgrösse kann man aber den osmotischen Druck der Jonen einer reinen Quecksilberchlorürlösung aus der Potentialdifferenz der Lösung des Quecksilberchlorürs in Chlorkaliumlösung von bekanntem Gehalt berechnen. Er ist gleich der Quadratwurzel aus dem Product des Druckes der Quecksilberionen in letzterer Lösung und des Druckes der Chlorionen. Den Druck der Quecksilberionen kann man aber aus der Potentialdifferenz, den der Chlorionen aber aus dem Gehalt der Lösung an Chlorkalium unter Berücksichtigung der aus der Leitfähigkeit zu bestimmenden Dissociation der Lösung berechnen.

Die im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen + und — beziehen sich auf die Ladung, welche die Quecksilberelectrode unter der betreffenden Lösung annimmt, so dass also der Ausdruck

$$Hg\,Cl \text{ in } {}^{n}/_{10}\,KCl : Hg\,Br \text{ in } {}^{n}/_{10}\,KBr = + 0.449 \text{ Volt}$$

bedeutet, dass im Verbindungsdrahte der positive Strom vom Quecksilber unter der Quecksilberchlorürlösung zum Quecksilber unter der Bromürlösung fliesst.

Die ersten Versuche wurden angestellt, um experimentell die erwartete Thatsache zu erhärten, dass die Potentialdifferenz der Kette Quecksilber in Lösung *A* zu Quecksilber in Lösung *B* gleich ist der Summe der Potentialdifferenzen von *Hg* in Lösung *A* zu *Hg* in Lösung *C* und von *Hg* in Lösung *C* zu *Hg* in Lösung *B*.

Folgende Werthe wurden gefunden:

---

1) Vgl. Warburg, Wiedemann's Annalen N. F. XXXVIII. 328.

HgJ in $^n/_{10}$ KNO_3 : $HgCl$ in $^n/_{10}$ KCl = + 0.452 V.
$HgCl$ in $^n/_{10}$ KCl : $HgBr$ in $^n/_{10}$ KBr = + 0.116 »
+ 0.268 V.
HgJ in $^n/_{10}$ KNO_3 : $HgBr$ in $^n/_{10}$ KBr = + 0.267 »

Der Werth der Potentialdifferenz in den Ketten mit Quecksilberjodür ist ein zufälliger, von den Verunreinigungen der Salpeterlösung abhängiger. Bestimmte Werthe erhält man erst durch Zusatz von Jodkalium. Während Quecksilber unter Quecksilberjodür in Salpeterlösung positiv gegen Hg unter $HgCl$ in KCl wird, kehrt sich das Verhältniss auf Zusatz einer Spur Jodkalium zur Salpeterlösung geradezu um. Weiterer Zusatz von Jodkalium bewirkt eine Aenderung in demselben Sinne und zwar wird die Wirkung gleicher Zusätze um so geringer, je mehr Jodkalium bereits in der Lösung vorhanden ist — wie es nach den Gesetzen der Massenwirkung zu erwarten ist.

$HgCl$ in $^n/_{10}$	: HgJ in $^n/_{10}$ KNO_3				= − 0.452 V.
»	»	+ 1 Tropfen	$^n/_{10}$	KJ	= + 0.423 »
»	»	+ 2	»	»	= + 0.461 »
»	»	+ 3	»	»	= + 0.492 »
»	»	+ 4	»	»	= + 0.209 »
»	»	+ 5	»	»	= + 0.215 »
»	»	+ 6	»	»	= + 0.218 »

Für die folgenden Versuche wurde die Lösung von Quecksilberjodür in $^n/_{10}$ KNO_3 nach Zusatz von 6 Tropfen KJ verwendet.

Die zehntelnormale Lösung von Mercuronitrat enthielt so viel freie Salpetersäure, dass die Ausscheidung von basischem Salz verhindert war. Quecksilberchlorür und -bromür waren im Ueberschuss in $^n/_{10}$ KCl und $^n/_{10}$ KBr suspendirt. Die abgekürzten Bezeichnungen dürften wohl nicht missverständlich sein.

$HgNO_3$:$HgCl$ = + 0.356 V.
$HgCl$:$HgBr$ = + 0.116 »
$HgBr$:HgJ = + 0.101 »
+ 0.573 V.
Sa. + 0.472; $HgNO_3$:$HgBr$ = + 0.473
» + 0.217; $HgCl$:HgJ = + 0.218
$HgNO_3$:HgJ = + 0.572 »

Nach achttägigem Stehen der Lösungen in den zur Messung dienenden Zellen hatte sich nur die Lösung von Quecksilberjodür

in Salpeter und Jodkalium wesentlich geändert, indem $HgCl$: HgJ anstatt $+ 0.218 = + 0.067$ gefunden wurde.

Auf erneuten Zusatz von 6 Tropfen $^n/_{10}$ KJ stellte sich annähernd das frühere Verhältniss wieder her, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

$HgNO_3 : HgCl$	$+ 0.360$	0.481	$HgNO_3 : HgBr$	$+ 0.481$
$HgCl : HgBr$	$+ 0.121$			
$HgBr : HgJ$	$+ 0.106$	0.227	$HgCl : HgJ$	$+ 0.232$
	$+ 0.587$			
$HgNO_3 : HgJ$	$+ 0.593$			

Für die folgenden Versuche wurde, wie bereits Seite 74 erwähnt, stets Quecksilber unter der zu untersuchenden Lösung einmal mit Hg unter $^n/_{10}$ KCl und dann mit Hg unter $^n/_{10}$ KBr zur Kette zusammengestellt. Angegeben sind nur die Potentialdifferenzen der ersteren Kette. Der Ausdruck Lösung $A = \pm n$ Volt bedeutet, dass das Quecksilber unter der betreffenden Lösung positiv oder negativ gegen Quecksilber unter $^n/_{10}$ KCl bei Gegenwart von überschüssigem $HgCl$ wird.

Die sehr oft gemessene Lösung $HgBr$ in $^n/_{10}$ KBr wurde $= - 0.119$ Volt gefunden. Die Abweichungen betrugen nur $^1/_{1000}$ Volt.

Die Jodverbindungen des Quecksilbers zeigten folgende Potentialdifferenzen

HgJ in $^n/_{10}$ $KJ = - 0.295$ V.

Dieselbe Lösung mit Schwefelsäure stark angesäuert

$- 0.365$ V.

Besondere Beachtung verdienen die Lösungen leicht löslicher Quecksilbersalze, welche trotzdem eine hohe Potentialdifferenz gegen Quecksilber aufweisen. Hierher gehört die Lösung von Quecksilberjodid in Jodkalium. Die hohe Potentialdifferenz erklärt sich daraus, dass die Jonen des complexen Salzes K_2HgJ_4 $2K$ einerseits und HgJ_4 andererseits sind. Quecksilberjonen sind also nur in einem der weiteren Dissociation des Jons HgJ_4 entsprechenden Betrage vorhanden[1]).

$^n/_{10}$ Jodkalium wurde durch längere Digestion mit frisch gefälltem Mercurijodid gesättigt. In der Lösung ist die Verbindung K_2HgJ_4 anzunehmen.

1) Ostwald, Lehrbuch 2. Aufl. II. 879.

10 ccm $^n/_{10}$ K_2HgJ_4		= — 0.244 V.
» »	+ 9 ccm $^n/_{10}$ KJ	— 0.277 »
» »	+ 10 » »	— 0.276 »
» »	+ 11 » »	— 0.280 »
Nach Ansäuern mit Schwefelsäure. . .		— 0.316 »

Ein zweiter Versuch gab folgende Zahlen:

$^n/_{10}$ K_2HgJ_4	= — 0.241
Nach Ansäuern mit Schwefelsäure	= — 0.321
Mit Natronlauge wieder übersättigt	= — 0.250.

Die Messungen sind deshalb nicht als sehr genau anzusehen, weil die Lösungen in Berührung mit der Quecksilberelectrode sehr schnell Quecksilberjodür abscheiden. Immerhin wird aber während der Zeit, welche die Messungen beanspruchen, nur ein kleiner Theil des Jodides reducirt; die Lösung gab mit Schwefelammonium nach Beendigung der Versuche einen reichlichen Niederschlag von Quecksilbersulfid.

Fügt man zu der mit Mercurijodid gesättigten Lösung von $^n/_{10}$ KJ noch einmal das gleiche Volum $^n/_{10}$ Jodkalium von vornherein hinzu, so findet die Bildung von Jodür an der Electrode nur sehr langsam statt. Eine solche Lösung zeigte eine Potentialdifferenz von — 0.264 V., nach dem Ansäuern mit Schwefelsäure — 0.315 V.

Unter einer Lösung von Mercurijodid in stark überschüssigem Jodkalium bleibt Quecksilber vollständig blank. Potentialdifferenz gemessen — 0.289. Eine Reduction findet demnach wenn überhaupt nur sehr langsam statt. Das ist zu erwarten, da Quecksilberjodür bekanntlich durch überschüssiges Jodkalium unter Abscheidung von Quecksilber und Bildung von Kaliumquecksilberjodid gelöst wird. Ob die Reaction

$$2\,HgJ + 2\,KJ = K_2HgJ_4 + Hg$$

im directen oder im umgekehrten Sinne verläuft, hängt demnach von dem Mengenverhältniss der Reagentien ab. Wie bei jeder umkehrbaren Reaction tritt schliesslich ein nur von den wirksamen Mengen abhängiger Gleichgewichtszustand ein, gleichgültig von welchem Zustande des Systems man ausgeht.

Interessant ist der Zusammenhang dieses Gleichgewichtszustandes mit der Potentialdifferenz. Es hat sich im Verlaufe dieser Untersuchung gezeigt, dass sich immer diejenigen mög-

lichen Quecksilberverbindungen bilden, deren Lösungen gegen Quecksilber die höchste Potentialdifferenz, also den geringsten osmotischen Druck der Jonen zeigen, wenn nicht besondere im entgegengesetzten Sinne wirkende Kräfte überwiegen. Auf diesen Satz wird noch mehrfach zurückzugreifen sein. Aus den oben angeführten Messungen, die für diesen Zweck allerdings noch vervollständigt werden müssen, lässt sich wenigstens so viel ersehen, dass der Gleichgewichtszustand der Lösung, welche Quecksilberjodür, Kaliumquecksilberjodid, Jodkalium und Quecksilber enthält, derjenige zu sein scheint, in welchem die Lösung die höchste Potentialdifferenz gegen Quecksilber aufweist, also am wenigsten freie Quecksilberjonen enthält.

Für HgJ in $^n/_{10}$ KJ wurde die Potentialdifferenz — 0.295 gefunden. Eine solche Lösung ändert sich nur sehr langsam, ist also nahezu im Gleichgewicht.

Die Lösung von $^n/_{10}$ K_2HgJ_4 mit dem gleichen Volum $^n/_{10}$ KJ zeigt die Potentialdifferenz — 0.27, schon ziemlich nahe übereinstimmend mit der der Lösung von HgJ in $^n/_{10}$ KJ. Wie erwähnt, scheidet Quecksilber aus der Lösung nur sehr langsam Jodür ab, die Concentration der Quecksilberjonen ist nahezu gleich der in ersterer Lösung. Die Lösung von Quecksilberjodid in stark überschüssigem $^n/_{10}$ KJ, deren Potentialdifferenz — 0.289 beträgt, wird durch Quecksilber überhaupt nicht mehr sichtbar verändert.

Dagegen wird die Lösung von $^n/_{10}$ K_2HgJ_4, deren Potentialdifferenz nur 0.244 V. ausmacht, durch Quecksilber sehr schnell reducirt.

Quecksilberrhodanür in $^n/_{10}$ Rhodankalium zeigt eine Potentialdifferenz von — 0.047 V. Die Differenz entspricht etwa derjenigen, welche die meisten Verbindungen geben, in denen Quecksilber an Stickstoff gebunden ist, während die Schwefelverbindungen durchweg weit höhere Differenzen aufweisen. Man könnte diese Thatsache als Wahrscheinlichkeitsgrund dafür annehmen, dass im Rhodanür das Quecksilber an Stickstoff gebunden ist.

Ammoniumverbindungen des Quecksilbers.

NH_2Hg_2Cl	in $^n/_{10}$ NH_3	$= -0.075$
»	» $^n/_{10}$ KCl	$= -0.002$
»	» $^n/_{10}$ $ClNH_4$	$= -0.000$
NH_2Hg_2Br	» $^n/_{10}$ NH_3	$= -0.087$
NH_2Hg_2Br	» $^n/_{10}$ NH_3 : $HgBr$ in $^n/_{10}$ KBr	$= +0.024$
»	» $^n/_{10}$ KBr : » » » »	$= 0.000$

Die Potentialdifferenz der Quecksilberammoniumverbindungen in $^n/_{10}$ NH_3 liegt um rund 0.08 V. höher als die von $HgCl$ in $^n/_{10}$ KCl, um etwa 0.02 tiefer als die von $HgBr$ in $^n/_{10}$ KBr. Das Ammoniak setzt also den osmotischen Druck der Quecksilberionen weiter stärker herab als die löslichen Chlorverbindungen und etwas weniger energisch als die Bromverbindungen. Dem entsprechend wird Quecksilberchlorür leicht und vollständig in die Ammoniumverbindung verwandelt, aber auch das Bromür erleidet noch die analoge Umwandlung.

Dagegen war zu erwarten, dass Quecksilberjodür, wenn überhaupt, nur schwierig durch Ammoniak angegriffen werden würde; denn die Potentialdifferenz des Jodquecksilbers in Jodkaliumlösung ist um rund 0.2 V. grösser, als die der Ammoniumverbindungen in Ammoniak. Die Reaction

$$2HgJ + 2NH_3 = NH_2Hg_2J + JNH_4$$

sollte demnach im directen Sinne nur dann verlaufen, wenn ein grosser Ueberschuss von Ammoniak die geringe Neigung zur Bildung der Ammoniumverbindung ausgleicht.

In der That wird Quecksilberjodür von verdünntem Ammoniak so gut wie gar nicht verändert; erst bei längerer Behandlung mit sehr concentrirtem Ammoniak wird es in eine schwarze Ammoniumverbindung übergeführt, die jedoch beim Auswaschen mit Wasser, ja mit verdünntem Ammoniak sofort zerlegt wird und gelbes Quecksilberjodür (oder Oxyjodür?) hinterlässt.

Als die nicht weiter ausgewaschene Ammoniumverbindung in $^n/_{10}$ NH_3 suspendirt wurde, wobei sie, wie erwähnt, sofort gelb wurde, ergab die Lösung eine Potentialdifferenz von ca. — 0.15 V. Das Constantwerden der sehr schwankenden Werthe wurde nicht abgewartet.

Harnstoff wirkt bei Gegenwart von Natriumcarbonat ganz ähnlich wie Ammoniak, bei Gegenwart von Natriumbicarbonat

giebt er dieselben Werthe wie letzteres allein. Das Nitrat wirkt wie ein Alkalinitrat, auch freier Harnstoff vermag den osmotischen Druck der Quecksilberionen in einer Alkalinitratlösung nicht herabzudrücken.

Reine Harnstofflösung konnte nicht geprüft werden, da sie zu wenig leitet.

$^n/_{10}$ Harnstoffnitrat	+ 0.237 V.
» » nach Zusatz von ca. $^1/_2$ Vol. $^n/_{10}$ $HgNO_3$	+ 0.347 »
» KNO_3 mit 1 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	+ 0.300 »
nach Zusatz von $^1/_2$ Vol. $^n/_{10}$ Harnstoff	+ 0.283 »
$^n/_{10}$ Harnstoff mit ca. $^1/_{10}$ Vol. $^n/_{10}$ $NaHCO_3$ und 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	+ 0.099 »
Dasselbe mit ca. dem gleichen Volumen $^n/_{10}$ $NaHCO_3$	+ 0.086 »
($NaHCO_3$ allein	+ 0.114 »)
$^n/_{10}$ Harnstoff mit etwas $^n/_{10}$ $NaOH$ und 2 Tropfen $HgNO_3$	— 0.141 »
($^n/_{10}$ $NaOH$ allein	— 0.119 »)
$^n/_{10}$ Harnstoff und 2 Tropfen $HgNO_3$ nach Zusatz einiger Tropfen Na_2CO_3	— 0.029 »
Dasselbe mit ca. $^1/_3$ Vol. 5% Na_2CO_3	— 0.063 »
($^n/_{10}$ Na_2CO_3 allein	+ 0.086 »)

Im letzteren Falle kommt die Erniedrigung des osmotischen Druckes der Quecksilberionen auf Rechnung des Harnstoffes, da Natriumcarbonat allein eine weit geringere Wirkung ausübt.

Die Alkaliverbindungen der organischen Imide wirken wesentlich stärker als Ammoniak, die freien Imide dagegen ganz bedeutend schwächer.

$^n/_{10}$ Succinimidkalium + 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	— 0.159
Dasselbe nach Zusatz etwa der gleichen Menge festen Succinimids	— 0.161
$^n/_{10}$ Succinimid durch etwas $^n/_{10}$ KNO_3 leitend gemacht	+ 0.085
nach Zusatz von 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	+ 0.223

Interessant ist das Verhalten des Succinimidquecksilberoxyds. Die Lösung zeigt eine hohe Potentialdifferenz gegen Quecksilber; daraus geht hervor, dass die Verbindung nur sehr

wenig discociirt ist. Im Einklang damit steht auch die Thatsache, dass die Lösung so gut wie gar nicht leitet.

Die Lösung wurde durch Sättigen von $^n/_{10}$ Succinimid mit frisch gefälltem Quecksilberoxyd dargestellt. Die Potentialdifferenz schwankte um + 0.23 V.

Nach Zusatz von 10 Tropfen $^n/_{10}$ *NaOH* und 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$ wurde — 0.031 gefunden, nach weiterem Zusatz von überschüssigem Succinimid — 0.027.

$^n/_{10}$ $C_4H_4O_2NHg$ mit Natriumcarbonat und 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$ = — 0.031.

Die Lösung des Succinimidquecksilbers wird durch die Reagentien gefällt, welche gegen Quecksilber eine höhere Potentialdifferenz zeigen als das Succinimidquecksilber, dagegen nicht durch diejenigen, welche eine geringere geben.

Es fällen Ammoniak (— 0.08), Natronlauge (— 0.119), Jodkalium (— 0.24), Schwefelammon (— 0.9), nicht dagegen Natriumcarbonat, -phosphat und -bichromat (+ 0.27 bis + 0.08), letztere auch bei Gegenwart von Carbonat nicht.

Quecksilber bleibt unter der Lösung blank.

Natriumphtalimid	— 0.233
2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$ hinzu	— 0.228
Ueberschüssiges Phtalimid hinzu	— 0.232

Nach Ansäuern mit Schwefelsäure wurde erst nach etwa einem Tage der constante Werth + 0.267 gefunden.

Hier entsteht also die Quecksilberverbindung mit dem höheren Druck der Jonen; es ist aber zu beachten, dass bei der Reaction

$$2\,Hg(C_8H_4O_2N) + H_2 - SO_4 = 2\,C_8H_5O_2N + Hg_2 - SO_4$$

der Bildung der Quecksilberionen ein Verschwinden von Wasserstoffionen entspricht.

Cyanverbindungen.

$^n/_{10}$ K_2HgCy_4	— 0.317
Nach Ansäuern mit Schwefelsäure	— 0.020
$^n/_{10}$ KCN mit ca. 10 % $^n/_{10}$ K_2HgCy_4	— 0.584
Nach Ansäuern mit Schwefelsäure	— 0.051

Die Potentialdifferenz ist im Vergleich mit derjenigen der übrigen Stickstoffverbindungen auffällig hoch; die Vermuthung, dass diese Erscheinung dadurch bedingt sei, dass in den Cyan-

verbindungen das Quecksilber an Kohlenstoff gebunden ist, fand durch die Prüfung einiger Verbindungen, in denen der durch Metalle substituirbare Wasserstoff als an den Kohlenstoff gebunden anzunehmen ist, keine Bestätigung.

$^n/_{10}$ Kaliumacetessigester mit 2 Tropfen $HgNO_3$	— 0.198
$^n/_{10}$ Kaliumnitroaethan » » » »	— 0.151
$^n/_{10}$ KOH » » » »	— 0.131)
$^n/_{10}$ Kaliumnitroaethan mit überschüssigem Nitroaethan versetzt, nach 1 Tag constant	+ 0.044

Die höchsten Potentialdifferenzen weisen die Schwefelverbindungen auf. Dieselben sind, wenn man von den Cyanverbindungen absieht, durchweg weit höher als die der Stickstoffverbindungen. Der Sulfoharnstoff reiht sich in dieser Hinsicht eher den Schwefel- als den Stickstoffverbindungen an. Es scheint demnach der Thioharnstoff den Metallen gegenüber wie in vielen anderen Fällen im Sinne der Formel $H_2N\text{-}C(NH)SH$ zu reagiren.

$^n/_{10}$ Thioharnstoff zur Ermöglichung der Messung mit $^1/_3$ Vol. $^n/_{10}$ KNO_3 versetzt	— 0.238
Nach Zusatz von 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	— 0.202
Mit H_2SO_4 angesäuert	— 0.262
$^n/_{10}$ Thioharnstoff + $^1/_3$ Vol. $^n/_{10}$ Na_2CO_3	— 0.336
Nach Zusatz von 2 Tropfen $HgNO_3$	— 0.299

Der letzte Werth wurde erst nach einem Tage constant, jedenfalls infolge der Bildung von Schwefelquecksilber und Cyanamid. Ebenso wurden auch bei der Untersuchung der ersten Lösung nach Ansäuern mit Schwefelsäure erst nach längerer Zeit constant bleibende Zahlen gefunden.

$^n/_{10}$ xanthogensaures Kali mit 2 Tropfen $HgNO_3$	— 0.474
nach Zusatz von $^1/_3$ Vol. $^n/_{10}$ Na_2CO_3	— 0.453
Isamylmercaptan, $(CH_3)_2CH\text{-}CH_2\text{-}CH_2SH$, in $^n/_{10}$ Na_2CO_3 suspendirt, nach Zusatz von 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$	— 0.749
Dasselbe in $^n/_{10}$ H_2SO_4 suspendirt nach Zusatz von 2 Tropfen $HgNO_3$	— 0.269

Beide Ketten gaben erst nach etwa eintägigem Stehen constante Zahlen, jedenfalls weil die Sättigung der Lösung mit dem schwerlöslichen Mercaptan längere Zeit in Anspruch nahm.

$^n/_{10}$ Natriumthiosulfat nach Zusatz einer geringen Menge des schwarzen Niederschlages, welcher durch Thiosulfat aus Mercuronitratlösung gefällt wird — 0.347

Dasselbe nach Zusatz einer Ueberschusses des Niederschlages — 0.197

Zur Prüfung eines Alkalisulfhydrates wurde $^n/_{10}$ Natronlauge mit Schwefelwasserstoff gesättigt; die Lösung enthielt natürlich einen Ueberschuss von Schwefelwasserstoff. Die Lösung von Natriumsulfid wurde erhalten, indem die Sulfhydratlösung mit $^n/_{10}$ Natronlauge bis zum Verschwinden des Geruches versetzt wurde. Zugesetzt wurde frisch gefälltes Mercurisulfid oder Mercurosulfid ($HgS + Hg$?). Je nach Natur und Menge des Zusatzes wurden etwas verschiedene Werthe erhalten.

Natriumsulfhydrat Hg_2S im Ueberschuss — 0.726
» HgS » » ca. — 0.69

Die letztere Lösung gab auch nach 2 Tagen keine constanten Zahlen.

Natriumsulfid, Hg_2S im Ueberschuss — 0.858
» » wenig — 0.879
» HgS im Ueberschuss — 0.862
» » wenig — 0.894

Einen hohen osmotischen Druck der Quecksilberionen und dementsprechend eine niedrige Potentialdifferenz zeigen alle untersuchten Sauerstoffsalze des Quecksilbers. Die osmotischen Drucke liegen auch bei den analytisch als unlöslich betrachteten meist bedeutend höher als beim Chlorür; nur die freien Alkalien setzen den Druck etwa ebenso stark wie Bromkalium herab.

Bei der Untersuchung der Carbonate wurde basisches Mercuri- oder Mercurocarbonat zugesetzt; nur die Wirkung des neutralen Carbonates wurde durch die Natur des Zusatz wesentlich beeinflusst.

$^n/_{10}$ $NaHCO_3$ ($^1/_{10}$ M.G. im Liter). Zusatz gelblichweisses Carbonat, erhalten durch Eingiessen von $HgNO_3$ in überschüssiges $NaHCO_3$ + 0.114

$^n/_{20}$ $NaHCO_3$ mit demselben Zusatze + 0.121

$^n/_{10}$ $NaHCO_3$. Zusatz basisches Carbonat, welches beim Eingiessen von $NaHCO_3$ in überschüssige Sublimatlösung entsteht. Beim umgekehrten Verfahren entsteht kein Niederschlag. Die

Lösung gab erst nach einem Tage constante Werthe. Gleichzeitig war das braunrothe Carbonat kirschroth geworden. $\pi = +0.116$

$^n/_{10}$ Na_2CO_3 ($^1/_{20}$ M. G. im Liter). Zusatz gelbes Carbonat erhalten durch Eingiessen von $HgNO_3$ in überschüssiges Na_2CO_3 $+0.086$

Nach eintägigem Stehen war der Niederschlag schwarz geworden $\pi = +0.084$

$^n/_{10}$ Na_2CO_3. Zusatz rothbraunes Carbonat aus Quecksilberchlorid und überschüssigem Natriumcarbonat. Erst nach eintägigem Stehen wurden constante Werthe erhalten, gleichzeitig war das Carbonat gelb geworden $\pi = +0.017$

Na_2HPO_4 ($^1/_{20}$ M.G. im Liter). Zusatz Hg_3PO_4 $+0.104$

K_2CrO_4 ($^1/_{20}$ M. G. im Liter). Zusatz Hg_2CrO_4 $+0.084$

$K_2Cr_2O_7$ ($^1/_{20}$ M.G. im Liter). Zusatz Hg_2CrO_4 $+0.268$

» ($^1/_{40}$ M.G. im Liter). » » $+0.229$

Neutrales weinsaures Kali. $^1/_{20}$ M. G. im Liter. Zusatz Mercurotartrat $+0.218$

Neutrales oxalsaures Kali. $^1/_{20}$ M. G. im Liter. Zusatz Mercurooxalat $+0.134$

Nach Zusatz von überschüssiger Oxalsäure $+0.145$

$^n/_{10}$ Kalknatronlauge. Zusatz Hg_2O ($HgO + Hg$?) -0.119

» » » HgO -0.123

$^n/_1$ KOH. Zusatz 2 Tropfen $^n/_{10}$ $HgNO_3$ -0.131

In der folgenden Tabelle sind die hauptsächlichsten Resultate der Messungen übersichtlich zusammengestellt.

Nr.	Lösung	Zusatz	π	
1	$^n/_{10}$ $HgNO_3$	HNO_3	$+0.358$	Sauerstoffsalze.
2	$^n/_{10}$ $K_2Cr_2O_7$	Hg_2CrO_4	$+0.268$	
3	$^n/_{10}$ $K_2C_4H_4O_6$	$Hg_2C_4H_4O_6$	$+0.218$	
4	$^n/_{10}$ $K_2C_2O_4$	$Hg_2C_2O_4$	$+0.134$	
5	$^n/_{10}$ $NaHCO_3$	bas. Mercurocarbonat	$+0.114$	
6	$^n/_{10}$ Na_2HPO_4	$Hg_3(PO_4)$	$+0.104$	
7	$^n/_{10}$ Na_2CO_3	bas. Mercurocarbonat	$+0.084$	
8	$^n/_{10}$ $ClNH_4$	$ClNH_2Hg_2$	0.000	Chlorverbindungen.
9	$^n/_{10}$ KCl	$HgCl$	0.000	

Nr.	Lösung	Zusatz	π	
10	$^n/_{10}\ H_2HgCy_4$	H_2SO_4	— 0.020	
11	$^n/_{10}\ Hg(C_4H_4O_2N)_2$	$HgNO_3 \cdot Na_2CO_3$	— 0.031	
12	$^n/_{10}\ KCNS$	$HgCNS$	— 0.047	
13	CON_2H_4	$Na_2CO_3 \cdot HgNO_3$	— 0.063	
14	$^n/_{10}\ NH_3$	$ClNH_2Hg_2$	— 0.075	
15	$^n/_{10}\ KBr$	$HgBr$	— 0.119	→ Bromverbindung.
16	$^n/_{10}\ NaOH$	Hg_2O	— 0.119	Stickstoffverbindgn.
17	$^n/_{10}\ KOH$	Hg_2O	— 0.131	→ Oxydhydrate.
18	$^n/_{10}\ CH_3CHKNO_2$	$HgNO_3$	— 0.151	
19	$^n/_{10}\ C_4H_4O_2NK$	$HgNO_3$	— 0.159	Kohlenstoffverbind.
20	$^n/_{10}CH_3COCHKCOOC_2H_5$	$HgNO_3$	— 0.198	
21	$^n/_{10}\ C_8H_4O_2NNa$	$HgNO_3$	— 0.228	
22	$^n/_{10}\ K_2HgJ_4$		— 0.244	Jodverbindungen.
23	$^n/_{10}\ KJ$	HgJ	— 0.295	
24	CSN_2H_4	$Na_2CO_3 \cdot HgNO_3$	— 0.299	
25	$^n/_{10}\ K_2HgCy_4$		— 0.317	
26	$^n/_{10}\ H_2HgJ_4$	H_2SO_4	— 0.321	
27	$^n/_{10}\ Na_2S_2O_3$	$Hg_2S_2O_2$?	— 0.347	
28	$^n/_{10}\ C_2H_5OCS_2K$	$HgNO_3$	— 0.474	Schwefelverbindgn.
29	$^n/_{10}\ KCN$	K_2HgCy_4	— 0.584	→ Cyanverbindung.
30	$^n/_{10}\ NaSH$	$H_2S \cdot Hg_2S$	— 0.726	
31	C_5H_9SH	$Na_2CO_3 \cdot HgNO_3$	— 0.749	
32	$^n/_{10}\ Na_2S$	HgS	— 0.894	

Nach den Ausführungen auf Seite 72 lässt sich aus der gemessenen Potentialdifferenz einer Kette das Verhältniss der osmotischen Drucke der Quecksilberionen in den beiden verwendeten Lösungen berechnen: $\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\pi}{0.058}$.

Gemessen wurde π in

$^n/_{10}\ HgNO_3 : HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl \quad + 0.358$

$$\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{0.358}{0.058} = 6.17; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1479 \cdot 10^3$$

$^n/_{10}\ HgNO_3 : HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl \quad = + 0.358$

$HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl : HgBr$ in $^n/_{10}\ KBr \quad = + 0.119$ also

$^n/_{10}\ HgNO_3 : HgBr$ in $^n/_{10}\ KBr \quad = + 0.477$

$$\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{0.477}{0.058} = 8.22; \quad \frac{p_2}{p_1} = 1660 \cdot 10^5$$

$^n/_{10}\ HgNO_3 : HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl$ $= + 0.358$
$HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl : HgS$ in Na_2S $= + 0.894$ also
$^n/_{10}\ HgNO_3 : HgS$ in Na_2S $= + 1.252$

$$\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1.252}{0.058} = 21.6\,; \quad \frac{p_2}{p_1} = 3981 \cdot 10^{18}.$$

In der zehntelnormalen Quecksilbernitratlösung sind, vollständige Dissociation vorausgesetzt, 20 g Quecksilberionen pro Liter vorhanden oder 1 mg Jonen in 0.00005 Liter.

Die letztere Zahl, multiplicirt mit den oben gefundenen Werthen der Verhältnisse der osmotischen Drucke $\frac{p_2}{p_1}$, giebt die Anzahl von Litern, in denen je 1 mg Jonen in den betreffenden Lösungen vorhanden sind. Danach enthalten die Lösungen von

$HgCl$ in $^n/_{10}\ KCl$	1 mg Quecksilberionen	in rund	74 Litern
$HgBr$ in $^n/_{10}\ KBr$	»	» »	1300 »
HgS in Na_2S	»	» in rund	200000 Billionen »

Nun wiegt ein Atom Wasserstoff nach annähernder Berechnung $2 \cdot 10^{-24}$ g; 1 mg Wasserstoff enthält also $5 \cdot 10^{17}$ Atome
1 » Quecksilber » » $25 \cdot 10^{14}$ »

Da nun in der Lösung von Quecksilbersulfid diese Anzahl von Jonen in 200000 Billionen Litern gelöst sind, so ist in 80 Litern der Lösung nur ein Quecksilberion vorhanden. Die Bedeutung dieser Zahl ist natürlich nicht die, dass dieses eine Atom beständig in 80 Litern der Lösung umherwanderte; es gehen vielmehr immerfort überall in der Lösung Quecksilberatome in den Jonenzustand und wieder in Verbindung mit Schwefel über; die Zeit aber, während welcher ein beliebig kleines Flüssigkeitstheilchen ionenfrei ist, verhält sich zu der Zeit, während welcher ein Jon darin vorhanden ist, wie 80 Liter zum Volum des Flüssigkeitstheilchens.

Anwendung des Electrometers als Indicator beim Titriren.

In einer Kette Quecksilber — $^n/_{10}$ Mercuronitrat — $^n/_{10}$ Mercuronitrat — Quecksilber ist die Potentialdifferenz der Electroden gleich Null. Setzt man nun zu einer der Lösungen Chlor-

kalium, so fällt Quecksilberchlorür aus, der osmotische Druck der Quecksilberionen wird auf dieser Seite geringer und man erhält eine Potentialdifferenz in dem Sinne, dass das Quecksilber unter der mit Chlorkalium versetzten Lösung negativ wird gegen das unter der unveränderten Nitratlösung. Bei weiterem Zusatz von Chlorkalium wird die Potentialdifferenz grösser, und zwar bei gleichen Zusätzen zuerst langsam, dann immer schneller. Die Potentialdifferenz ist gegeben durch die Formel $\pi = 0.058 \lg \frac{p_2}{p_1}$ Volt, wenn man von den geringen electromotorischen Kräften an der Grenze der Lösungen absieht. Bei gleichbleibenden p_2 verdoppelt sich π, wenn p_1 auf $^1/_{100}$ des ursprünglichen Werthes sinkt. Um den Werth von p_1 auf $^1/_{100}$ zu erniedrigen, muss man zu 1000 ccm $^n/_{10}$ $HgNO_3$ 990 ccm. $^n/_{10}$ KCl setzen, wenn man der Einfachheit halber die Salze als völlig dissociirt annimmt. Zu einer weiteren Erniedrigung auf $^1/_{100}$ genügen dann schon 9.9 ccm, dann 0.099 ccm KCl etc. Den stärksten Einfluss auf die Aenderung der Potentialdifferenz übt der Zusatz von Chlorkalium in dem Augenblick, in welchem der letzte Rest des Mercuronitrates ausgefällt wird. Hier steigt die Potentialdifferenz sehr schnell von der einer wenn auch sehr verdünnten Nitratlösung auf diejenige der Chlorürlösung in Chlorkalium. Weiterer Zusatz von Chlorkalium bewirkt alsdann ein verhältnissmässig langsames Steigen der Potentialdifferenz, welches durch die Gesetze der Massenwirkung geregelt ist. Das Product der Chlorionen und Quecksilberionen muss bei Gegenwart von überschüssigem Quecksilberchlorür constant bleiben und somit nimmt der osmotische Druck der Quecksilberionen proportional der wachsenden Menge der Chlorionen ab.

Bringt man umgekehrt in einer Kette Quecksilber — Mercuronitrat — Chlorkalium — Quecksilber zu der Chlorkaliumlösung Quecksilbernitrat, so sinkt die anfängliche hohe Potentialdifferenz zuerst langsam, dann immer schneller, fällt im Augenblick der völligen Ausscheidung des Chlors rapid, um dann allmählich mit stetig abnehmender Geschwindigkeit nahezu auf Null zurückzugehen. Die plötzliche Aenderung der Potentialdifferenz kann man benutzen, um den Punkt der völligen Ausfällung einer Mercuronitratlösung durch Chlorkalium und umgekehrt mit grosser Schärfe zu erkennen.

Zur Ausführung der Titration wurden die Lösungen in weite

Röhren mit am Boden eingeschmolzenem Platindraht gebracht oder in Bechergläser mit einem verjüngten, von einem Platindraht durchsetzten Ansatz am Boden, der zur Aufnahme des Quecksilbers diente. Der ausgebogene Rand der Gefässe gestattete, dieselben an einem geeigneten Gestell aufzuhängen. Die Verbindung zwischen den Lösungen wurde durch ein ebenfalls aufhängbares Näpfchen und zwei Heber hergestellt, welche $^n/_{10}$ Kaliumnitratlösung enthielten.

Die in den Quecksilberlösungen befindlichen Schenkel der Heber waren durch Bäuschchen von Filtrirpapier verschlossen. Die Platindrähte vermittelten die Verbindung der Quecksilberelectroden mit dem Electrometer. In dem einen Gefäss befand sich stets $^n/_{10}$ Mercuronitrat, in dem anderen die zu titrirende Lösung.

Die Werthe von π sind in Bruchtheilen der Klemmspannung eines Leclanché-Elementes ausgedrückt; zur Umwandlung in Volts sind dieselben mit 1.19 zu multipliciren.

Für etwaige anderweitige Benutzung der Zahlen sei hier bemerkt, dass sich die Concentration der Lösungen nicht genau berechnen lässt, da zuweilen zum Nachspülen geringe Mengen Wasser hinzugebracht wurden.

Bei der Titration von 10 ccm $^n/_{10}$ KCl mit annähernd auf $^n/_{10}$ verdünntem $HgNO_3$ wurden folgende Zahlen erhalten:

	π	
ccm $HgNO_3$	I	II
0.00	0.293	0.295
5.00	0.281	
7.50	0.269	0.267
8.50	0.262	
9.50	0.242	0.249
9.80	0.231	
9.90	0.218	
10.00	0.206	0.224
10.05	0.172	0.056
10.10	0.054	
10.15	0.045	
10.20	0.042	
10.30	0.038	
10.50	0.033	
11.50	0.022	
13.50	0.015	

Als umgekehrt 10 ccm Mercuronitratlösung mit $^n/_{10}$ *KCl* titrirt wurden, fand bei Verbrauch von 10 ccm Chlorkalium ein plötzliches Steigen der Potentialdifferenz von 0.05 auf 0.14 statt.

Ebenso wurden 10 ccm $^n/_{10}$ Bromkalium mit Mercuronitrat titrirt.

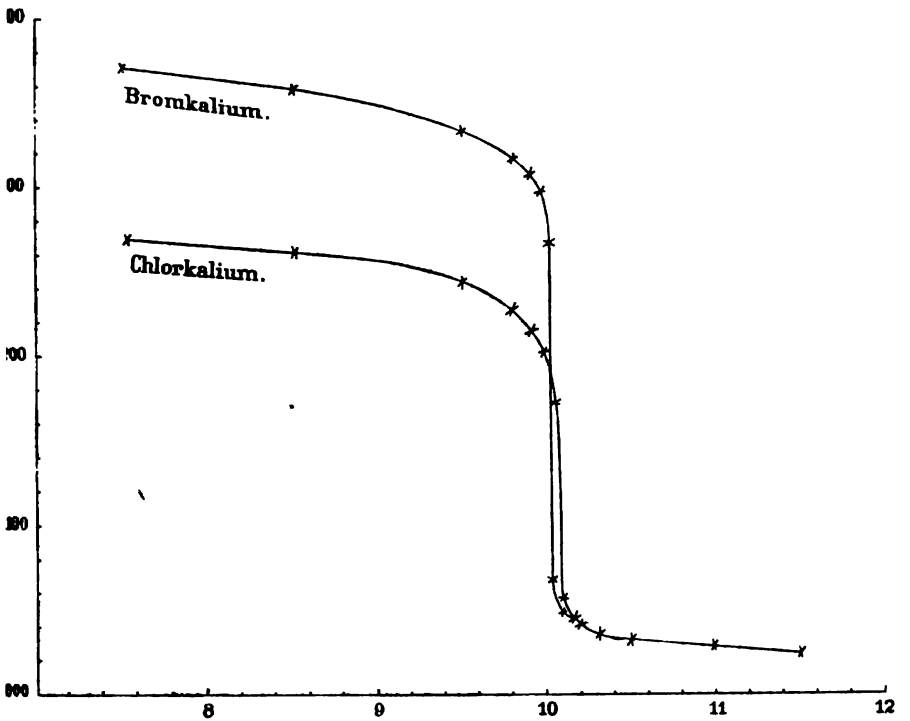
ccm $HgNO_3$	π
0.00	0.388
5.00	0.384
7.49	0.373
8.49	0.360
9.49	0.334
9.79	0.318
9.89	0.306
9.94	0.299
9.99	0.267
10.04	0.067
10.11	0.050
10.99	0.026
12.99	0.018

Der Verlauf der Titration wird durch die Curven auf S. 94 dargestellt. Die Abscissen sind ccm $HgNO_3$, welche zu je 10 ccm *KCl* und *KBr* hinzugesetzt werden, die Coordinaten die Potentialdifferenzen in Leclanché-Einheiten.

Unter den eingehaltenen Versuchsbedingungen bewirkt ein Zusatz von 0.05 ccm des Fällungsmittels im Augenblick der völligen Ausfällung bei der Titration von Chlorkalium einen Sprung der Potentialdifferenz von 0.1—0.15 Leclanché-Einheiten; bei der Titration von Bromkalium beträgt der Sprung rund 0.2 Einheiten. Die Resultate sind demnach bei Anwendung von 10 ccm $^n/_{10}$ normaler Lösungen auf $^1/_2$ % des Werthes genau. Leider kann man die Versuchsfehler nicht durch Anwendung grösserer Flüssigkeitsvolumina oder feinerer Büretten verringern. Beträgt das Endvolum wesentlich mehr als etwa 30 ccm, so ruft ein Zusatz von 0.05 ccm keinen deutlichen Sprung mehr hervor, und umgekehrt darf man bei einem Maximalvolum von 30 ccm die Zusätze nicht viel kleiner als 0.05 ccm machen. Man wird also den Fehler von $^1/_2$ % des Werthes nur dadurch verringern können, dass man aus mehreren Versuchen das Mittel zieht.

Für den Zweck der Titration ist es selbstverständlich nicht

nöthig, die Potentialdifferenzen genau zu messen. Wenn man nach Zusatz eines jeden Tropfens das Electrometer schliesst, so beobachtet man jedesmal eine geringe Verschiebung des Quecksilberfadens; durch Gegenschaltung einer auf etwa $^1/_{100}$ Leclanché gleichen Potentialdifferenz vermittelst des Widerstandkstastens bringt man das Electrometer nahezu auf Null zurück. Der End-



punkt der Reaction wird dann durch plötzliches Fortschiessen des Quecksilberfadens angezeigt.

Jodkalium lässt sich mit Mercuronitrat nicht scharf titriren, da sich ein wenn auch geringer Theil des Quecksilberjodürs mit dem überschüssigen Jodkalium zu Kaliumquecksilberjodid und Quecksiber umsetzt. Gebraucht wurden für 10 ccm $^n/_{10}$ *KJ* 9.80—10.00 ccm $HgNO_3$; anstatt 10.05 (Titer der Lösung gegen

Chlor- und Bromkalium), um einen Sprung der Potentialdifferenz von im Mittel 0.35 auf 0.05 L. zu bewirken.

Bessere Resultate erhält man, wenn man das Jodkalium zum Mercuronitrat fliessen lässt. 10 ccm KJ entsprachen 10.00 und 10.10 $HgNO_3$.

Da es wünschenswerth erschien, das Electrometer für eine bequeme Bestimmungsmethode der Halogene neben einander zu verwerthen, die Titration des Jodes mit Mercuronitrat aber keine günstigen Resultate lieferte, so wurde der Versuch gemacht, die Halogenmetalle mit Silbernitrat unter Anwendung von Silberelectroden zu titriren.

Die Lösungen befanden sich bei diesen Versuchen in gewöhnlichen Bechergläsern, in welche Streifen von Silberblech als Electroden eintauchten. Das käufliche reine Silberblech erwies sich als geeignet, zwei in $^n/_{10}$ $AgNO_3$ eingetauchte Streifen zeigten keine messbare Potentialdifferenz. Das eine Becherglas enthielt $^n/_{10}$ $AgNO_3$, das andere die zu titrirende Lösung. Die Verbindung wurde wieder durch Kaliumnitratlösung vermittelt.

10 ccm $^n/_{10}$ KCl brauchten 10.00 ccm $AgNO_3$.
Abfall von π von 0.205 auf 0.125

10 ccm $^n/_{10}$ KBr brauchten 9.97 ccm $AgNO_3$.
Abfall von π von 0.279 » 0.122

10 ccm $^n/_{10}$ KJ brauchten 9.94 ccm $AgNO_3$.
Abfall von π von 0.310 » 0.125

Umgekehrt kann man auch Silberlösungen mit Chlorkalium titriren, und zwar dürfen neben dem Silber alle Metalle in der Lösung vorhanden sein, welche durch Silber nicht reducirt werden und keine unlöslichen Chlorverbindungen geben. In 8.02 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$ wurde 0.1 g Bleinitrat aufgelöst.

ccm $^n/_{10}$ KCl	π
7.87	0.085
7.93	0.09
7.97	0.095
8.02	0.011
8.05	0.155
8.07	0.20

Der Verlauf der Titration ist deshalb genauer angeführt, weil er zeigt, dass bei zu kleinen Zusätzen des Fällungsmittels statt des einen grossen Sprunges zwei kleinere Sprünge auf-

treten. Bei Zusätzen von 0.05 ccm tritt bei der Titration gewöhnlich ein Sprung von ca. 0.12 auf 0.21 auf. Zuweilen, wenn auch selten, treten auch bei Zusätzen von je 0.05 ccm zwei Sprünge, etwa von 0.10 auf 0.16 und von 0.16 auf 0.23 auf, wie sich aus der Natur des Vorganges von selbst erklärt. In solchen Fällen nimmt man das Mittel aus den Zusätzen, welche die beiden Sprünge bewirkt haben.

In dem vorliegenden Falle würden also 8.06 ccm KCl in Rechnung zu bringen sein, welche 0.0868 g Ag entsprechen, während 8.02 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$ entsprechend 0.0864 g Ag angewendet waren.

In 12 ccm Wasser wurden 0.55 g Kupfervitriol gelöst und 0.18 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$ hinzugesetzt.

Gebraucht KCl		π
0	ccm.	0.085
0.04	»	0.095
0.09	»	0.10
0.13	»	0.115
0.17	»	0.205

Ag gefunden 0.0018 anstatt 0.0019 g.

Rhodankalium lässt sich ebenfalls mit Silbernitrat scharf titriren. Von einer annähernd $^1/_{10}$ normalen Rhodankaliumlösung verbrauchten

5 ccm 5.35 ccm $^n/_{10}$ $AgNO_3$ Sprung von 0.225 auf 0.145
10 » 10.65 » » (=2×5.33) » » 0.23 » 0.125.

Leider lassen sich Chlor-, Brom- und Jodkalium nicht ohne weiteres durch Titration mit Hilfe des Elektrometers als Indicator von einander trennen. Die Potentialdifferenz von Silber in $^n/_{10}$ KJ gegen Silber in $^n/_{10}$ $AgNO_3$ beträgt etwa 0.63 Leclanché, die von Silber in $^n/_{10}$ KBr etwa 0.44 L.; der Unterschied ist also ziemlich beträchtlich. Wenn man aber zu einer Lösung von Jodkalium und Bromkalium wenig Silbernitrat setzt, so fällt gleich von vornherein etwas Bromsilber mit, welches sich mit dem überschüssigen Jodkalium nur langsam umsetzt. Am Elektrometer macht sich dieser Zustand durch fortwährende Schwankungen beim Umrühren der Lösung kenntlich, deren Ende man natürlich, wenn es sich um eine Titration handelt, nicht abwarten kann. Dieselben Umstände machen auch eine Trennung von Brom- und Chlorkalium unmöglich.

Indessen lässt sich eine scharfe Trennung des Jods von Brom und Chlor ermöglichen, wenn man in ammoniakalischer Lösung titrirt. Da das Jodsilber im Gegensatz zum Chlor- und Bromsilber in Ammoniak fast unlöslich ist, so fällt zunächst nur Jodsilber aus. Am Electrometer beobachtet man Folgendes. Die Potentialdifferenz sinkt bei Zusatz eines jeden Tropfens der Silberlösung um etwa 0.01 L. bis ungefähr 0.49 L.; dann findet, gewöhnlich in zwei Sprüngen, ein schneller Abfall auf 0.43—0.40 statt. Bei weiterem Zusatz bleibt die Potentialdifferenz fast ganz constant, da nunmehr die Potentialdifferenz des Ammoniaks gegen Silber erreicht ist. Als Endpunkt der Reaction ist das Mittel der beiden Zusätze anzunehmen, welche die beiden Sprünge veranlassen. Säuert man nunmehr mit Salpetersäure an und titrirt weiter, so sinkt die Potentialdifferenz, ohne dass bei völliger Ausfällung des Broms ein Sprung beobachtet wird, bis auf etwa 0.23 L. Alsdann zeigt ein weiterer Sprung auf etwa 0.15 L. die völlige Ausfällung alles Halogens an, wie folgendes Beispiel zeigt.

Angewendet	5.00 ccm	*KJ*
	1.98 »	*KBr*
	3.00 »	*KCl*
	9.98 ccm.	

Zugesetzt wurden etwa 2 ccm verdünntes Ammoniak.

ccm $AgNO_3$	π	
4.80	0.515	
4.86	0.505	
4.91	0.465	
4.96	0.425	
5.02	0.425	; mit Salpetersäure ausgesäuert.
9.80	0.235	
9.86	0.215	
9.91	0.15	

Danach wurden gebraucht

zur Ausfällung der Jods	4.94	anstatt	5.00 ccm
» » alles Halogens	9.91	»	9.98 »

Auf diese Thatsachen lässt sich nun eine Methode zur Bestimmung der Halogene neben einander gründen, welche für die Ermittelung des Jods und des Gesammthalogens gute Resultate giebt, während der Einzelbestimmung des Broms und

Chlors die Mängel der verwendeten Differenzmethode anhaften. Man bestimmt zu diesem Zwecke die Menge des Jods und des Gesammthalogens durch Titration, sammelt das Halogensilber im Gooch'schen Tiegel und wägt. Man kennt nunmehr die Menge des Halogensilbers, und da die Menge des Jods bekannt ist, auch die des Jodsilbers. Die Differenz ergiebt die Summe des Chlor- und Bromsilbers.

Ausserdem ist durch die Titration die Menge des an Jod und die Gesammtmenge des an Halogen gebundenen Silbers bekannt. Die Differenz giebt das an Chlor und Brom gebundene Silber.

Aus der Summe des Chlor- und Bromsilbers und der Menge des darin enthaltenen Silbers lässt sich aber die Menge des Chlors und des Broms in bekannter Weise berechnen.

I. Unter Zusatz von 2 ccm verdünnten Ammoniaks wurden gemischt

4.00 ccm	$^n/_{10}$ *KJ*
3.02 »	» *KBr*
3.00 »	» *KCl*
10.02 ccm.	

Gebraucht z. Fällung des Gesammthalogens		9.98 ccm	$^n/_{10}$ $AgNO_3$
» » »	» Jods	4.02 »	»
Also » »	» Chlors und Broms	5.96 ccm	»
Gewogenes Halogensilber		0.1909 g	
AgJ entspr. 4.02 cbcm $AgNO_3$		0.0938 »	
Also *AgCl* + *AgBr*		0.0971 g	
Darin *Ag* entspr. 5.96 ccm $AgNO_3$		0.0642 »	

Daraus berechnet	*KCl* = 0.0246	angewendet	0.0223
	KBr = 0.0314		0.0359
	KJ = 0.0666		0.0662
	0.1226		0.1244

In Procenten des angewendeten Halogenalkali

	Gefunden	Angewendet
KCl	19.77	17.92
KBr	25.25	28.85
KJ	53.53	53.23
	98.55	100.00

II. Angewendet unter Zusatz von 2 ccm NH_3

KJ	= 1.01 ccm
KBr	= 2.98 »
KCl	= 6.02 »
	10.01 ccm

Gebraucht zur Fällung des Halogens	10.00 ccm	$AgNO_3$
» » » » Jods	1.02 »	»
Also » » » Chlor u. Brom	8.98 »	»

Gewogenes Halogensilber	0.1666
AgJ entspr. 1.02 ccm $AgNO_3$	0.0239
$AgCl + AgBr$	0.1427
Darin Ag entspr. 8.98 ccm $AgNO_3$	0.0967

	Daraus berechnet	Angewendet
KCl	0.0431	0.0448
KBr	0.0380	0.0354
KJ	0.0169	0.0167
	0.0980	0.0969

In Procenten des angewendeten Halogenalkali:

	Gefunden	Berechnet
KCl	44.47	46.24
KBr	39.18	36.58
KJ	17.42	17.28
	101.07	100.00

III. Angewendet

KCl	= 0.52 ccm
KBr	= 1.42 »
KJ	= 8.54 »
	10.48 ccm

Gebraucht zur Fällung des Halogens	10.47 ccm	$AgNO_3$
» » » » Jods	8.58 »	»
Also » » » Chlor u. Brom	1.89 ccm	»

Gewogenes Halogensilber	0.2342
AgJ entspr. 8.58 ccm $AgNO_3$	0.2009
$AgCl + AgBr$	0.0333
Darin Ag entspr. 1.89 ccm $AgNO_3$	0.0204

Daraus berechnet		Angewendet
KCl	= 0.0036	0.0038
KBr	= 0.0212	0.0212
KJ	= 0.1420	0.1413
	0.1668	0.1663

In Procenten des angewendeten Halogenalkali:

	Gefunden	Berechnet
KCl	2.15	2.29
KBr	12.74	12.75
KJ	85.37	84.96
	100.26	100.00

Die für Jodkalium gefundenen Zahlen stimmen ganz gut mit den berechneten überein, während die für Chlor- und Bromkalium erhaltenen procentisch berechnet beträchtliche Abweichungen aufweisen.

Die Fehler erklären sich aus der Schwäche der Methode, dass gerade da, wo die Bestimmung des Chlors und Broms aus der Menge des Halogensilbers und des darin vorhandenen Silbers möglichst genaue Feststellung dieser Mengen verlangt, die Fehler sämmtlicher Bürettenablesungen zu den Wägefehlern hinzukommen.

Leider kann man diese Fehler nicht durch Anwendung grösserer Mengen der Lösungen verhältnissmässig geringer machen, wie auf S. 90 auseinandergesetzt ist.

Zur Erzielung genauerer Resultate bleibt also nur übrig, das Mittel aus mehreren Bestimmungen zu nehmen. Wenn man zur Bestimmung des Halogensilbers den GOOCH'schen Tiegel verwendet und das Halogensilber mit Alkohol und Aether auswäscht, lassen sich bequem drei Analysen in eben so viel Stunden ausführen.

Die Verwendung des Electrometers als Indicator ist natürlich nicht auf die angegebenen Beispiele beschränkt. Zweifellos kann man auch lösliche Cyan-, Rhodan-, sowie Ferro- und Ferridcyansalze mit Silbernitrat titriren.

Ebenso werden sich auch andere Metalle mit Hülfe geeigneter Fällungsmittel unter Anwendung von Electroden aus demselben Metalle bestimmen lassen. Es muss nur beachtet werden, dass nicht andere Metalle in der Lösung vorhanden sind, welche

durch das Fällungsmittel mit niedergeschlagen werden oder durch die Electroden reducirt werden. Geeignete Electroden von gleicher Oberflächenbeschaffenheit wird man sich, worauf mich Herr Professor OSTWALD aufmerksam gemacht hat, durch Benutzung der Amalgame der betreffenden Metalle verschaffen können, welche dieselben Potentialdifferenzen wie die Metalle zeigen.

Den sämmtlichen Indicatoren gegenüber, welche den Endpunkt der Reaction durch Farbenveränderung anzeigen, hat das Electrometer den Vortheil, dass seine Verwendung von der benutzten Lichtquelle unabhängig ist. Man ist also im Stande bei Lampenlicht so gut wie am Tage zu titriren.

Auch in den immerhin ziemlich häufig vorkommenden Fällen mangelhaften Unterscheidungsvermögens für Farben kann das Electrometer als zweckmässiger Ersatz für andere Indicatoren dienen.

Leipzig, 30. Januar 1893. I. chemisches Laboratorium der Universität.

INHALT.

Seite

W. Ostwald, Die Dissociation des Wassers 1

A. Looss, Zur Frage nach der Natur des Körperparenchyms bei den Trematoden, nebst Bemerkungen über einige andere, zur Zeit noch offene Fragen. 10

M. Krause, Über Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind . 35

W. Ostwald, Zur Thermochemie der Jonen 54

Robert Behrend, Electrometrische Analyse. Mit einer Figur 69

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
JUL 12 1893
LIBRARY

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD COLLEGE
JUL 12 1893
LIBRARY.

SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1893.

M. Krause, *Zur Transformation der Thetafunctionen.*

In einer Note vom 8. Februar 1886 habe ich ein neues Additionstheorem zwischen Thetafunctionen einer Veränderlichen mit verschiedenen Moduln aufgestellt, welches als Grundlage einer Transformationstheorie dienen kann. Eine nähere Ausführung erhielt dasselbe in einer Arbeit von MÖLLER[1]). Für den Fall zweier Veränderlichen ist das analoge Additionstheorem nebst zwei weiteren allgemeineren in einem Aufsatze entwickelt, der sich im 28. Bande der Mathematischen Annalen befindet. Die Additionstheoreme beruhen auf der Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken. Für den Fall einer Veränderlichen hat diese Theorie u. a. VOSS[2]) in einer Arbeit im GRUNERT'schen Archiv entwickelt, für den Fall zweier Veränderlichen befindet sich hierüber eine Arbeit im 26. Bande der Mathematischen Annalen.

Für den Fall zweier Veränderlichen sind diese Untersuchungen in meinem Lehrbuch über die Transformation der hyperelliptischen Functionen zusammengefasst worden[3]).

Im Folgenden sollen nun diese Theorien wieder aufgenommen und weiter fortgeführt werden. Zunächst möge auseinandergesetzt werden, inwiefern die neuen Additionstheoreme als Grundlage einer Transformationstheorie dienen können. Bleiben wir zunächst bei den elliptischen Functionen stehen, so

1) H. MÖLLER: Zur Transformation der Thetafunctionen. Rostock 1887.

2) Theorie der Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Greifswald 1886.

3) Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Leipzig 1886.

ist die Aufgabe der Transformationstheorie ähnlich wie die Aufgabe der Divisionstheorie eine doppelte. Erstens handelt es sich darum, die transformirten Theta- resp. elliptischen Functionen durch die ursprünglichen auszudrücken oder umgekehrt, zweitens aber darum, die Beziehungen aufzudecken, die zwischen den mannigfachen Constanten bestehen, die in den Coefficienten auftreten.

Handelt es sich nur darum, die transformirten Functionen durch die ursprünglichen darzustellen, gleichviel welcher Art die Constanten sind, die in den Coefficienten auftreten, so lösen die aufgestellten Additionstheoreme die vorgelegte Aufgabe. Indessen kann dieselbe mit Rücksicht auf den zweiten Theil dahin präcisirt werden, dass in den Coefficienten nur Constanten auftreten, die zu dem vorgelegten Transformationsgrade gehören. Dann lösen die Additionstheoreme die gestellte Aufgabe nicht ohne weiteres, vielmehr müssen hier neue Untersuchungen eintreten, die als specieller Fall der Untersuchungen des zweiten Theiles gelten können. Dieser zweite Theil nun muss als der bedeutend schwierigere bezeichnet werden und ist der Gegenstand einer überaus grossen Anzahl werthvoller Abhandlungen und Werke geworden. Hierbei können drei grosse Richtungen in der Art der Untersuchung unterschieden werden. Erstens sind die JACOBI'schen Theorien weiter ausgebaut worden, indem man an Stelle der ursprünglichen Moduln und Multiplicatoren andere Grössen einführte, die zum Theil allgemeinere, zum Theil einfachere Schlüsse zulassen. Die ausgiebigste Einsicht in das nach dieser Richtung hin Geleistete giebt das Werk von H. WEBER über die elliptischen Functionen.

Die zweite Form, welche die Transformationstheorie annahm, basirt auf der Theorie der Modulfunctionen und ist vor Allem von H. KLEIN und seinen Schülern ausgebildet worden. Sie trägt einen mehr functionentheoretischen Charakter. Die vollständigste Darstellung der hierher gehörenden Untersuchungen befindet sich in dem Lehrbuche von KLEIN-FRICKE über die elliptischen Modulfunctionen.

Die dritte Art der Anschauung endlich beruht auf zwei Arbeiten von SCHRÖTER [1]). In ihnen werden Beziehungen

1) De aequationibus modularibus. Dissert. 1854. Regiom. — Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten und die Theilung dieser Functionen. Breslau 1855.

zwischen unendlichen Summen dazu gebraucht, um Relationen zwischen ursprünglichen und transformirten Functionen herzuleiten, oder kurz gesagt, es werden Additionstheoreme aufgestellt, die zu Thetarelationen führen.

Geht man nun zu dem Falle mehrerer Veränderlichen und zwar zunächst dem von zwei Veränderlichen über, so bleibt die Problemdarstellung dieselbe, die Untersuchungsmethoden an sich auch, indessen haben die beiden ersten Methoden bisher nur wenige Resultate ergeben, da die Untersuchungen sich ungemein compliciren. Unter solchen Umständen liegt es nahe, das Hauptgewicht auf die Schröter'sche Anschauung zu legen und nach neuen Grundlagen zu suchen, welche einen Ausbau derselben ermöglichen.

Hierzu wollen wir zunächst das Transformationsproblem in einer anderen und allgemeineren Weise fassen als bisher. Es soll nicht versucht werden, Transformationsgleichungen im Sinne von Weber oder in dem von mir in meinem Lehrbuch angegebenen aufzustellen, *sondern es soll nach den allgemeinsten Beziehungen gesucht werden, die zwischen den Wurzeln derselben bestehen.* Sind derartige Beziehungen in genügender und einfacher Weise gefunden, so können sie zum Aufbau von Transformationsgleichungen dienen, indessen ist das erst ein zweites Problem, welches vor dem ersten zurücktritt. Welche Transformationsgleichungen gewählt werden ist völlig gleichgültig. Als einfachste Grössen bieten sich die repräsentirenden Thetafunctionen dar, zumal zwischen ihnen von vornherein eine Reihe linearer Beziehungen bestehen. Eine nähere Ausführung dieses Gedankens stösst aber auf Schwierigkeiten. Viel einfacher gestalten sich die Betrachtungen, wenn man an Stelle der repräsentirenden Thetafunctionen gewisse Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken einführt, die in meinem Lehrbuche durch:

$$\vartheta_\alpha[g_1 g_2]\,((nv, n\tau))$$

bezeichnet sind und mit den ersteren durch leicht angebbare Beziehungen verbunden sind. Sie bilden einen speciellen Fall der allgemeinen Thetafunctionen mit rationalen Charakteriken, nämlich denjenigen, bei welchem die Grössen $h_1 h_2$ entweder ganze oder die Hälfte ganzer Zahlen sind. Es liegt nahe, die Betrachtungen auf die allgemeinen Thetafunctionen auszudehnen — es ist aber davon abgesehen, weil dieselben zu den repräsentirenden

sentirenden Thetafunctionen in keinem einfachen Verhältniss stehen. Es soll das auch in der Folge geschehen, obgleich jene Verallgemeinerung an sich keinerlei Schwierigkeit bietet.

Nach diesen Auseinandersetzungen formuliren wir nun das Transformationsproblem folgendermassen:

I. Es sollen die Grössen

$$\vartheta_\alpha[g_1 g_2]((nv, n\tau))$$

durch die ursprünglichen Thetafunctionen ausgedrückt werden, oder umgekehrt, so zwar, dass die Constanten sich aus den ursprünglichen und den transformirten Functionen von möglichst einfachen Gradzahlen zusammensetzen lassen.

II. Es sollen die Beziehungen aufgedeckt werden, welche zwischen den ursprünglichen und transformirten Thetafunctionen desselben Grades für die Nullwerthe der Argumente bestehen.

Diese beiden Probleme sollen im Folgenden behandelt werden und es soll gezeigt werden, dass beide mit Hilfe der aufgestellten Additionstheoreme gefördert werden können.

In Bezug auf den ersten Punkt zeigt es sich, dass für den Fall einer Transformation von Grade $n = 2^r$ das Problem vollkommen gelöst werden kann, d. h. dass in den fertigen Formeln nur die Moduln τ und $n\tau$ vorkommen, dass für den Fall anderer Transformationsgrade wesentliche Reductionen stattfinden.

In Bezug auf den zweiten Punkt ergiebt sich eine grosse Mannigfaltigkeit von Additionstheoremen, die für die Nullwerthe der Argumente unmittelbar Relationen der gesuchten Art ergeben.

In der folgenden Notiz soll nun lediglich der Fall $\alpha = 5$ betrachtet werden, ferner möge ausdrücklich hervorgehoben werden, dass es nicht beabsichtigt ist, die ganze Fülle der möglichen Beziehungen in systematischer Weise zu entwickeln, dass es sich vielmehr lediglich darum handelt, die Bedeutung der Additionstheoreme an einer Reihe von Fällen klar zu legen.

§ 1.

Betrachtung des allgemeinen Transformationsproblems [1].

Die Functionen, um deren Betrachtung es sich handelt, lauten:

---

1) In Bezug auf den ersten Paragraphen möge auf die schon citirte Arbeit von MÖLLER verwiesen werden.

$$\varepsilon_{g_1 g_2}\vartheta_5(v_1+g_1\tau_{11}+g_2\tau_{12}, v_2+g_1\tau_{12}+g_2\tau_{22}, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$
$$\sum^{r} e^{\frac{\pi i g_r}{n}(2v_r+g_1\tau_{1r}+g_2\tau_{2r})}$$
$$\varepsilon_{g_1 g_2} = e \qquad , \; r = 1, 2.$$

Wir bezeichnen dieselben durch:

$$\vartheta_5[g_1 g_2](v_1, v_2, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

oder auch durch:

$$\vartheta_5[g_1 g_2]((v, n\tau)).$$

Das Additionstheorem, welches die Grundlage der folgenden Betrachtungen bildet, lautet:

$$(1)\quad \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=n} \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon\tau)) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=n} \vartheta_5[g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon\tau)),\ ^{1})$$
$$w_1^{(\varepsilon)} = a_{\varepsilon 1}\cdot v_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2}\cdot v_1^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n}\cdot v_1^{(n)},$$
$$w_2^{(\varepsilon)} = a_{\varepsilon 1}\cdot v_2^{(1)} + a_{\varepsilon 2}\cdot v_2^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n}\cdot v_2^{(n)},$$

wobei die Relationen bestehen:

$$m_1\cdot a_{\varepsilon 1}^{\,2} + m_2\cdot a_{\varepsilon 2}^{\,2} + \cdots m_n\cdot a_{\varepsilon n}^{\,2} = n_\varepsilon,$$
$$m_1\cdot a_{\varepsilon 1}\cdot a_{k1} + m_2\cdot a_{\varepsilon 2}\cdot a_{k2} + \cdots m_n\cdot a_{\varepsilon n}\cdot a_{kn} = 0, \quad \varepsilon \lesseqgtr k,$$
$$\varepsilon = 1, 2, \ldots n; \quad k = 1, 2 \ldots n;$$

und die Congruenzen stattfinden:

$$g_1^{(\varepsilon)} \equiv a_{\varepsilon 1}\cdot m_1\cdot s_1^{(1)} + a_{\varepsilon 2}\cdot m_2\cdot s_1^{(2)} + \cdots a_{\varepsilon n}\cdot m_n\cdot s_1^{(n)} \bmod n_\varepsilon,$$
$$g_2^{(\varepsilon)} \equiv a_{\varepsilon 1}\cdot m_1\cdot s_2^{(1)} + \ldots\ldots \qquad a_{\varepsilon n}\cdot m_n\cdot s_2^{(n)} \bmod n_\varepsilon.$$

Die Grössen s sind willkürliche ganze Zahlen. Die Summe ist nach den Grössen $g_1^{(\varepsilon)}$, $g_2^{(\varepsilon)}$ zu nehmen. Es möge von vornherein bemerkt werden, dass im Folgenden die Congruenzen nicht weiter discutirt werden sollen. Es kann das geschehen, da dieselben für den principiellen Theil des Problemes von keiner Bedeutung sind. Es ist nun das Additionstheorem genügend, um die ursprünglichen Thetafunctionen durch die transformirten auszudrücken. In der That, wir kommen zu dem allgemeinen Transformationsproblem, wenn wir:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$$

setzen, wenn wir ferner annehmen, dass die Zahlen $a_{\varepsilon k}$ den weiteren Bedingungen Genüge leisten:

$$a_{11} + a_{12} + \ldots a_{1n} = n,$$
$$a_{\varepsilon 1} + a_{\varepsilon 2} + \ldots a_{\varepsilon n} = 0, \quad \varepsilon > 1.$$

---

1) Siehe S. 234 meines Werkes.

An dem angegebenen Orte ist die Auflösung des aufgestellten Gleichungssystemes gegeben worden und zwar in folgender Weise:

Ist n eine ungerade Zahl, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \ldots a_{1n} = 1 ,$$
$$a_{21} = n - 1 , a_{22} = a_{23} \ldots . = a_{2n} = -1 ,$$
$$a_{31} = a_{41} = \ldots a_{n1} = 0 .$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingungsgleichungen, mit deren Hülfe die übrigen Grössen zu bestimmen sind, dieselben sind, wie für den Fall $n-1$, so dass die Bestimmung damit auf den Fall einer geraden Zahl zurückgeführt ist, welche kleiner ist, als die ursprünglich vorgelegte.

Ist dagegen n eine gerade Zahl gleich 2ν, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \ldots a_{1n} = 1 ,$$
$$a_{21} = a_{22} = \ldots a_{2\nu} = 1 , \; a_{2\nu+1} = a_{2\nu+2} = \ldots a_{2n} = -1 .$$

Ueberdies nehmen wir an, dass in den folgenden $\nu - 1$ Horizontalreihen die ν ersten Glieder der Null gleich sind, während die ν anderen mit Hülfe der Bedingungsgleichungen bestimmt sind, die für den Fall ν bestehen, dass endlich in den letzten ν Horizontalreihen die ν letzten Glieder der Null gleich sind, während die übrigen zu dem Falle $n = \nu$ gehörig angesehen werden können.

So haben wir eine Darstellung der ursprünglichen Thetafunctionen durch die transformirten erhalten. Es ist dieses nicht die einzige. In meinem Werke S. 248 findet sich eine zweite Darstellung, bei welcher die Coefficienten auch durch Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken dargestellt sind und die eine sehr übersichtliche Form hat.

Ueberdies können unsere Gleichungssysteme mannigfach aufgelöst werden. Eine zweite Methode, die mit unserer in engem Zusammenhang steht, findet sich in dem jüngst erschienenen Werke der H. H. Prym und Krazer [1]) und zwar in dem ersten Theil desselben, welches sich mit ähnlichen allgemeiner gehaltenen Untersuchungen beschäftigt, ohne hierbei mit den Arbeiten des Verfassers in Beziehung zu treten. Wir können indessen von derselben absehen, weil die Moduln bei ihr grösser

1) Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892.

werden als bei unserer Methode und sie weniger die aufgestellten Bedingungen erfüllt als die unsrige. Aber auch die letztere hat ihren Hauptwerth darin, dass sie allgemein gültig ist. Es wird daneben versucht werden müssen, andere Darstellungen zu finden, die noch einfachere Moduln ergeben. Als das letzte Ziel dieses Theiles bezeichnen wir es, ausser den Moduln τ nur noch die Moduln $n\tau$ zu behalten. Das Problem kann nicht immer gelöst werden, es mögen unter solchen Umständen auch noch die Moduln $2^r\tau$ und $2^r n\tau$ zugelassen werden. Es geschieht das, weil die entsprechenden Functionen sich nach bekannten Methoden aus den Functionen mit dem Modul τ und $n\tau$ darstellen lassen.

Es zeigt sich nun zunächst die völlige Auflösbarkeit des Problems in dem Falle:

$$n = 2^r.$$

In der That nehmen wir zunächst $n = 4$, so können wir für die Grössen $a_{\varepsilon k}$ das Schema wählen:

1	1	1	1
1	−1	−1	1
1	1	−1	−1
1	−1	1	−1

nehmen wir $n = 8$, so können wir das Schema wählen:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Zu gleicher Zeit liegt hierin das allgemeine Gesetz enthalten. In der That, bezeichnen wir ein Schema, welches zu der Zahl 2^{r-1} gehört, kurz durch A, bilden dann ein zweites Schema A_1, indem wir in A die erste Horizontalreihe ungeändert lassen, da-

gegen die anderen mit dem negativen Zeichen versehen und endlich ein drittes Schema A_2, indem wir die erste Horizontalreihe von A mit dem negativen Zeichen versehen, die anderen dagegen ungeändert lassen, so lautet das Schema für den Transformationsgrad:

$$n = 2^r$$
$$A \quad A_1$$
$$A \quad A_2.$$

Wir finden also den

Lehrsatz. *Ist der Transformationsgrad $n = 2^r$, so findet die Formel statt:*

$$\Pi \vartheta_s((v^{(\varepsilon)}, \tau)) = \Sigma \Pi \vartheta_s[g_1, g_2]((w^{(\varepsilon)}, n\tau))$$

wobei für:

$$v_s^{(1)} = v_s^{(2)} = \cdots v_s^{(n)} = v_s$$

die Grössen w die Werthe annehmen:

$$w_s^{(1)} = nv_s, \quad w_s^{(\sigma)} = 0, \quad s = 1, 2; \quad \sigma = 2, 3, \cdots n,$$

und die Summe in bekannter Weise zu nehmen ist.

Setzen wir in der speciellen Formel schliesslich $v_s = 0$, so erhalten wir eine Thetarelation von der Art, wie sie als Ziel des zweiten Theiles der Transformationstheorie bezeichnet wurde.

Die Zahl $n = 2^r$ möge als Repräsentant derjenigen Zahlen gelten, bei denen es möglich ist, ausser dem Modul τ nur den Modul $n\tau$ einzuführen.

Es mögen nun noch einige Fälle behandelt werden, in denen ausser τ und $n\tau$ noch die Moduln $2^r\tau$ und $2^r n\tau$ auftreten.

Es folgt nun aus dem allgemeinen Satze unmittelbar, dass für alle Transformationsgrade von der Form:

$$n = 2^r + 1$$

die oben skizzirte Darstellung stets möglich sein muss. In der That, nehmen wir z. B.

$$n = 9,$$

so erhalten wir das Schema:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
0	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
0	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
0	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
0	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
0	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

und die Moduln 9τ, 72τ, 8τ, 8τ, 8τ, 8τ, 8τ, 8τ.

Genau so können wir allgemein verfahren und finden den

Lehrsatz. *Für alle Transformationsgrade von der Form:*

$$n = 2^r + 1$$

reducirt sich die Mannigfaltigkeit der Moduln auf die vier Moduln:

$$\tau,\ n\tau,\ 2^r n\tau,\ 2^r\tau.$$

Es sind aber noch andere Darstellungen möglich, die als einfacher bezeichnet werden müssen. In der That, für den Grad $n = 9$ z. B. können wir das Schema wählen:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	−1	−1	0	0	0	0
0	1	−1	−1	1	0	0	0	0
0	1	−1	1	−1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	−1	−1
0	0	0	0	0	1	−1	−1	1
0	0	0	0	0	1	−1	1	−1

Es nehmen also die Moduln die einfacheren Werthe an: 9τ, 72τ, 8τ, 4τ, 4τ, 4τ, 4τ, 4τ, 4τ.

Das Gesetz, nach welchem die Zahlen fortschreiten, ist klar. Wir können den folgenden

Lehrsatz aussprechen: *Für alle Transformationsgrade von der Form:*

$$n = 2^r + 1$$

können wir für die Zahlen n die folgenden Werthe wählen:

$$n_1 = 2^r + 1,\ n_2 = 2^r(2^r + 1),\ n_3 = 2^r,\ n_4 = n_5 = 2^{r-1}, \cdots$$

$$n_\varrho = n_{\varrho+1} = \cdots n_{2^r+1}$$

$$\varrho = 2^r - 3.2^{r-2} + 2.$$

Es giebt aber noch einfachere Darstellungen. Im Falle $n = 9$ z. B. können wir das Schema wählen:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
0	1	1	−1	−1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	−1	−1
0	1	−1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	−1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	−1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	−1

Es ergeben sich also die Moduln:

$$9\tau,\ 72\tau,\ 8\tau,\ 4\tau,\ 4\tau,\ 2\tau,\ 2\tau,\ 2\tau,\ 2\tau.$$

Das allgemeine Gesetz ist klar und braucht nicht erst hingeschrieben zu werden.

An die Betrachtung der Zahlen von der Form $2^r + 1$ schliesst sich naturgemäss diejenige der Zahlen von der Form $2^r + 2$. Nach der allgemeinen oben angegebenen Regel kann dieser Fall unmittelbar auf den Fall $2^{r-1} + 1$ zurückgeführt werden und jeder Darstellungsweise der ersteren kann eine Darstellungsweise der letzteren zugeordnet werden. Wählen wir die erste Darstellungsweise, so können wir den folgenden

Lehrsatz aussprechen: *Für alle Transformationsgrade von der Form $n = 2^r + 2$ können für die Zahlen n die Zahlen gewählt werden:*

$$n,\ 2^{r-2}n,\ 2^{r-1}.$$

Nehmen wir z. B. $n = 6$, so lautet das Schema:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1. \end{array}$$

Diese Betrachtungen mögen einstweilen genügen.

§ 2.

Betrachtung des speciellen Transformationsproblemes. Ableitung von Additionstheoremen zwischen Producten von ein bis vier Factoren.

Wir gehen nun zu dem speciellen Transformationsproblem über, Beziehungen zwischen den Constanten herzustellen. Bei diesen Beziehungen sind also die Werthe der Argumente w ganz gleichgültig, da wir, ohne das jedes Mal besonders zu bemerken, die Formeln nur für den Fall wirklich brauchen, dass die Argumente v und w sämmtlich der Null gleich sind. Wir suchen nun nach Additionstheoremen, bei denen ausser dem Modul τ nur noch der Modul $n\tau$ vorkommt. Wir wollen daneben aber auch noch die Moduln 2τ und $2n\tau$ zulassen, da die entsprechenden Thetafunctionen sich nach leichten Regeln durch die Thetafunctionen mit den Moduln τ und $n\tau$ darstellen lassen.

Wir wollen nun erstens annehmen, dass die Zahl der Factoren der einzelnen Producte in unserem Additionstheorem der Einheit gleich sei. Dann nimmt dasselbe die Form an:

$$\vartheta_s((v, m\tau)) = \Sigma \vartheta_s[g_1, g_2]((w, n\tau)).$$

Wir wollen nun $m = 1$, $w = nv$ setzen, so erhalten wir die Formel:

$$\vartheta_s((v, \tau)) = \Sigma \vartheta_s[g_1, g_2]((nv, n^2\tau)),$$

oder auch:

$$(1) \quad \vartheta_s\left(\left(v, \frac{\tau}{n}\right)\right) = \Sigma \vartheta_s[g_1, g_2]((nv, n\tau)).$$

Es ist das eine der wichtigsten Formeln, welche Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen und den Thetafunctionen mit gebrochenen Charakteristiken herstellt, wie sie in der Einleitung angedeutet worden sind. Setzen wir links und rechts an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp.:

$$\frac{\tau_{11}+2\lambda_1}{n},\quad \frac{\tau_{12}+2\lambda_2}{n},\quad \frac{\tau_{22}+2\lambda_2}{n},$$

so erhalten wir die erste Formel auf S. 246 meines Werkes.

Diese Formel möge gewissermassen als Repräsentant derjenigen dienen, die wir erhalten, wenn wir die Zahl der Factoren in den einzelnen Producten gleich 1 setzen.

Wir nehmen jetzt zweitens an, dass Producte mit zwei Factoren vorgelegt seien.

In diesem Falle haben wir unter den angegebenen Beschränkungen nach Zahlen zu suchen, die den Gleichungen Genüge leisten:

$$m_1 \cdot a_{11}^2 + m_2 \cdot a_{12}^2 = n_1,$$
$$m_1 \cdot a_{21}^2 + m_2 \cdot a_{22}^2 = n_2,$$

während die Bedingung besteht:

$$m_1 \cdot a_{11} \cdot a_{21} + m_2 \cdot a_{12} \cdot a_{22} = 0.$$

Wir nehmen erstens an, dass $m_1 = m_2 = 1$ sei, so folgt:

$$a_{22}^2 \cdot n_1 = a_{11}^2 \cdot n_2.$$

Hieraus folgt, dass nur $n_1 = n_2 = n$ möglich ist, während zu gleicher Zeit

$$a_{22} = \pm a_{11}, \quad a_{12} = \mp a_{21}$$

ist. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz. *Lässt eine ganze Zahl n sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2,$$

so gehört zu dem Schema:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}$$

das Additionstheorem:

$$\vartheta_5((v^{(1)}, \tau)) \cdot \vartheta_5((v^{(2)}, \tau))$$
$$= \Sigma \vartheta_5[g_1^{(1)}, g_2^{(1)}]((w^{(1)}, n\tau)) \vartheta_5[g_1^{(2)}, g_2^{(2)}](w^{(2)}, n\tau))$$
$$w_s^{(1)} = \alpha \cdot v_s^{(1)} + \beta \cdot v_s^{(2)}$$
$$w_s^{(2)} = -\beta \cdot v_s^{(1)} + \alpha \cdot v_s^{(2)}.$$

Wir nehmen nun zweitens an, dass $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ sei, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$a_{11}^2 + 2a_{12}^2 = n_1 ,$$
$$a_{21}^2 + 2a_{22}^2 = n_2 ,$$
$$a_{11} \cdot a_{21} + 2a_{12} \cdot a_{22} = 0 .$$

Aus ihnen folgt:

$$2a_{12}^2 \cdot n_2 = a_{21}^2 \cdot n_1 ,$$

so dass also $n_1 = 2n_2 = 2n$ sein muss. Somit erhalten wir den

Lehrsatz. *Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:*

$$n = 2\alpha^2 + \beta^2 ,$$

so gehört zu dem Schema:

$$\begin{matrix} 2\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{matrix}$$

das Additionstheorem:

$$\vartheta_5((v^{(1)}, \tau))\,\vartheta_5((v^{(2)}, 2\tau))$$
$$= \vartheta_5[g_1^{(1)}, g_2^{(1)}]((w^{(1)}, 2n\tau))\,\vartheta_5[g_1^{(2)}, g_2^{(2)}]((w^{(2)}, n\tau)),$$
$$w_s^{(1)} = 2\alpha \cdot v_s^{(1)} + \beta \cdot v_s^{(2)} ,$$
$$w_s^{(2)} = -\beta \cdot v_s^{(1)} + \alpha \cdot v_s^{(2)} .$$

Wir kommen jetzt zu den Producten von drei Factoren. Nehmen wir an, dass die Grössen m gleich 1 seien, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\varepsilon 3}^2 = n_\varepsilon ,$$
$$a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{k2} + a_{\varepsilon 3} \cdot a_{k3} = 0.$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt:

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 ,$$

wenn gesetzt ist:

$$\delta_1 = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} ,$$
$$\delta_2 = a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33} ,$$
$$\delta_3 = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31} .$$

Hieraus folgt:

$$a_{1r}^2 \cdot n_2 \cdot n_3 = n_1 \cdot \delta_r^2 .$$

Nehmen wir zunächst an, dass die Grössen n einander gleich sind, so folgt:

$$n \cdot a_{1r}^2 = \delta_r^2 ,$$

d. h. n muss eine Quadratzahl sein.

Es sei nun eine Quadratzahl vorgelegt, die sich als Summe dreier Quadrate darstellen lässt,

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

dann wollen wir zusehen, wann wir als Schema der Grössen $a_{\varepsilon k}$ das Schema wählen können:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta. \end{matrix}$$

Offenbar lautet die einzige Bedingung, welche noch zu erfüllen ist:

$$\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha = 0.$$

Der Gleichung wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$\beta = -\alpha + l,$$
$$\gamma = \frac{\alpha(\alpha - l)}{l},$$

und unter l irgend einen Theiler von α^2 verstehen. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz. *Ist α eine beliebige ganze Zahl und l ein Theiler von α^2, setzen wir ferner:*

$$n = \left(l - \alpha + \frac{\alpha^2}{l}\right)^2,$$

so gehört zu dem Schema:

$$\begin{matrix} \alpha, & -\alpha + l, & \dfrac{\alpha(\alpha - l)}{l} \\ -\alpha + l, & \dfrac{\alpha(\alpha - l)}{l}, & \alpha \\ \alpha\dfrac{(\alpha - l)}{l}, & \alpha, & -\alpha + l \end{matrix}$$

das Additionstheorem:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3} \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, \tau)) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=3} \vartheta_5[g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n\tau)).$$

Wir nehmen zweitens an, dass:

$$m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = n,$$

dann lauten die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + n a_{\varepsilon 3}^2 = n_\varepsilon ,$$
$$a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{k2} + a_{\varepsilon 3} \cdot a_{k3} = 0 .$$

Wir wollen nun setzen:

$$n_1 = n_2 = 2n_3 = 2n$$

und annehmen, dass n sich als Summe zweier Quadratzahlen α^2 und β^2 darstellen lässt. Unter diesen Voraussetzungen können wir für die Grössen $a_{\varepsilon k}$ das Schema S wählen:

$$\begin{array}{rrr} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & -1 \\ -\beta & \alpha & 0 \end{array}$$

und erhalten den

Lehrsatz. *Lässt n sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2 ,$$

so gehört zu dem Schema S das Additionstheorem:

$$\vartheta_5((v^{(1)}, \tau)) \cdot \vartheta_5((v^{(2)}\tau)) \cdot \vartheta_5((v^{(3)}, n\tau)) = \Sigma \Pi \vartheta_5 [g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)} n_\varepsilon \tau)),$$
$$n_1 = n_2 = 2n_3 = 2n .$$

Wir nehmen jetzt den Fall von vier Factoren und zwar möge zunächst wieder angenommen werden, dass:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 , \quad \text{dagegen}$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n \quad \text{sei.}$$

Dann lauten die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\varepsilon 3}^2 + a_{\varepsilon 4}^2 = n ,$$
$$a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{k2} + a_{\varepsilon 3} \cdot a_{k3} + a_{\varepsilon 4} \cdot a_{k4} = 0 .$$

Nehmen wir nun an, dass n sich als Summe der vier Quadratzahlen α^2, β^2, γ^2, δ^2 darstellen lässt, so können wir an Stelle der Grössen $\alpha_{\varepsilon k}$ die Grössen wählen:

$$\begin{array}{rrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & -\alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & -\alpha . \end{array}$$

Wir wollen das Schema kurz durch S_1 bezeichnen, so erhalten wir den

Lehrsatz. *Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

— eine Annahme, die immer möglich ist — so gehört zu dem Schema S_1 das Additionstheorem:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, \tau)) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5[g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}]\ ((w^{(\varepsilon)}, n\tau)),$$

Zweitens wollen wir annehmen, dass:

$$m_1 = m_2 = 1\ ,\ m_3 = m_4 = 2 \text{ sei},$$

dann werden die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + 2a_{\varepsilon 3}^2 + 2a_{\varepsilon 4}^2 = n_\varepsilon\ ,$$

$$a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{k2} + 2a_{\varepsilon 3} \cdot a_{k3} + 2a_{\varepsilon 4} \cdot a_{k4} = 0.$$

Hieraus folgt, dass wenn wir:

$$2n_1 = 2n_2 = 2n = n_3 = n_4$$

setzen, dass wir dann berechtigt sind, für die Grössen $a_{\varepsilon k}$ das Schema S_2 zu wählen:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \\ 2\gamma & -2\delta & -\alpha & \beta \\ 2\delta & 2\gamma & -\beta & -\alpha\ . \end{array}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz. *Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:*

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2$$

so gehört zu dem Schema S_2 das Additionstheorem:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon\tau)) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5[g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}]\ ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon\tau)),$$

$$m_1 = m_2 = 1\ ,\ m_3 = m_4 = 2,$$

$$2n_1 = 2n_2 = 2n = n_3 = n_4\ .$$

Endlich drittens wollen wir annehmen, dass:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1\ ,\ m_4 = n$$

sei, dann werden die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\varepsilon 3}^2 + n a_{\varepsilon 4}^2 = n_\varepsilon\ ,$$

$$a_{\varepsilon 1} \cdot a_{k1} + a_{\varepsilon 2} \cdot a_{k2} + a_{\varepsilon 3} \cdot a_{k3} + n a_{\varepsilon 4} \cdot a_{k4} = 0\ .$$

Auch hier sind Lösungen zu finden. Nehmen wir an, dass wie in einem früheren Falle n die Form hat:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

wobei wie früher $\beta = -\alpha + l$, $\gamma = \frac{\alpha(\alpha - l)}{l}$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen können wir setzen:

$$n_1 = n_2 = 2n = n_3 = n_4$$

und erhalten für die Grössen $a_{\varepsilon k}$ das Schema S_3:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \\ \beta & \gamma & \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & 0. \end{array}$$

Es ergiebt sich also der

Lehrsatz. *Wenn eine ganze Zahl n sich in die Form bringen lässt:*

$$n = \left(l - \alpha + \frac{\alpha^2}{l}\right)^2,$$

so gehört zu dem Schema S_3 das Additionstheorem:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon \tau)) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_5[g_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad m_4 = n,$$

$$n_1 = n_2 = 2n = 2n_3 = 2n_4.$$

§ 3.

Betrachtung des speciellen Transformationsproblemes. Ableitung von Additionstheoremen zwischen Producten allgemeiner Art.

In ähnlicher Weise, wie im vorigen Paragraphen, könnten wir weiter gehen, indessen ziehen wir es vor, hier abzubrechen und sogleich einige allgemeinere Relationen aus der Fülle der möglichen herausgreifen. Aehnlich wie es in der Theorie der Potenzsummen zunächst darauf ankommt, diejenigen Potenzsummen:

$$\sum x^r$$

zu bestimmen, bei denen r kleiner ist, als der Grad der ent-

sprechenden Gleichung, ähnlich werden wir auch hier unser Augenmerk in erster Linie auf solche Additionstheoreme richten, bei denen die Zahl der Factoren kleiner als der Grad der entsprechenden Transformationsgleichung ist.

Zunächst folgt unmittelbar, dass, wenn n eine Quadratzahl ist, sich für den Transformationsgrad

$$2^r \cdot n$$

Additionstheoreme zwischen Producten von 2^r Factoren bilden lassen, so zwar, dass die Beziehungen stattfinden:

$$m_1 = m_2 = \cdots 1 ,$$
$$n_1 = n_2 = \cdots 2^r \cdot n .$$

Wir wollen zweitens zu dem Schema zurückkehren, welches wir im ersten Paragraphen für den Transformationsgrad 2^r gefunden haben und uns in demselben ein Mal an Stelle von ± 1 stets $\pm a$, ein ander Mal stes $\pm b$ gesetzt denken. Die beiden auf diesem Wege entstehenden Schemata wollen wir durch A und B bezeichnen. Aus A leiten wir ein zweites Schema A_1 her, indem wir die erste Horizontalreihe mit dem negativen Zeichen versehen, die übrigen ungeändert lassen, aus B leiten wir ein zweites Schema B_1 her, indem wir alle Horizontalreihen mit Ausnahme der ersten mit einem negativen Zeichen versehen und bilden das Schema:

$$\begin{matrix} A & B_1 \\ B & A_1 \end{matrix} .$$

Für dasselbe bestehen die einzelnen Producte aus 2^{r+1} Factoren, während der Transformationsgrad gleich

$$2^r (a^2 + b^2)$$

ist. Wir erhalten also den

Lehrsatz. *Lässt sich der Transformationsgrad in die Form bringen:*

$$n = 2^r (a^2 + b^2),$$

so giebt es Additionstheoreme zwischen Producten von 2^{r+1} Factoren, bei denen auf der linken Seite stets der Modul τ, rechts dagegen stets der Modul $n\tau$ steht.

Es sei ferner möglich für einen Transformationsgrad n Additionstheoreme zwischen Producten von r Factoren zu bil-

den, bei welchen links stets der Modul τ, rechts stets der Modul $n\tau$ steht. Die entsprechenden Zahlen seien die Zahlen $a_{\varepsilon k}$. Offenbar können wir dann für denselben Transformationsgrad Additionstheoreme zwischen Producten von $r+1$ Factoren bilden, bei welchen die Zahlen m und n die Werthe haben:

$$m_1 = \cdots m_r = 1, \quad m_{r+1} = n$$
$$n_1 = n_2 = 2n, \quad n_3 = n_4 \cdots = n_{r+1} = n.$$

Die Additionstheoreme entsprechen dem Schema:

$$\begin{array}{lll} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1r} & & 1 \\ a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1r} & & -1 \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2r} & & 0 \\ \cdots & & \\ a_{r1}\ a_{r2} \cdots a_{rr} & & 0. \end{array}$$

Ferner möge es gelungen sein für einen Transformationsgrad n zwei Additionstheoreme herzustellen, bei denen die Zahlen m stets 1, die Zahlen n stets gleich n seien. Bei dem ersten möge die Zahl der Factoren, aus welchen die einzelnen Producte bestehen, gleich r sein, bei dem zweiten gleich s. Wir wollen uns diese beiden Additionstheoreme durch die Zahlen $a_{\varepsilon k}$ und $b_{\varepsilon k}$ repräsentirt denken. Unter diesen Voraussetzungen giebt es für denselben Grad ein drittes Additionstheorem, bei welchem die einzelnen Producte aus $r+s$ Factoren bestehen, bei welchem die Zahlen m gleich 1 sind, die Zahlen n dagegen die Werthe besitzen:

$$n_1 = n_2 = 2n, \quad n_3 = n_4 \cdots = n.$$

Dasselbe gehört zu dem Schema:

$$\begin{array}{llll} a_{11} \cdots a_{1r} & b_{11} \cdots & b_{1s} \\ -a_{11} \cdots a_{1r} & -b_{11} \cdots & -b_{1s} \\ a_{21} \cdots a_{2r} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \\ a_{r1} \cdots a_{rr} & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & b_{21} \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \\ 0 \cdots 0 & b_{s1} \cdots & b_{ss}. \end{array}$$

Es kann dieses Resultat insofern verallgemeinert werden, als die Bedingung fallen gelassen werden kann, dass die Moduln rechts alle von einander verschieden sind.

Wir nehmen endlich an, dass ein Schema von r^2 Zahlen $c_{\varepsilon k}$: C und ein Schema von r^2 Zahlen $d_{\varepsilon k}$: D vorgelegt sei, welche den Bedingungen Genüge leisten:

$$c_{\varepsilon 1}^2 + c_{\varepsilon 2}^2 + \cdots c_{\varepsilon r}^2 = n\,,$$
$$d_{\varepsilon 1}^2 + d_{\varepsilon 2}^2 + \cdots d_{\varepsilon r}^2 = m\,,$$
$$c_{\varepsilon 1} \cdot d_{k1} + c_{\varepsilon 2} \cdot d_{k2} + \cdots c_{\varepsilon r} \cdot d_{kr} = 0\,,$$
$$c_{\varepsilon 1} \cdot c_{l1} + \cdots c_{\varepsilon r} \cdot c_{lr} + d_{\varepsilon 1} \cdot d_{l1} + \cdots d_{\varepsilon r} \cdot d_{lr} = 0;$$
$$\varepsilon = 1, 2, \cdots r,\ k = 1, 2, \cdots r,\ l \gtrless \varepsilon,\ l = 1, 2, \cdots r,$$

dann gehört zu dem Schema von l^2 Grössen:

$$\begin{array}{ccccccc}
C & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & C & D & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & C & D & \cdots & 0 \\
 & & & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & C & D \\
D & 0 & 0 & \cdots & \cdots & C
\end{array}$$

ein Additionstheorem, bei welchem die einzelnen Factoren aus $l \cdot k$ Factoren bestehen, die Zahlen $m = 1$, die Zahlen n gleich $n + m$ sind.

Ein specielles Beispiel für diesen Satz befindet sich S. 45 in dem citirten Werke der H. H. PRYM und KRAZER. Dasselbe bezieht sich auf Quadratzahlen n^2 und hat ferner die Eigenschaft, dass die Zahl der Factoren gleich $m \cdot n^2$ d. h. gleich einem Multiplum von n^2 ist. Ein allgemeineres Beispiel erhalten wir, wenn der Transformationsgrad n sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt,

$$n = \alpha^2 + \beta^2\,.$$

In diesem Falle können wir setzen:

$$C = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{matrix},\quad D = \begin{matrix} \beta & -\alpha \\ -\beta & \alpha \end{matrix}$$

und erhalten mit ihrer Hülfe eine unbegrenzte Anzahl von Additionstheoremen, die wir als zu dem Grade $2n$ gehörig ansehen können.

Wir greifen die beiden Schemata heraus:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta & -\beta & \alpha \\ \beta & -\alpha & \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha & \alpha & \beta \end{matrix}$$

und:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \alpha & \beta & 0 & 0. \end{matrix}$$

Wir können somit den

Lehrsatz aussprechen: *Lässt eine ganze Zahl sich in die Form bringen:*

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

so können unendlich viele dazu gehörende Additionstheoreme aufgestellt werden, bei denen die Zahl der Factoren der einzelnen Producte gleich $2r$ ist, bei denen ferner die Zahlen m gleich 1, die Zahlen n gleich n sind.

F. Hausdorff, *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.* II.

Im Anschluss an eine frühere Veröffentlichung (diese Berichte 1891, p. 481) folgen hier noch einige Entwickelungen, die den Spielraum interpolatorischer Formen für den Refractionsausdruck besser übersehen lassen; eine erschöpfende mathematische Analyse, die für den astronomischen wie für den meteorologischen Zweck überflüssig ist, soll damit nicht angestrebt sein. Was den letzteren anlangt, so genügt das im letzten Paragraphen zu besprechende Verfahren, um die Brauchbarkeit der Refraction zur Herleitung der Lufttemperaturen zu beurtheilen; eine wirkliche Anwendung würde erst dann am Platze sein, wenn wir über ein ad hoc gesammeltes Material, d. h. über genaue Refractionsbeobachtungen in der Nähe des Horizontes, zu verfügen hätten. Aus demselben Grunde ist die wahre Refraction unberücksichtigt geblieben; Herr Bruns hat sich s. Z. durch Versuche mit der Partialbruchformel davon überzeugt, dass der Anschluss im ganzen Umfange der gewöhnlichen Refractionstafeln befriedigend ausfällt. — Citate mit einfacher Seiten- oder Formelangabe beziehen sich auf meine Arbeit; die Abhandlung des Herrn Bruns soll, wie bisher, mit (*II B*) bezeichnet werden.

10.

Die Analogie zwischen den in § 6 entwickelten beiden Typen der Potenzenformel, die aus dem Refractionsintegral durch die resp. Substitutionen

$$-\frac{d\log\mu}{d\log\nu}=\sum_n \alpha_{2n+1}\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^{2n+1}$$

und

$$-\frac{d\log\mu}{d\log\nu}=\sum_n{}'\alpha_{-2n}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{2n}$$

hervorgehen, lässt sich etwas weiter treiben als dort geschehen, so dass schliesslich alles auf eine Variablenvertauschung hinauskommt, die jeder Refraction eine andere, gleichberechtigte, zuordnet. Der Kürze halber bezeichnen wir die dem ersten Ausdruck entsprechende Refraction als die positive, die dem zweiten entsprechende als die negative Potenzenformel (also mit Rücksicht auf den Index der Coefficienten α), oder auch, aus Gründen, die im Verlauf der Entwicklung ersichtlich werden, die erste als die Tangentenrefraction, die zweite als die Secantenrefraction.

Im Folgenden ist, mit theilweise neuer Bezeichnung, die Darstellung der Secantenrefraction genau parallel zu der der Tangentenrefraction (p. 527 sq., 531 sqq.) durchgeführt, also sowohl aus dem bestimmten Integral, als auch aus der partiellen Differentialgleichung.

Wir setzen

$$\vartheta_0-\vartheta_1=\eta\,,$$

$$\operatorname{cotg}\vartheta_1-\operatorname{cotg}\vartheta_0=\sigma\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}\vartheta_0\,,$$

woraus folgt:

$$\sin\eta=\sigma\sin\varphi\sin\vartheta_0\,,$$

$$1-2\cos\eta\cos\varphi+\cos\varphi^2=\sigma^2\sin\varphi^2\,,$$

$$\sigma=\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,,\quad \operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\varphi\sec\vartheta_0\,. \tag{45}$$

Mit

$$\operatorname{cotg}\vartheta=\operatorname{cotg}\vartheta_0+t(\operatorname{cotg}\vartheta_1-\operatorname{cotg}\vartheta_0)$$

wird dann $(n>0)$

$$R_{-2n}=\sin\eta\sec\varphi\int_0^1 dt\,[1+t\operatorname{tg}\varphi^2-t(1-t)\sigma^2\operatorname{tg}\varphi^2]^{n-1}$$

$$=\frac{\sin\eta}{\sin\varphi}\sum_{\beta\gamma}\frac{\Pi(n-1)}{\Pi(\beta)\Pi(\gamma)\Pi(n-1-\beta-\gamma)}(-1)^\beta\sigma^{2\beta}\operatorname{tg}\varphi^{2\beta+2\gamma+1}B(\beta+\gamma,\beta)$$

$$=\frac{\sin\eta}{\sin\varphi}\sum_{\alpha\beta}\frac{\Pi(n-1)\Pi(\alpha)}{\Pi(n-1-\alpha)}(-1)^\beta\sigma^{2\beta}\frac{\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha+1}}{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\alpha+\beta+1)}\,.$$

Setzt man nunmehr

$$R = \sum_n \alpha_{-2n} R_{-2n}$$

$$= \frac{\sin\eta}{\sin\varphi} \sum_\beta f_{2\beta+1}\, \sigma^{2\beta} = \sin\vartheta_0 \sum_\beta f_{2\beta+1}\, \sigma^{2\beta+1},$$

so wird

$$f_{2\beta+1} = \sum_{\alpha n} \frac{\Pi(n-1)\,\Pi(\alpha)}{\Pi(n-1-\alpha)}\, \alpha_{-2n} \operatorname{tg}\varphi^{2\alpha+1} \frac{(-1)^\beta}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+1)}.$$

Zur Auflösung nach den α führen wir ein

$$(46) \qquad \Pi(2\alpha+1)\, g_{2\alpha+1} = \sum_\beta (2\beta+1) f_{2\beta+1} \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)};$$

dann wird

$$\sum_n (n-1)_\alpha\, \alpha_{-2n} = (-1)^\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, g_{2\alpha+1} \operatorname{cotg}\varphi^{2\alpha+1},$$

$$\alpha_{-2n} = \sum_\alpha (\alpha)_{n-1} (-1)^{n-1} \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, g_{2\alpha+1} \operatorname{cotg}\varphi^{2\alpha+1}.$$

Die Abkürzung $(m)_n$ bedeutet wieder den Binomialcoefficienten

$$\frac{\Pi(m)}{\Pi(n)\,\Pi(m-n)};$$

dass der Buchstabe α auch als Summationsindex vorkommt, wird nicht stören.

Die partielle Differentialgleichung der Refraction nimmt mit

$$R = S\sin\vartheta_0, \quad t = \log\operatorname{tg}\varphi$$

die Gestalt an

$$\operatorname{tg}\vartheta_0^2 \frac{\partial S}{\partial \log\sec\vartheta_0} + S - \frac{\partial S}{\partial \log\nu_0} + \sec\vartheta_0 \frac{d\log\mu_0}{d\log\nu_0} = 0.$$

Hierin ist die Substitution

$$S = \sum_\beta f_{2\beta+1}\, \sigma^{2\beta+1}$$

auszuführen, und aus dem identischen Bestehen der daraus folgenden Formel

$$(47)\quad \sum_\beta f_{2\beta+1}(2\beta+1)\sigma^{2\beta}\left[4\sigma^2-\operatorname{tg}\varphi^2(1-\sigma^2)^2\left(1+\frac{dt}{d\log\nu_0}\right)\right]$$

$$+\operatorname{tg}\varphi^2(1-\sigma^2)\sum_\beta\sigma^{2\beta}\left(f_{2\beta+1}-\frac{df_{2\beta+1}}{d\log\nu_0}\right)+2\operatorname{tg}\varphi(1+\sigma^2)\frac{d\log\mu_0}{d\log\nu_0}=0$$

für alle Werthe von σ sind die Constanten $f_{2\beta+1}$ und t passend als Functionen von ν_0 zu bestimmen. Aus (47) folgen durch die Substitutionen

$$\text{a)}\ \ \sigma=1\,,\qquad \text{b)}\ \ \sigma=i\,,\qquad \text{c)}\ \ \sigma=0$$

die speciellen Relationen

$$(47\text{a})\qquad \sum_\beta(2\beta+1)f_{2\beta+1}+\operatorname{tg}\varphi\frac{d\log\mu_0}{d\log\nu_0}=0\,,$$

$$(47\text{b})\qquad \sum_\beta(2\beta+1)(-1)^\beta f_{2\beta+1}\left(\operatorname{cosec}\varphi^2+\frac{dt}{d\log\nu_0}\right)=0\,,$$

$$(47\text{c})\qquad 2\,d\log\mu_0=d(f_1\operatorname{tg}\varphi)\,.$$

Aus (47b) ergiebt sich durch Integration der Differentialgleichung für t

$$\cos\varphi=c\nu_0\,,$$

und damit geht (47) in die einfachere Identität

$$(1+\sigma^2)\sum_\beta(2\beta+1)f_{2\beta+1}\sigma^{2\beta}+\operatorname{tg}\varphi^2(1-\sigma^2)\sum_\beta\sigma^{2\beta}\left(f_{2\beta+1}-\frac{df_{2\beta+1}}{d\log\nu_0}\right)$$

$$+2\operatorname{tg}\varphi\frac{d\log\mu_0}{d\log\nu_0}=0$$

über, die sich mit

$$f_{2\beta+1}=f'_{2\beta+1}\cos\varphi\,,\quad s=\log\sin\varphi$$

auch so schreiben lässt:

$$(1+\sigma^2)\sum_\beta(2\beta+1)f'_{2\beta+1}\sigma^{2\beta}+(1-\sigma^2)\sum_\beta\sigma^{2\beta}\frac{df'_{2\beta+1}}{ds}$$

$$+2\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi\frac{d\log\mu_0}{d\log\nu_0}=0\,.$$

Das durch Trennung der Potenzen von σ entstehende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(2\beta+1)f'_{2\beta+1}+(2\beta-1)f'_{2\beta-1}=\frac{df'_{2\beta-1}}{ds}-\frac{df'_{2\beta+1}}{ds}\,,\quad \beta=1,2,3,\cdots$$

lässt sich mit den Integrationsconstanten $h_{2\alpha+1}$ in folgenden beiden äquivalenten Formen integriren:

$$f'_{2\beta+1} = \sum_{\alpha} (2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, h_{2\alpha+1} \sin\varphi^{2\alpha+1},$$

$$h_{2\alpha+1} \sin\varphi^{2\alpha+1} = \sum_{\beta} \frac{(-1)^{\beta-\alpha}}{\Pi(2\alpha+1)} \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)} (2\beta+1) f'_{2\beta+1}.$$

Wird nunmehr ν_0 mit ν vertauscht, so erhalten wir

$$\cos\chi = c\nu = \frac{\nu}{\nu_0}\cos\varphi,$$

$$F_{2\beta+1} = \cos\chi \sum_{\alpha} (2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, h_{2\alpha+1} \sin\chi^{2\alpha+1}$$

und nach (47a)

$$-\operatorname{tg}\chi \frac{d\log\mu}{d\log\nu} = \sum_{\beta} (2\beta+1) F_{2\beta+1}$$

$$= \sum_{\alpha} \cos\chi \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} h_{2\alpha+1} \sin\chi^{2\alpha+1}$$

oder mit Wiedereinführung der Anfangswerthe $f_{2\beta+1}$ der $F_{2\beta+1}$

$$-\operatorname{tg}\chi \frac{d\log\mu}{d\log\nu} = \frac{\sin 2\chi}{\sin 2\varphi} \sum_{\beta} (2\beta+1) f_{2\beta+1} P_\beta(y),$$

$$y = 2\left(\frac{\sin\chi}{\sin\varphi}\right)^2 - 1 = 1 - 2s\operatorname{cotg}\varphi^2, \quad s = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 - 1;$$

$P_\beta(y)$ ist wieder die β^{te} Kugelfunction ihres Arguments. Etwas übersichtlicher können wir schreiben

$$(48) \qquad \sum_{\beta} (2\beta+1) f_{2\beta+1} P_\beta(y)$$

$$= -2\operatorname{tg}\varphi \frac{d\log\mu}{ds} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\varphi \frac{d\log\mu}{dy} = P\operatorname{tg}\varphi,$$

$$P = -\frac{\nu_0^2}{\nu^2} \frac{d\log\mu}{d\log\nu}.$$

Nun war (das Integral vom Beobachter nach der Grenze der Atmosphäre genommen)

$$R = -\nu_0 \sin\vartheta_0 \int \frac{d\log\mu}{\Delta},$$

$$\Delta^2 = \nu^2 - \nu_0^2 \sin \vartheta_0^2 = \nu_0^2 (s + \cos \vartheta_0^2) ,$$
$$(2\sigma\Delta : \nu_0 \operatorname{tg} \varphi)^2 = 1 - 2y\sigma^2 + \sigma^4 ;$$

$$R = -\sin \vartheta_0 \int \frac{2 \operatorname{cotg} \varphi \, \sigma \, d \log \mu}{\sqrt{1 - 2y\sigma^2 + \sigma^4}}$$
$$= \sin \vartheta_0 \int_{-1}^{+1} dy \sum_{\alpha\beta} \frac{2\beta + 1}{2} f_{2\beta+1} P_\beta(y) P_\alpha(y) \sigma^{2\alpha+1}$$
$$= \sin \vartheta_0 \sum_\beta f_{2\beta+1} \sigma^{2\beta+1} ,$$

d. h. die versuchsweise angesetzte Form von R wird aus dem bestimmten Integral reproducirt, wenn als untere Grenze von y

$$y_1 = -1 ,$$

also $c = 1 : \nu_0$ angenommen wird. Wird endlich die Gleichung (47c) richtig integrirt, so entspricht dem System (38) folgendes System von Relationen:

$$\left\{ \begin{array}{r} \nu_0 \sec \varphi = \nu \sec \chi = \nu_1 , \\ m_{2\alpha+1} = \sum_\beta \frac{(-1)^{\beta-\alpha}}{\Pi(2\alpha+1)} \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)} (2\beta+1) f_{2\beta+1} , \\ F_{2\beta+1} = \frac{\cos\chi}{\cos\varphi} \sum_\alpha (2\alpha+1)_{\alpha-\beta} m_{2\alpha+1} \left(\frac{\sin\chi}{\sin\varphi}\right)^{2\alpha+1} . \\ \text{tg}\,\omega = \operatorname{tg}\varphi \sec\vartheta_0 , \quad \operatorname{tg}\Omega = \operatorname{tg}\chi \sec\vartheta , \\ \log\mu_0 = \tfrac{1}{2} f_1 \operatorname{tg}\varphi , \\ \log\mu = \tfrac{1}{2} F_1 \operatorname{tg}\chi , \\ R_0 = \sin\vartheta_0 \sum_\beta f_{2\beta+1} \operatorname{tg}\frac{\omega^{2\beta+1}}{2} , \\ R = \sin\vartheta \sum_\beta F_{2\beta+1} \operatorname{tg}\frac{\Omega^{2\beta+1}}{2} . \end{array} \right. \quad 49$$

Die Constanten f, g, h, m entsprechen den Constanten a, b, c, l der Tangentenrefraction.

Für die Horizontalrefraction (H) in der Höhe ν erhält man

$$(H) = \sum_\beta F_{2\beta+1}$$
$$= \frac{\cos\chi}{\cos\varphi} \sum_\beta f_{2\beta+1} \cos(2\beta+1) V ,$$
$$\sin\chi = \sin\varphi \cos V .$$

An den Grenzen der Atmosphäre wird

$$-\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{d\log\mu}{d\log\nu}\right)_0=\sum_\beta{}'(2\beta+1)f_{2\beta+1}\,,$$

$$-\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{d\log\mu}{d\log\nu}\right)_1=\sum_\beta{}'(2\beta+1)(-1)^\beta f_{2\beta+1}=F\,.$$

Der Ausdruck F spielt bei Anschlussversuchen dieselbe Rolle wie der entsprechende Ausdruck A bei der Tangentenrefraction (p. 543); in der That wird mit

$$\varepsilon=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}:[\sigma(\sigma^2-\varepsilon^2)(1-\sigma^2)\sin\vartheta_0]=-\frac{F}{(1+\varepsilon^2)(1+\sigma^2)}+5f_5-\frac{df_5}{dt}$$

$$-7f_7(1-\varepsilon^2-\sigma^2)-\frac{df_7}{dt}(1+\varepsilon^2+\sigma^2)+\cdots,$$

woraus die behauptete Analogie hervorgeht. Also auch hier wird man eventuell die Anzahl der Parameter durch die Zwangsbedingung $F=0$ um einen erniedrigen können.

Für $\log\mu$ gilt von der Stelle $\nu=\nu_0$ aus die Entwicklung

$$\sum_\beta{}'(2\beta+1)f_{2\beta+1}P_\beta(y)=\sum_\alpha(-1)^\alpha\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}g_{2\alpha+1}\operatorname{cotg}\varphi^{2\alpha}s^\alpha,$$

$$\log\mu_0-\log\mu=\sum_\alpha{}'(-1)^\alpha\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}g_{2\alpha+1}\operatorname{cotg}\varphi^{2\alpha+1}\frac{s^{\alpha+1}}{2\alpha+2}\,,$$

worin wieder die Verbindungen $g_{2\alpha+1}$ der $f_{2\beta+1}$ auftreten, die auch als Entwicklungscoefficienten in R selbst eine Rolle spielen[1]). Mit

$$q=\operatorname{cotg}\varphi\cos\vartheta_0$$

nämlich wird

$$R=\sin\vartheta_0\sum_\beta{}'f_{2\beta+1}(\sqrt{1+q^2}-q)^{2\beta+1}\,,$$

also der in Bezug auf q ungerade Theil von R

$$=-\frac{\sin\vartheta_0}{2}\sum_\beta{}'f_{2\beta+1}[(\sqrt{1+q^2}+q)^{2\beta+1}-(\sqrt{1+q^2}-q)^{2\beta+1}]$$

$$=-\sin\vartheta_0\sum_\alpha{}'4^\alpha g_{2\alpha+1}q^{2\alpha+1}\,;$$

---

1) Bis auf Factoren stimmen die $g_{2\alpha+1}$ mit den Coefficienten überein, die p. 530 mit B_α bezeichnet wurden.

setzt man also

$$(50)\quad \begin{cases} R = \sin\vartheta_0 \sum_\alpha (-1)^\alpha K^\alpha \cos\vartheta_0{}^\alpha, & \text{so wird} \\ 4^\alpha g_{2\alpha+1} = K^{2\alpha+1} \operatorname{tg}\varphi^{2\alpha+1} . \end{cases}$$

Den Coefficienten $b_{2\alpha+1}$ und $g_{2\alpha+1}$ am Beobachtungsorte stehen die Coefficienten $l_{2\alpha+1}$ und $m_{2\alpha+1}$ (oder $c_{2\alpha+1}$ und $h_{2\alpha+1}$) an der Grenze der Atmosphäre gegenüber; auch diese letzteren sind Entwicklungscoefficienten in der Refractionsformel selbst und zwar nach der Variablen ϑ_1. Wegen

$$\sin\psi = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\vartheta_1 ,$$
$$\sin\omega = \sin\varphi \sec\vartheta_1$$

wird nämlich

$$\tau = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = p' - \sqrt{p'^2 - 1}, \quad p' = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{cotg}\vartheta_1 ,$$

$$\sigma = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = q' - \sqrt{q'^2 - 1}, \quad q' = \operatorname{cosec}\varphi \cos\vartheta_1 ,$$

womit man als die in Bezug auf p' und q' ungeraden Theile der Tangenten- resp. Secantenrefraction die Ausdrücke

$$\sum_\alpha 4^\alpha c_{2\alpha+1} \operatorname{cotg}\vartheta_1^{2\alpha+1}$$

und

$$\sin\vartheta_1 \sum_\alpha 4^\alpha h_{2\alpha+1} \cos\vartheta_1^{2\alpha+1}$$

erhält. Da die c und h absolute Constanten und ϑ_1 der Einfallswinkel des Lichtstrahls an der Grenze der Atmosphäre ist, so sind diese beiden Ausdrücke vom Orte des Beobachters auf dem Strahl unabhängig, und zwar bedeuten sie die Horizontalrefraction dieses Strahles, oder die Hälfte der gesammten Ablenkung, die derselbe beim Durchgange durch die Atmosphäre erleidet. Um dies für die Tangentenrefraction zu zeigen, brauchen wir nur das ν zu kennen, für welches der Strahl, der im Beobachtungsorte (ν_0) den Einfallswinkel ϑ_0 besitzt, den Einfallswinkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ besitzen würde; es wird

$$\nu = \nu_0 \sin\vartheta_0 = \nu_1 \sin\vartheta_1 ,$$
$$\cos\chi = \sin\vartheta_1 , \quad \operatorname{tg}\chi = \operatorname{cotg}\vartheta_1 = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cosec}\psi ,$$
$$\cos W = \operatorname{cosec}\psi , \quad e^{iW} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} ,$$

also nach (39)

$$\mathfrak{L}(H) = \sum_{\beta} a_{2\beta+1} (\tau^{2\beta+1} + \tau^{-2\beta-1}) ,$$

$$(H) = \sum_{\alpha} 4^{\alpha} c_{2\alpha+1} \operatorname{cotg} \vartheta_1^{2\alpha+1} .$$

Da hiernach
$$R = \sum_{\beta} a_{2\beta+1} \tau^{-2\beta-1}$$
$$= \sum_{\beta} a_{2\beta+1} \operatorname{tg} \frac{\pi - \psi}{2}^{2\beta+1}$$

die Refraction des zwischen Beobachter und Austritt aus der Atmosphäre liegenden Theils des Lichtstrahles, d. h. die Refraction in der Zenithdistanz $\pi - \vartheta_0$ bedeutet, so folgt beiläufig, dass unsere Entwicklungen nach τ (oder σ) auch unterhalb des Horizontes gültig bleiben (jedoch nicht für unbegrenzt hohe Zenithdistanzen, weil schliesslich der Strahl durch den Kugelmittelpunkt gehen würde, wo die Ausdrücke für den Brechungsexponenten u. s. w. unstetig werden).

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Winkeln werden am einfachsten durch das folgende sphärische Dreieck dargestellt:

Seiten: ϑ_0, ϑ_1, ψ.

Gegenüberliegende Winkel: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \varphi$, ω.

Hieraus folgen u. a. die Relationen:

(51)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} = \tau \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} , \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{2} = \tau \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ; \\ \cos \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{2} : \cos \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} = \sigma \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} , \\ \sin \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{2} : \sin \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} = \sigma \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ; \\ \sin \frac{\omega - \varphi}{2} : \sin \frac{\omega + \varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} , \\ \cos \frac{\omega - \varphi}{2} : \cos \frac{\omega + \varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{cotg} \frac{\vartheta_1}{2} ; \\ \operatorname{tg} \frac{\omega - \varphi}{2} = \tau \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} , \\ \operatorname{tg} \frac{\omega + \varphi}{2} = \tau \operatorname{cotg} \frac{\vartheta_1}{2} . \end{cases}$$

Führen wir noch ein

$$\Theta_0 = \log \operatorname{cotg} \frac{\vartheta_0}{2}, \quad \Theta_1 = \log \operatorname{cotg} \frac{\vartheta_1}{2},$$

so bestehen für die hyperbolischen Functionen von Θ_0 und Θ_1 die ähnlichen Relationen

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{th} \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2} &= \sigma \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \\
\operatorname{th} \frac{\Theta_0 + \Theta_1}{2} &= \frac{1}{\sigma} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \\
\operatorname{ch} \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2} : \operatorname{ch} \frac{\Theta_0 + \Theta_1}{2} &= \frac{\tau}{\sigma}, \\
\operatorname{sh} \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2} : \operatorname{sh} \frac{\Theta_0 + \Theta_1}{2} &= \tau\sigma; \\
\sin \frac{\omega - \psi}{2} : \sin \frac{\omega + \psi}{2} &= \operatorname{th} \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{th} \frac{\Theta_1}{2}, \\
\cos \frac{\omega - \psi}{2} : \cos \frac{\omega + \psi}{2} &= \operatorname{coth} \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{th} \frac{\Theta_1}{2}; \\
\operatorname{tg} \frac{\omega - \psi}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \frac{\Theta_0}{2}, \\
\operatorname{tg} \frac{\omega + \psi}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{coth} \frac{\Theta_0}{2},
\end{aligned}\right.$$

die durch ein pseudosphärisches Dreieck mit den Seiten

$$\Theta_0, \qquad \Theta_1, \qquad \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

und den gegenüberliegenden Winkeln

$$\frac{\pi}{2} - \psi, \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad \omega$$

repräsentirt werden. — Es war p. 529 darauf hingewiesen worden, dass die Secantenrefraction sich nach Sinus der Vielfachen von $\vartheta_0 - \vartheta_1$ entwickeln lässt. Die vier Formeln

$$\sum_\beta a_{2\beta+1} \tau^{2\beta+1}$$

$$= \sin \vartheta_0 \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{sh}(\Theta_1 - \Theta_0) \sum_\beta a_{2\beta+1} (-1)^\beta \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \operatorname{ch}(\Theta_1 - \Theta_0)\right]^\beta,$$

$$\sum_\beta a_{2\beta+1}\tau^{-2\beta-1}$$

$$= \sin\vartheta_0 \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{sh}(\Theta_0+\Theta_1)\sum_\beta a_{2\beta+1}(-1)^\beta[\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\operatorname{ch}(\Theta_0+\Theta_1)]^\beta,$$

$$\sum_\beta f_{2\beta+1}\sigma^{2\beta+1}$$

$$= \operatorname{cosec}\vartheta_0 \operatorname{cosec}\varphi \sin(\vartheta_0-\vartheta_1)\sum_\beta f_{2\beta+1}[\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\cos(\vartheta_0-\vartheta_1)]^\beta,$$

$$\sum_\beta f_{2\beta+1}\sigma^{-2\beta-1}$$

$$= \operatorname{cosec}\vartheta_0 \operatorname{cosec}\varphi \sin(\vartheta_0+\vartheta_1)\sum_\beta f_{2\beta+1}[\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\cos(\vartheta_0+\vartheta_1)]^\beta,$$

worin

$$1+\cos\varphi^2 = \lambda\sin\varphi^2$$

gesetzt ist, zeigen, dass diese Entwicklungen auf die Kugelfunctionen und ihre Zugeordneten (vgl. HEINE, Kugelf. I, p. 200) des Arguments λ führen. — In den bisher nicht behandelten Fällen, dass $\frac{d\log\mu}{d\log\nu}$ ein Aggregat positiver gerader oder negativer ungerader Potenzen von $\frac{\nu_0}{\nu}$ war, treten die beiden Transcendenten $\vartheta_0-\vartheta_1$ und $\Theta_1-\Theta_0$ auch ausserhalb der Kreis- und Hyperbelfunctionen auf; in der That ist nach (29)

$$R_0 = \vartheta_0-\vartheta_1, \qquad R_{-1} = \sin\vartheta_0(\Theta_1-\Theta_0),$$

und nach der Recursionsformel der R_m (p. 526) kommen weitere Transcendenten nicht vor.

11.

Man kann die bisher entwickelten Analogien folgendermassen zusammenfassen. Sieht man ab von der Bezeichnung der Parameter (ausgenommen φ), so beruht die Verwandlung der Tangentenrefraction in die Secantenrefraction und umgekehrt auf einer einfachen Variablenvertauschung; führt man nämlich in die Beziehungen zwischen

der Refraction R,
dem Ausdruck $f = -\frac{d\log\mu}{d\log\nu}$,
dem Einfallswinkel ϑ,
der Variablen ν

neue Variable R', f', ϑ', ν' ein vermöge der Gleichungen

$$R' = \frac{R}{\sin\vartheta},$$

$$f' = \frac{\nu_0}{\nu} f,$$

$$\sin\vartheta \sin\vartheta' = 1,$$

$$\nu\nu' = \text{constans},$$

so erhält man eine neue, zulässige Refraction und die entsprechende Constitution der Atmosphäre. Die speciellen Werthe der obigen Variablen sind wie die allgemeinen zu transformiren; also z. B. anzusetzen

$$\cos\varphi \cos\varphi' = 1,$$

$$\sin\vartheta_0 \sin\vartheta_0' = 1,$$

woraus

$$\sin\varphi' = i \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_0' = -i \sec\vartheta_0,$$

$$\psi' = \omega,$$

$$i(\vartheta_0' - \vartheta_i') = \Theta_0 - \Theta_i$$

folgt. Diese Substitution führt nicht nur die Refraction

$$R = \sum_n{}' \alpha_{2n+1} R_{2n+1}$$

in

$$R' = \sum_n{}' \alpha_{-2n} R_{-2n},$$

sondern auch (immer bei passender Bezeichnung der Parameter) die Refraction

$$R = \sum_n{}' \alpha_{2n} R_{2n}$$

in

$$R' = \sum_n{}' \alpha_{-2n-1} R_{-2n-1},$$

allgemein jede Refraction des einen Typus (Tangentenrefraction) in die zugeordnete des andern Typus (Secantenrefraction) über, und zwar reciprok, d. h. eine nochmalige Anwendung verwandelt R' wieder in R.

So lange es sich nur um den Ausdruck der Refraction im Beobachtungsorte handelt, kann man diese Reciprocität vermei-

den und die Substitution so einrichten, dass sie, wiederholt ausgeführt, immer neue Formen für R liefert. Man erreicht dies, indem man setzt:

$$(53)\quad \begin{cases} \sec\vartheta_0' = \operatorname{tg}\vartheta_0,\ s' = \left(\frac{\nu'}{\nu_0'}\right)^2 - 1 = u = 1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2,\ \operatorname{tg}\varphi' = \sin\varphi, \\ R' = R\sin\vartheta_0',\quad Q = -\frac{\nu}{\nu_0}\frac{d\log\mu}{d\log\nu} = P' = -\frac{\nu_0'^2}{\nu'^2}\frac{d\log\mu'}{d\log\nu'}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir diese Substitution mit (T, S), so liefert ihre n-malige Anwendung die Formeln:

$$(54)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\vartheta_0 = (n + \operatorname{tg}\vartheta_0'^2)^{\frac{1}{2}},\ u = \frac{u'}{1 - nu'},\ \sin\varphi = \sin\varphi'(1 - n\sin\varphi'^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ R = R'\operatorname{cotg}\vartheta_0'(n + \operatorname{tg}\vartheta_0'^2)^{\frac{1}{2}},\quad Q = Q'(1 - nu')^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Hierdurch bringt man in jede Refractionsformel einen neuen Parameter n hinein, der zunächst ganzzahlig (positiv oder negativ) gedacht ist, von dieser Beschränkung aber weiterhin befreit werden kann. Eine so vervollständigte Refraction wollen wir, da sie bei der Transformation (T, S) ihre Form nicht mehr ändert, sondern nur die Bezeichnung ihrer Parameter wechselt, eine *Invariante* nennen. Die Bedingung, der invariante R und zugehörige Q genügen müssen, erhält man, indem man bedenkt, dass die Invarianz auch für unendlich kleine Werthe von n bestehen muss. Entwickelt man dann die Ausdrücke (54) nach Potenzen von n und setzt

$$R' = R - \frac{n}{2}\delta R + \cdots$$

u. s. w., so wird

$$\delta\operatorname{tg}\vartheta_0 = \operatorname{cotg}\vartheta_0,\quad \delta u = 2u^2,\quad \delta\sin\varphi = \sin\varphi^3,$$
$$\delta R = R\operatorname{cotg}\vartheta_0^2,\quad \delta Q = -3Qu.$$

Sind R und Q invariant, so muss, wenn die übrigen Parameter passend gewählt sind, R als Function von φ und ϑ_0, Q als Function von φ und u den partiellen Differentialgleichungen

$$\delta R - \frac{\delta R}{\delta\sin\varphi}\delta\sin\varphi - \frac{\delta R}{\delta\operatorname{tg}\vartheta_0}\delta\operatorname{tg}\vartheta_0 = 0,$$
$$\delta Q - \frac{\delta Q}{\delta\sin\varphi}\delta\sin\varphi - \frac{\delta Q}{\delta u}\delta u = 0$$

genügen, die sich mit $s = \log \sin \varphi$ und den obigen Werthen in der Form

$$(55)\qquad \begin{cases} R - \dfrac{\partial R}{\partial s} \operatorname{tg} \psi^2 - \dfrac{\partial R}{\partial \log \tau} \sec \psi = 0 , \\ 3Q + \dfrac{\partial Q}{\partial s} \dfrac{\sin \varphi^2}{u} + 2 \dfrac{\partial Q}{\partial \log u} = 0 \end{cases}$$

schreiben lassen; ihre allgemeinen Lösungen sind

$$(56)\qquad \begin{cases} R = \sin \psi \, f(\sin \varphi \cdot \cos \psi) , \\ Q = u^{-\frac{3}{2}} \, g\left(\dfrac{u \sin \varphi^2}{\sin \varphi^2 - u}\right) , \end{cases}$$

wo f und g willkürliche (natürlich mit einander in Zusammenhang stehende) Functionen ihrer Argumente bedeuten.

Ein einfaches Beispiel einer Invarianten ist der Partialbruch, der die Form

$$R = \frac{a \sin \psi}{1 + b \sin \varphi \cos \psi}$$

besitzt; man würde ihn auf dem oben angegebenen Wege aus

$$R = a \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

erhalten können. — Sucht man die Invariante zu der vollständigen Formel

$$R = \sum_{\beta} a_{2\beta+1} \tau^{2\beta+1} ,$$

so findet man

$$R = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\sqrt{n + \operatorname{tg} \vartheta_0^2}} \sum_{\beta} a_{2\beta+1} \operatorname{tg} \frac{\psi''}{2}^{2\beta+1} ,$$

$$\operatorname{tg} \psi'' = \sin \varphi \sqrt{\frac{n + \operatorname{tg} \vartheta_0^2}{1 - n \sin \varphi^2}}$$

und als zugehörige Constitution der Atmosphäre

$$Q \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - n \sin \varphi^2}}{(1 - nu)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\beta} (2\beta + 1) \, a_{2\beta+1} P_{\beta}(x) ,$$

$$x = \frac{1 + nu - 2u \operatorname{cosec} \varphi^2}{1 - nu} .$$

Setzen wir $n > 1$ voraus, so können wir schreiben:

$$
(57)\quad \left\{\begin{array}{c}
n \sin \varphi'^2 = 1\,, \quad \sin \varphi = \sin \varphi' \sin \varphi''\,, \\
\operatorname{tg} \psi' = \sin \varphi' \operatorname{tg} \vartheta_0\,, \quad \operatorname{tg} \psi'' = \operatorname{tg} \varphi'' \sec \psi'\,, \\
R = \sin \psi' \sum_\beta a_{2\beta+1} \operatorname{tg} \frac{\psi''^{2\beta+1}}{2}\,, \\
s' = \frac{u}{\sin \varphi'^2 - u}\,, \quad x = 1 - 2s' \operatorname{cotg} \varphi''^2\,, \\
2y + y^2 = s' \cos \varphi'^2\,, \quad 2z + z^2 = s'\,, \\
-\cos \varphi' \frac{\operatorname{tg} \varphi''}{\operatorname{tg} \varphi'} \frac{d \log \mu}{dy} = -\sec \varphi' \frac{\operatorname{tg} \varphi''}{\operatorname{tg} \varphi'} \frac{\nu_0}{\nu} \frac{d \log \mu}{dz} \\
= \sum_\beta (2\beta + 1)\, a_{2\beta+1}\, P_\beta(x) \\
= \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, b_{2\alpha+1} \operatorname{cotg} \varphi''^{2\alpha} s'^\alpha\,, \\
\Pi(2\alpha+1)\, b_{2\alpha+1} = \sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1} \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)}\,.
\end{array}\right.
$$

Die $b_{2\alpha+1}$ stehen mit den ungeraden Coefficienten der Reihenentwickelung

$$R : \sin \psi' \text{ nach Potenzen von } \cos \psi'$$

im bekannten Zusammenhange; ebenso die Coefficienten $l_{2\alpha+1}$,

$$\Pi(2\alpha+1)\, l_{2\alpha+1} = \sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1} (-1)^{\beta-\alpha} \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)}$$

mit den ungeraden Coefficienten der Entwicklung

$$R : \sin \psi_1 \text{ nach Potenzen von } \cos \psi_1\,,$$

wo

$$\sin \psi_1 = \cos \varphi'' \sin \psi'\,, \quad \sin \psi = \operatorname{tg} \varphi'' \operatorname{tg} \psi_1 = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta_1\,.$$

Man erhält also die Invariante zu der gewöhnlichen Tangentenrefraction, indem man deren gewöhnliche Secantenrefraction aufstellt und in letzterer φ und ϑ_0 resp. mit φ'' und ψ' vertauscht. Die Horizontalrefraction in beliebiger Höhe wird hiernach

$$(H) = \sec W' \sum_\beta a_{2\beta+1} \cos(2\beta+1)\, W''\,,$$

wo

$$\cos\chi = \frac{\nu}{\nu_0}\cos\varphi\,, \quad \operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\varphi\cos W\,, \quad \sin W' = \sin\varphi''\sin W\,,$$
$$\operatorname{tg} W' = \operatorname{tg}\varphi''\sin W''$$

oder kürzer

$$\nu_0 = \nu\cos U\,, \quad \sin U = \sin\varphi'\sin W'\,, \quad \operatorname{tg} W' = \operatorname{tg}\varphi''\sin W''.$$

So würde man z. B. aus der Kramp'schen Function

$$R = a\,\Phi(b\operatorname{cotg}\vartheta_0) - a\,h\,\Phi(s\operatorname{cosec}\psi)\,, \quad s = b\sin\varphi\,,$$
$$h = \exp(-s^2)$$

die Invariante

$$R = a\sin\psi'[\Phi(s\operatorname{cotg}\psi'') - h\,\Phi(s\operatorname{cosec}\psi'')]\,,$$
$$s = b\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi''\,, \quad h = \exp(-s^2)$$

erhalten. Das Glied mit h wird unmerklich, wenn φ'' hinlänglich gross, also φ' hinlänglich nahe an φ angenommen wird; streng verschwindet es für $\varphi'' = \frac{\pi}{2}$, $\varphi' = \varphi$,

$$R = a\sin\psi\,\Phi(b\sin\varphi\cos\psi)\,.$$

Diese Formel schliesst sich bemerkenswerth an (G) an; mit den Werthen

$\operatorname{Log} a = 3{,}364315$, $\operatorname{Log} b = 1{,}292897$, $\operatorname{Log}\sin\varphi = 9{,}361728$

würde man in Hundertel Secunden die Widersprüche

ϑ_0	80°	85°	89°	89°,5	90°
$(G) - R$	+ 3	+ 9	− 5	− 6	0

erhalten. Der Anschluss an (R) ist schlechter, was wegen der nur drei Parameter nicht auffällt.

Man kann das Bisherige, unabhängig von der Vertauschung (TS), aus der Form des Refractionsintegrales

$$R = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{2}\,Q\sin\varphi\,\tau(1 - 2x\tau^2 + \tau^4)^{-\frac{1}{2}}$$

ableiten, indem man statt x und τ andere Variable einführt, so dass die Form des Integranden und das Integrationsgebiet unverändert bleibt. D. h. es ist zu setzen

$$x = \frac{1 - \lambda y}{y - \lambda}\,, \quad y = \frac{1 + \lambda x}{x + \lambda}\,,$$

wo λ eine Constante bedeutet, deren absoluter Werth > 1 ist; andernfalls würde y von -1 zu $+1$ nicht durch 0, sondern durch ∞ gehen. Ferner sei

$$(1+\tau^4)\lambda + 2\tau^2 = S(1+\sigma^4),$$
$$1+\tau^4+2\tau^2\lambda = 2\sigma^2 S;$$

dann wird

$$(1-2x\tau^2+\tau^4)(\lambda-y) = S(1+\sigma^4-2\sigma^2 y),$$
$$R = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{2}\,\frac{\lambda^2-1}{(\lambda-y)^{\frac{3}{2}}}\,Q\sin\varphi\,\frac{\tau}{\sqrt{S}}\,(1+\sigma^4-2\sigma^2 y)^{-\frac{1}{2}},$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem ursprünglichen überein, wenn (abgesehen von constanten Factoren) R, Q, τ resp. mit

$$R\,\frac{\sqrt{S}\sigma}{\tau},\quad Q(\lambda-y)^{-\frac{3}{2}},\quad \sigma$$

vertauscht werden. Auf die frühere Bezeichnung (57) kommen wir, wenn

$$\lambda = (1+\cos\varphi'') : \sin\varphi''^2$$

gesetzt wird.

12.

Es verdient bemerkt zu werden, dass der Zusammenhang (42) zwischen den $b_{2\alpha+1}$ und den ungeraden Horizontconstanten $H^{2\alpha+1}$ sich auch auf die geraden Horizontconstanten sowie auf die Zenithconstanten ausdehnen lässt. Indem man in (32)

$$\gamma = \alpha - \tfrac{1}{2},\quad \gamma = -\alpha - 1,\quad \gamma = -\alpha - \tfrac{1}{2}$$

setzt, erhält man resp.

$$(58)\quad \begin{cases} b_{2\alpha}\,\Pi(2\alpha) = \sum_\beta (2\beta+1)\,a_{2\beta+1}\,\dfrac{\Pi(\beta+\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha+\frac{1}{2})}, \\ b_{-2\alpha-1} = \sum_\beta (2\beta+1)\,a_{2\beta+1}\,\dfrac{\Pi(2\alpha)(-1)^{\alpha-\beta}}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+1)}, \end{cases}$$
$$b_{-2\alpha} = 0$$

und durch Rechnung ergiebt sich

$$(59)\quad \begin{cases} H^{2\alpha}\sin\varphi^{2\alpha} = \frac{1}{2}4^\alpha\, b_{2\alpha}, \\ 2\cdot 4^\alpha(-1)^\alpha Z^\alpha = \sin\varphi^{2\alpha+1}\, b_{-2\alpha-1}, \end{cases}$$

Gleichungen, die zu (42) vollständig analog sind. Der entsprechende Zusammenhang besteht zwischen den Ausdrücken $l_{2\alpha}$ (die nach (38) rein imaginär sind) und den geraden Coefficienten der Entwicklung von R nach Potenzen von $\operatorname{cotg}\vartheta_1$, sowie zwischen den $l_{-2\alpha-1}$ und den Coefficienten der Entwicklung von R nach Potenzen von $\operatorname{tg}\vartheta_1$; endlich gelten die analogen Beziehungen für die Secantenrefraction und für die zugeordnete Invariante. Zwischen den Zenithconstanten und den ungeraden Horizontconstanten bestehen ebenfalls einfache Relationen, die sich in der Form

$$(60)\quad \frac{\Pi(\gamma)^2}{\Pi(2\gamma)}(-1)^\gamma b_{-2\gamma-1}=\sum_\alpha{}' \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}(-1)^\alpha b_{2\alpha+1}\cdot\frac{1}{\alpha+\gamma+1}$$

schreiben lassen. Auch die folgenden

$$(61)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}4^\beta b_{2\beta}=\sum_\alpha{}' 4^\alpha l_{2\alpha+1}\dfrac{\Pi(\alpha+\frac{1}{2})}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha+\frac{1}{2}-\beta)}, \\ a_{2\beta+1}=\sum_\alpha{}' \dfrac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(2\alpha)\,\Pi(\beta-\alpha)}\, b_{-2\alpha-1}, \\ \dfrac{\pi}{2}\, a_{2\beta+1}=\sum_\alpha{}' b_{2\alpha}(-1)^{\beta-\alpha}\sum_\gamma{}'(2\alpha)_\gamma\dfrac{1}{2\beta+2\alpha-2\gamma+1} \end{cases}$$

bieten keine Schwierigkeit; die letzte erhält man aus der Identität

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sum_\beta{}' a_{2\beta+1}(\tau^{2\beta+1}+\tau^{-2\beta-1}) &=\sum_\alpha{}' H^{2\alpha}\operatorname{cotg}\vartheta_0^{2\alpha}\\ &=\sum_\alpha{}'\tfrac{1}{2}4^\alpha b_{2\alpha}\operatorname{cotg}\psi^{2\alpha}\end{aligned}$$

oder mit $\tau=e^{iW}$

$$\sum_\beta{}' a_{2\beta+1}\cos(2\beta+1)W=\sum_\alpha{}'\tfrac{1}{2}4^\alpha(-1)^\alpha b_{2\alpha}\sin W^{2\alpha}$$

durch das Fourier'sche Verfahren. — Man könnte ferner statt der Gleichungen, welche die $b_{2\alpha+1}$ und $l_{2\alpha+1}$ als Functionen der $a_{2\beta+1}$ liefern, deren Auflösungen, z. B. die Gleichung

$$a_{2\beta+1}=\sum_\alpha{}'(2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, l_{2\alpha+1}$$

in der angegebenen Weise umformen, also

$$(62)\qquad a_{2\beta+1}=\sum_\alpha{}'\frac{\Pi(2\alpha)}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2}-\beta)\,\Pi(\alpha+\frac{1}{2}+\beta)}\, l'_{2\alpha}$$

setzen. Man würde damit die Identität

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\beta}{}' a_{2\beta+1}(\tau^{2\beta+1}+\tau^{-2\beta-1}) = \sum_{\alpha}{}' \tfrac{1}{2}\,4^{\alpha}\, l'_{2\alpha}\operatorname{cosec}\psi^{2\alpha}$$

erhalten. Da im Falle der gewöhnlichen Tangentenrefraction die linke Seite

$$= \sum_{\alpha}{}' 4^{\alpha}\, l_{2\alpha+1}\operatorname{cosec}\psi^{2\alpha+1}\,,$$

also nicht nach geraden, sondern nach ungeraden Potenzen von $\operatorname{cosec}\psi$ entwickelbar ist, so verlangt die obige Identität, dass die $l'_{2\alpha}$ theilweise unendlich werden. Hingegen werden wir noch eine andere Entwickelung von R kennen lernen, in der die $l'_{2\alpha}$ an Stelle der $l_{2\alpha+1}$ treten und die letzteren ihre Bedeutung verlieren.

Aus den Entwickelungen der Potenzenformel kann man verschiedene Formen der Beziehung zwischen $f \overset{\bullet}{=} -\dfrac{d\log\mu}{d\log\nu}$ und R herleiten, also dasselbe Problem lösen, das auch durch die partielle Differentialgleichung gelöst wird. Wir stellen zunächst für die Tangentenrefraction drei einander entsprechende Formen von R und $Q = \dfrac{\nu}{\nu_0} f$ zusammen; die Aufstellung der analogen Beziehungen für Secantenrefraction und Invariante bietet keine Schwierigkeit. Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$\nu = \nu_1 \cos\chi\,,\quad \operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\varphi\cos W\,,\quad x = \cos 2W\,,$$
$$u = \sin\varphi^2 \sin W^2\,.$$

$$R = \sum_{\beta}{}' a_{2\beta+1}\,\tau^{2\beta+1}\,,$$

$$Q\sin\varphi = \sum_{\beta}{}'(2\beta+1)\,a_{2\beta+1}\,P_{\beta}(x)\,.$$

$$R_1 = \tfrac{1}{2}\sum_{\beta}{}' a_{2\beta+1}(\tau^{-2\beta-1}+\tau^{2\beta+1})$$
$$= \sum_{\alpha}{}' 4^{\alpha}\, c_{2\alpha+1}\operatorname{cotg}\vartheta_1^{2\alpha+1} = \sum_{\alpha}{}' 4^{\alpha}\, l_{2\alpha+1}\operatorname{cosec}\psi^{2\alpha+1}\,,$$

$$Q\cos\varphi = \sum_{\alpha}{}' \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, c_{2\alpha+1}\operatorname{tg}\chi^{2\alpha}$$
$$= \operatorname{cotg}\varphi \sum_{\alpha}{}' \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, l_{2\alpha+1}\cos W^{2\alpha}\,.$$

$$R_0 = \tfrac{1}{2}\sum_\beta a_{2\beta+1}\,(\tau^{-2\beta-1} - \tau^{2\beta+1})$$

$$= \sum_\alpha H^{2\alpha+1} \operatorname{cotg} \vartheta_0^{2\alpha+1} = \sum_\alpha 4^\alpha b_{2\alpha+1} \operatorname{cotg} \psi^{2\alpha+1} ,$$

$$Q = \sum_\alpha (-1)^\alpha H^{2\alpha+1} \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2\, 4^\alpha} u^\alpha$$

$$= \operatorname{cosec}\varphi \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} b_{2\alpha+1} \sin W^{2\alpha} .$$

Wir können diese Zusammenhänge in Form bestimmter Integrale schreiben, wenn wir uns erinnern, dass

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h^\beta\, d\lambda ,$$

$$h = x + i\sqrt{1-x^2}\cos\lambda = \cos 2W + i \sin 2W \cos\lambda ,$$

$$\frac{\Pi(2\alpha)}{4^\alpha\, \Pi(\alpha)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\lambda^{2\alpha}\, d\lambda .$$

Es bezeichne

P den Ausdruck $\dfrac{dR}{d\tau}$, darin gesetzt $\tau^2 = h$,

P_1 » » $\dfrac{dR_1}{d\operatorname{cosec}\psi}$, » » $\operatorname{cosec}\psi = \cos\lambda\cos W$,

P_0 » » $\dfrac{dR_0}{d\operatorname{cotg}\psi}$, » » $\operatorname{cotg}\psi = i\cos\lambda\sin W$,

dann wird einfach

$$(63) \qquad Q\sin\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_1\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_0\, d\lambda .$$

Einige einfache Beispiele der Anwendung dieser Formeln werden genügen.

a) $R = \dfrac{a\tau}{1+b\tau^2}$ (Partialbruch).

$$P = a\cdot\frac{1-bh}{(1+bh)^2}, \quad P_1 = a(1+b)\cdot\frac{(1-b)^2 - 4b\cos\lambda^2\cos W^2}{[(1-b)^2+4b\cos\lambda^2\cos W^2]^2} ,$$

$$P_0 = a(1-b)\cdot\frac{(1+b)^2+4b\cos\lambda^2\sin W^2}{[(1+b)^2-4b\cos\lambda^2\sin W^2]^2},$$

$$Q\sin\varphi = \tfrac{1}{4}a(1-b^2)(1+2bx+b^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

b) $$R = \frac{a}{2}\log\frac{1+b\tau}{1-b\tau}\cdot$$

$$P = \frac{ab}{1-b^2h},$$

$$P_1 = \frac{ab(1+b^2)}{(1+b^2)^2-4b^2\cos\lambda^2\cos W^2},$$

$$P_0 = \frac{ab(1-b^2)}{(1-b^2)^2+4b^2\cos\lambda^2\sin W^2},$$

$$Q\sin\varphi = \frac{ab}{4}(1+b^4-2b^2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

c) $$R = a\tau\exp(b\tau^2).$$

$$P = ae^{bh}(1+2bh),$$

$$Q\sin\varphi = \frac{ae^{bx}}{\pi}\int_0^{\pi}d\lambda\exp(ib\sqrt{1-x^2}\cos\lambda)(1+2bx+2bi\sqrt{1-x^2}\cos\lambda)$$

$$= ae^{bx}[(1+2bx)J_0(b\sqrt{1-x^2}) - 2b\sqrt{1-x^2}J_1(b\sqrt{1-x^2})],$$

wo die J_α die BESSEL'schen Functionen bedeuten.

Die Form des so erhaltenen Ausdrucks für Q erlaubt sofort zu entscheiden, ob das vorgelegte R als Refractionsformel in beliebiger Höhe zulässig ist. Es ist

$$R = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{2}Q\sin\varphi\,\tau(1-2x\tau^2+\tau^4)^{-\frac{1}{2}},$$

also die Refraction in der durch $x=\xi$ dargestellten Höhe

$$(R) = \int_{-1}^{\xi}\frac{dx}{2}Q\sin\varphi\,\tau(1-2x\tau^2+\tau^4)^{-\frac{1}{2}},$$

oder wenn wir setzen

$$\frac{1+x}{2} = \frac{1+\xi}{2}\cdot\frac{1+X}{2},\quad \sin\Psi^2 = \frac{1+\xi}{2}\sin\psi^2,$$

$$T = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

und X als neue Integrationsvariable einführen,

$$(R) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{2}}\,\frac{dX}{2}\,(Q)\sin\varphi\; T(1 - 2XT^2 + T^4)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn (Q) den durch obige Substitution aus Q entstehenden Ausdruck bezeichnet. Damit also (R) in der Form mit R übereinstimme, d. h. damit zugleich

$$R = f(\tau,\ a,\ b,\ c,\ \ldots)$$

und

$$(R) = f(T,\ A,\ B,\ C,\ \ldots)$$

sei, worin die $A, B, C, \ldots$ Functionen der $a, b, c, \ldots$ und des Höhenparameters ξ sind, muss $(Q)\sin\varphi\sqrt{\frac{1+\xi}{2}}$ mit $Q\sin\varphi$ in der Form übereinstimmen, d. h. es muss zugleich

$$Q\sin\varphi = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$$

und

$$(Q)\sin\varphi\sqrt{\frac{1+\xi}{2}} = \varphi(X, A, B, C, \ldots)$$

sein. Setzen wir

$$\frac{1+x}{2} = y^2,\quad \frac{1+\xi}{2} = \eta^2,\quad \frac{1+X}{2} = Y^2,$$

sowie

$$Q\sin\varphi = \psi(y, a, b, c, \ldots),$$

so folgt

$$\eta\,\psi(\eta Y, a, b, c, \ldots) = \psi(Y, A, B, C, \ldots),$$

woraus für die Form von Q das einfache Kriterium folgt: Jede besondere Potenz von y, die in Q auftritt, muss mit einem besonderen *willkürlichen* Parameter multiplicirt sein. Man übersieht, dass von den obigen drei Beispielen nur die beiden ersten diese Bedingung erfüllen, während im dritten das Argument der BESSEL'schen Functionen

$$b\sqrt{1 - x^2} = 2by\sqrt{1 - y^2}$$

die Quadratwurzel aus einem Binom ist, zwischen dessen beiden Coefficienten eine Relation besteht. Der Ausdruck $R = a\tau\exp(b\tau^2)$

ist also, wie auch die partielle Differentialgleichung lehren würde, nicht als Refractionsformel in beliebiger Höhe anzuwenden.

Beiläufig sei bemerkt, dass man (R), statt durch Integration über Q mit einem Factor $(1 - 2x\tau^2 + \tau^4)^{-\frac{1}{2}}$, auch unmittelbar durch Integration über Q selbst, darin eine gewisse Substitution ausgeführt, erhalten kann. Nach (38) ist

$$(R) = \sum_{\alpha\beta} T^{2\beta+1}(2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, l_{2\alpha+1} \cos W^{2\alpha+1} ,$$

und wegen

$$\sum_{\beta}(2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, T^{2\beta} = \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\int_0^1 (1-s)^\alpha (1+sT^2)^\alpha\, ds$$

folgt

$$(R) = T\cos W \sin\varphi \int_0^1 [Q]\, ds ,$$

wo $[Q]$ aus Q hervorgeht, indem man $\cos W^2$ mit

$$\cos W^2(1-s)(1+sT^2)$$

vertauscht. Dasselbe folgt aus der vorhin gefundenen Form für (R) durch die Substitution

$$\frac{1+X}{2} = (1-s)(1+sT^2) .$$

Es liegt nahe, zwischen den beiden Methoden (partielle Differentialgleichung und Formeln (63)), zu einem gegebenen R das zugehörige Q zu finden, eine Vergleichung anzustellen. Die partielle Differentialgleichung hat den Nachtheil, dass sie gewisse Specialitäten, die der Beobachtungsort eventuell in die Refraction hineingebracht hat, nicht wieder aufzuheben vermag. Nehmen gewisse, von der Höhe abhängige Parameter der Refractionsformel für den Beobachtungsort nicht empirische, sondern numerische Werthe an, so versagt im Allgemeinen die Anwendung der partiellen Differentialgleichung schon beim ersten Schritte, während die Formeln (63) meistens zur Kenntniss von Q führen, also die wirkliche Vervollständigung der vorliegenden zu einer allgemeinen Refractionsformel erlauben. Ein solcher Fall war die Refraction $R = a\tau \exp(b\tau^2)$, die nicht für beliebige Höhe, sondern nur für den Beobachtungsort gilt; die partielle Differentialgleichung zeigt dies zwar, gestattet aber die nothwendigen Ergänzungsglieder nicht wirklich zu bestimmen, während dem nach

unseren Formeln, abgesehen von der Complication, nichts im Wege steht. Die partielle Differentialgleichung schliesst also die Fälle aus, wo der allgemeine Refractionsausdruck im Beobachtungsorte einen »ausgezeichneten« Schnitt besitzt; in Wirklichkeit fällt dieser Mangel allerdings kaum ins Gewicht, da wir genug einfache, in der ganzen Atmosphäre gleichgebaute Refractionsausdrücke als Interpolationsformeln zur Verfügung haben, um auf diejenigen zu verzichten, die sich nur für den Beobachtungsort stark vereinfachen. — Unsere Formeln (63) hingegen werden im Allgemeinen versagen, wenn dem gegebenen R die Entwicklung nach ungeraden Potenzen von τ nicht natürlich ist, wenn R, anders ausgedrückt, nicht zum einfachen Typus einer Tangentenrefraction gehört. Dies tritt namentlich ein, wenn die Höhe der Atmosphäre sehr gross angenommen wird, also $\sin\varphi$ keinen genau bestimmten Werth mehr besitzt, z. B. für die Oppolzer'sche Formel und ihre Verwandten.

Beiden Methoden gemeinsam ist, dass das mit dem gefundenen Q berechnete bestimmte Integral R mit dem ursprünglich vorliegenden R' nicht übereinzustimmen braucht. Ein sehr häufiger Fall ist, dass $R - R'$ in der Nähe des Horizontes nach geraden Potenzen von $\operatorname{cotg}\psi$ oder $\operatorname{cotg}\vartheta_0$ entwickelbar ist. Dies erklärt sich sehr einfach dadurch, dass man mittelst der partiellen Differentialgleichung die Constitution der Atmosphäre in der Form erhält, die für die untersten Schichten gilt; diese entspricht denjenigen Entwicklungen von Q, worin die ungeraden Horizontconstanten auftreten, also der dritten der Formeln (63). Die geraden Horizontconstanten spielen dabei keine Rolle und können im ursprünglichen Ausdruck R' Werthe gehabt haben, die durch Anwendung des bestimmten Integrales nicht reproducirt werden; $R - R'$ ist also in Bezug auf $\operatorname{cotg}\vartheta_0$ gerade. So lieferte die Anwendung der partiellen Differentialgleichung zu der Oppolzerschen Formel das Ergänzungsglied

$$R - R' = -\,ah\,\Phi(s\operatorname{cosec}\psi)\,;$$

so hatte Herr Bruns ((*HB*) p. 184) für den Partialbruch angesetzt

$$R' = \frac{1}{a\operatorname{cotg}\vartheta_0 + b} = \frac{H\operatorname{tg}\lambda\sin\psi}{\cos(\psi-\lambda)}, \quad n = 1 + \operatorname{cosec}\lambda$$

und gefunden:

$$R = \frac{H\sin\psi\sin\lambda}{\sin\lambda + \cos\psi}, \quad \text{also} \quad R' - R = \frac{H\sin\psi\sin\lambda\operatorname{tg}\lambda}{\cos\lambda + \sin\psi}.$$

Ein anderes Beispiel ist $R = a \sin \psi$ selbst; man findet hier $Q = 0$, abgesehen von der Stelle $\nu = \nu_1$, wo $Q = \infty$. Also bleibt der Brechungsexponent μ constant $= \mu_0$ zwischen $r = r_0$ und $r = \frac{r_1}{\mu_0}$, nimmt zwischen $r = \frac{r_1}{\mu_0}$ und $r = r_1$ nach der Formel $r\mu = r_1$ ab und erreicht für $r = r_1$ den Werth 1; die Bahn des Lichtstrahls ist zwischen $r = r_0$ und $r = \frac{r_1}{\mu_0}$ eine gerade Linie, von da bis zur Grenze der Atmosphäre eine Spirale, deren Gleichung in Polarcoordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel, lautet

$$r_1 : r = \exp(\operatorname{cotg} \vartheta_1 \overset{\frown}{r r_1}) .$$

Endlich, einer späteren Anwendung wegen, wollen wir das Beispiel

$$R' = \sum_\beta a'_{2\beta+1} \tau'^{2\beta+1}$$

behandeln, wo

$$\tau' = \operatorname{tg} \frac{\psi'}{2}, \quad \operatorname{tg} \psi' = \sin \varphi' \operatorname{tg} \vartheta_0$$

und φ' nicht mit dem Höhenwinkel φ der Atmosphäre identisch sein soll. Die Anwendung der dritten Formel (63) giebt

$$Q \sin \varphi' = \sum_\beta a'_{2\beta+1} (2\beta + 1) P_\beta(x'), \quad x' = 1 - 2u \operatorname{cosec} \varphi'^2 ,$$

d. h. dieselbe Constitution der Atmosphäre, als ob φ' der Höhenwinkel wäre. Dies in das bestimmte Integral eingesetzt, ergiebt aber, weil für x' die Integrationsgrenzen nicht ± 1 sind, nicht R', sondern, wenn wieder x eingeführt wird, eine lineare Verbindung von τ, τ^3, τ^5, ...

$$R = \sum_\beta a_{2\beta+1} \tau^{2\beta+1} .$$

Thatsächlich läuft dies darauf hinaus: Man setzt eine Constitution Q der Atmosphäre mit dem Höhenwinkel φ' an, die zugehörige Refraction wird R'. Nun aber vermehrt man jedes $\log \mu$, als Function von ν, um eine beliebige Constante $\varepsilon \gtrless 0$; der Werth von ν, wo nunmehr $\log \mu$ die Grenze 1 erreicht, werde durch φ gekennzeichnet. Dieselbe Constitution der Atmosphäre liefert also eine neue Refraction R, die aus R' dadurch

entsteht, dass man die Refraction zwischen φ' und φ zu R' hinzufügt (resp. für $\varepsilon < 0$ abzieht).

Wenden wir dies auf unseren Fall an. Die $l'_{2\alpha+1}$ bezeichnen die bekannten Verbindungen der $a'_{2\beta+1}$; die Refraction R' in der Höhe $\nu = \nu'_1 \cos\chi'$ wird dann

$$(R') = \sum_\beta A'_{2\beta+1} \operatorname{tg}\frac{\Psi'}{2}^{2\beta+1}, \quad \operatorname{tg}\Psi' = \sin\chi' \operatorname{tg}\vartheta,$$

$$A'_{2\beta+1} = \sum_\alpha (2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, l'_{2\alpha+1} \left(\frac{\operatorname{tg}\chi'}{\operatorname{tg}\varphi'}\right)^{2\alpha+1}.$$

Setzen wir $\nu = \nu_1 = \nu_0 \sec\varphi$, so wird

$$\cos\chi' = \cos\varphi' : \cos\varphi,$$
$$\operatorname{tg}\Psi' = \sin\chi' \operatorname{tg}\vartheta_1.$$

Mit

$\sin\varphi = \sin\varphi' \sin\varphi''$ (was ein negatives ε voraussetzt)

folgt

$$\operatorname{tg}\chi' = \operatorname{tg}\varphi' \cos\varphi'',$$
$$\operatorname{tg}\Psi' = \sin\psi \operatorname{cotg}\varphi'',$$
$$A'_{2\beta+1} = \sum_\alpha (2\alpha+1)_{\alpha-\beta}\, l'_{2\alpha+1} \cos\varphi''^{2\alpha+1},$$
$$(R') = \sum_\beta A'_{2\beta+1} \operatorname{tg}\frac{\Psi'}{2}^{2\beta+1}.$$

Es bestätigt sich, dass $(R') = R' - R$ in der Umgebung von $\psi = \frac{\pi}{2}$ nach geraden Potenzen von $\operatorname{cotg}\psi$ entwickelbar ist.

Hierzu wieder ein einfaches Beispiel ist etwa

$$R' = a'\psi', \quad \text{woraus} \quad (R') = a'\Psi'$$

folgt. Man findet

$$\operatorname{tg}\frac{\psi' - \Psi'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi''}{2} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\psi' + \Psi'}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi''}{2} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}.$$

Dass diese Refractionen gleiche Anfangsconstitution der Atmosphäre liefern, geht auch aus dem früher gefundenen Ausdruck

$$Q = \frac{ab}{4}(1 - 2b^2 x + b^4)^{-\frac{1}{2}},$$

der zu

$$R = \frac{a}{2} \log \frac{1 + b\tau}{1 - b\tau}$$

gehört, durch die Substitutionen $2a' = ai$,

$$b = i \operatorname{tg} \frac{\varphi''}{2} \quad \text{oder} \quad b = i \operatorname{cotg} \frac{\varphi''}{2}$$

hervor. Die Doppelheit der Werthe beruht darauf, ob der Winkel φ'' im ersten oder zweiten Quadranten genommen wird, und bezieht sich auf die beiden verschiedenen Punkte, in denen der Lichtstrahl von der zu φ gehörigen Kugel geschnitten wird, d. h. auf die Refraction in den Zenithdistanzen ϑ_0 und $\pi - \vartheta_0$.

Ein besonderer Fall ist, dass die ursprüngliche Atmosphäre unendlich hoch, also $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi'' = \varphi$ angenommen wird; ψ' und Ψ' gehen dann resp. in ϑ_0 und ϑ_1 über. Hiervon werden wir noch eine Anwendung machen. Auf diese Weise können wir uns die vervollständigte OPPOLZER'sche Formel entstanden denken; das Ergänzungsglied ist die Refraction von der Höhe φ bis zur Höhe ∞.

Auf Grund des Gesagten erledigt sich der früher (§ 9) gemachte Vorschlag, durch Hinzufügung eines *positiven* ε zu $\log \mu$ den Spielraum abzugrenzen, innerhalb dessen sich die Lufttemperaturen der höheren Schichten variiren lassen. Man würde in diesem Falle noch die Refraction von der bisherigen Grenze der Atmosphäre bis zu der neuen ($\log \mu = 1$) hinzuzunehmen haben, und zwar, da kein Gegengrund vorliegt, mit derselben Constitution Q der Atmosphäre; diese Ergänzung ist also eine mit ε vollständig bestimmte Grösse, die im Allgemeinen numerisch merklich sein wird. Ein Ausnahmefall wäre, dass Q in dem neuen Intervall das Zeichen wechselte; dann aber ist die Erweiterung eben unzulässig. — Dagegen lässt sich diese Erwägung umgekehrt anwenden: gesetzt, wir hätten eine numerisch brauchbare Refraction R' mit der Höhe φ', deren zugehöriges Q in der Höhe $\varphi_1 < \varphi'$ das Zeichen wechselt. Bei passend gewähltem $\varphi < \varphi_1$ ist es dann sehr wohl möglich, dass die Refraction zwischen φ und φ' numerisch unmerklich wird, da sie durch Addition der positiven Refraction von φ bis φ_1 und der negativen von φ_1 bis φ' entsteht; die vorliegende Refraction mit zugehörigem Q ist also physikalisch zulässig, aber nicht mit der

Höhe φ', sondern φ. Als Beispiel hierzu bieten sich von selbst die in § 4 abgeleiteten Refractionen $(\Phi G)_1$ und $(\Phi G)_2$ dar, von denen sich p. 561 herausstellte, dass Q in verhältnissmässig geringen Höhen das Zeichen wechselte; die Atmosphärenhöhe war zuerst unendlich gross gedacht. R' besass die Form

$$R' = l\Phi(x) + (m-l)x(1-2x\Phi) + Cx[(1+x^2)(1-2x\Phi) - x\Phi]$$
$$x = b\cotg\vartheta_0 ,$$

Φ die Kramp'sche Function, b, l, m, C Parameter. Die Ergänzungsglieder, die hinzuzufügen sind, wenn statt der unendlichen Höhe die Höhe φ genommen, aber die Constitution der Atmosphäre unverändert gelassen wird, können auf die Form gebracht werden

$$R = R' - h\,\delta R ,$$
$$\delta R = \lambda\Phi(S) + (\mu-\lambda)S[1 - 2S\Phi(S)] + CS[(1+S^2)(1-2S\Phi(S)) - S\Phi(S)] ,$$
$$S = s\operatorname{cosec}\psi , \quad s = b\sin\varphi , \quad h = \exp(-s^2) ,$$
$$\lambda = l + 2s^2(m-l) + 3Cs^2 - 2Cs^4 ,$$
$$\mu - \lambda = m - l - 2Cs^2 .$$

Insbesondere wird die mit $-h$ multiplicirte Aenderung der Horizontconstante

$$\delta H = \lambda\Phi(s) + (\mu-\lambda)s(1 - 2s\Phi(s)) + Cs[(1+s^2)(1-2s\Phi(s)) - s\Phi(s)]$$
$$= l\Phi(s) + (m-l)s + Cs(1-s^2) .$$

Bestimmt man s aus der Gleichung $\delta H = 0$, so erhält man ein φ, das in der That nur unerhebliche Unterschiede zwischen R' und R übrig lässt; die Rechnung zeigt, dass die Widersprüche unter $0''.1$ bleiben. Eine geringe Variation der Parameter würde zur vollständigen Wiederherstellung des Anschlusses genügen; die Hypothesen $(\Phi G)_1$ und $(\Phi G)_2$ sind also sehr wohl brauchbar, aber unter Voraussetzung endlicher Atmosphärenhöhe.

13.

Anhangsweise wollen wir noch eine Entwicklung von R behandeln, die in manchen Beziehungen als Gegenstück zu der Entwicklung nach Potenzen von τ erscheint. Das allgemeine Glied von R ist hier eine sogenannte Kugelfunction zweiter Art,

über die wir das Nothwendige kurz vorausschicken wollen (vgl. HEINE, Kugelfunctionen I, pp. 78, 125).

Die Kugelfunction zweiter Art β^{ter} Ordnung des Argumentes y tritt als Coefficient in folgender Entwicklung auf

$$[y - \cos(W + W_1)]^{-\frac{1}{2}} [y - \cos(W - W_1)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_\beta (2\beta + 1) P_\beta(\cos W) P_\beta(\cos W_1) Q_\beta(y) ,$$

wo P_β die gewöhnliche Kugelfunction β^{ter} Ordnung bedeutet. Hieraus folgen für $W_1 = \frac{\pi}{2}$ und $W_1 = 0$ die speciellen Formeln

$$(64) \quad (y^2 - \sin W^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_\beta (4\beta + 1)(-\tfrac{1}{2})_\beta P_{2\beta}(\cos W) Q_{2\beta}(y) ,$$

$$(65) \quad \frac{1}{y - x} = \sum_\beta (2\beta + 1) P_\beta(x) Q_\beta(y) ,$$

aus letzterer also

$$(66) \quad 2 Q_\beta(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_\beta(x)\, dx}{y - x} .$$

Die Ausführung der Quadraturen ergiebt

$$(67) \quad 2 Q_\beta(y) = \log \frac{y + 1}{y - 1} \cdot P_\beta(y) + R_\beta(y) ,$$

wo R_β eine ganze, gerade oder ungerade Function $(\beta - 1)^{\text{ten}}$ Grades von y bedeutet. Für die ersten geraden Indices, die wir im Folgenden allein brauchen, findet man

$$(68) \quad \begin{cases} 2 Q_0(y) = \log \dfrac{y + 1}{y - 1} , \\ 2 Q_2(y) = \left(\dfrac{3}{2} y^2 - \dfrac{1}{2}\right) \log \dfrac{y + 1}{y - 1} - 3y , \\ 2 Q_4(y) = \left(\dfrac{35}{8} y^4 - \dfrac{15}{4} y^2 + \dfrac{3}{8}\right) \log \dfrac{y + 1}{y - 1} - \dfrac{35}{4} y^3 + \dfrac{55}{12} y , \\ \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Entwicklungen ist nicht unbeschränkt, ausgenommen den Fall eines rein imaginären y, auf den wir in Wirklichkeit kommen werden.

Für die Entwicklung der Kugelfunctionen $P_{2\beta}(x)$ nach geraden Potenzen von x und umgekehrt gelten die Formeln

$$(69)\qquad P_{2\beta}(x)=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\tfrac{1}{2})}\,\frac{4^{\alpha}x^{2\alpha}}{\Pi(2\alpha)},$$

$$(70)\qquad \frac{4^{\alpha}x^{2\alpha}}{\Pi(2\alpha)}=\sum_{\beta}\frac{4\beta+1}{2}\,\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}\,P_{2\beta}(x).$$

Damit erhält man aus (65) für die Entwicklung von $Q_{2\beta}(y)$ nach ungeraden Potenzen von $\frac{1}{y}$ und umgekehrt

$$(71)\qquad 2\,Q_{2\beta}(y)=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}\,\frac{\Pi(2\alpha)}{4^{\alpha}y^{2\alpha+1}},$$

$$(72)\qquad \frac{\Pi(2\alpha)}{4^{\alpha}y^{2\alpha+1}}=\sum_{\beta}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\tfrac{1}{2})}\,(4\beta+1)\,Q_{2\beta}(y).$$

Und hiermit wieder aus (64) für die Entwicklung von $P_{2\beta}(\cos W)$ nach geraden Potenzen von $\sin W$ und umgekehrt

$$(73)\qquad (-\tfrac{1}{2})_{\beta}\,P_{2\beta}(\cos W)=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\tfrac{1}{2})}\,\frac{\sin W^{2\alpha}}{\Pi(\alpha)^{2}},$$

$$(74)\qquad \frac{\sin W^{2\alpha}}{\Pi(\alpha)^{2}}=\sum_{\beta}\frac{4\beta+1}{2}\,\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}\,(-\tfrac{1}{2})_{\beta}\,P_{2\beta}(\cos W);$$

endlich für die Entwicklung von $Q_{2\beta}(y)$ nach ungeraden Potenzen von $\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{y^{2}-1}}$ und umgekehrt

$$(75)\qquad (-\tfrac{1}{2})_{\beta}\,2Q_{2\beta}(y)=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}\left(\frac{\Pi(2\alpha)}{4^{\alpha}\Pi(\alpha)}\right)^{2}\frac{(-1)^{\alpha}}{z^{2\alpha+1}},$$

$$(76)\qquad \left(\frac{\Pi(2\alpha)}{4^{\alpha}\Pi(\alpha)}\right)^{2}\frac{(-1)^{\alpha}}{z^{2\alpha+1}}=\sum_{\beta}\frac{\Pi(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\tfrac{1}{2})}\,(4\beta+1)\,(-\tfrac{1}{2})_{\beta}\,Q_{2\beta}(y).$$

Dies vorausgeschickt, war

$$R=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{2}\,Q\sin\varphi\,\tau(1-2x\tau^{2}+\tau^{4})^{-\frac{1}{2}}$$

oder mit $x=\cos 2W$, $\xi=\cos W$

$$R = \int_0^1 \xi\, d\xi\, Q \sin\varphi\, (\operatorname{cotg}\psi^2 + \sin W^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 i\xi\, d\xi\, Q \sin\varphi\, ((i\operatorname{cotg}\psi)^2 - \sin W^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 i\xi\, d\xi\, Q \sin\varphi \sum_\beta (4\beta+1)(-\tfrac{1}{2})_\beta\, P_{2\beta}(\xi)\, Q_{2\beta}(i\operatorname{cotg}\psi).$$

Setzen wir daher

$$Q\xi\sin\varphi = \sum_\beta a_{2\beta}\, P_{2\beta}(\xi), \tag{77}$$

so wird wegen

$$\int_0^1 P_{2\beta}(\xi)\, P_{2\alpha}(\xi)\, d\xi = e_{\alpha\beta}\frac{1}{4\beta+1}$$

$$R = \sum_\beta a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta\, i\, Q_{2\beta}(i\operatorname{cotg}\psi)\,. \tag{78}$$

Dies ist die in Rede stehende Entwicklung; die ersten Glieder werden nach (68)

$$\left\{\begin{aligned} iQ_0 &= \psi\,, \\ -iQ_2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\psi^2\right)\cdot\psi - \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\psi\,, \\ iQ_4 &= \left(\frac{3}{8} + \frac{15}{4}\operatorname{cotg}\psi^2 + \frac{35}{8}\operatorname{cotg}\psi^4\right)\psi \\ &\quad - \left(\frac{55}{24}\operatorname{cotg}\psi + \frac{35}{8}\operatorname{cotg}\psi^3\right), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Um sie numerisch zu verwenden, würde man zweckmässig die einzelnen Glieder mit dem Argument ψ tabuliren. Ich habe mich überzeugt, dass der Anschluss an (G) bereits mit drei Gliedern genügt; nimmt man ein viertes hinzu, so hilft die Zwangsbedingung

$$0 = \sum_\beta a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta\,,$$

die das Verschwinden von Q an der Grenze der Atmosphäre

ausdrückt, einen Parameter ersparen. Andernfalls würde Q an der Grenze ∞ werden.

Bei endlicher Gliederanzahl ist in (78) der in Bezug auf cotg ψ *gerade* Theil von R endlich; dies ist der wesentliche Unterschied gegenüber der Entwicklung nach Potenzen von τ. Wir können setzen

$$(80)\qquad \begin{cases} R = \psi S + T\,, \\ S = \sum_\beta a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta\, P_{2\beta}(i\,\mathrm{cotg}\,\psi)\,, \\ T \text{ eine ungerade Function von } \mathrm{cotg}\,\psi\,. \end{cases}$$

Der in Bezug auf cotg ψ gerade Theil von R wird daher

$$R_1 = \frac{\pi}{2} S\,,$$

und setzen wir wie früher

$$R_1 = \sum_\alpha H^{2\alpha}\,\mathrm{cotg}\,\vartheta_0^{2\alpha} = \sum_\alpha \tfrac{1}{2}\,4^\alpha\, b_{2\alpha}\,\mathrm{cotg}\,\psi^{2\alpha}\,,$$

so erhalten wir durch Anwendung von (69) und (70) zwischen den a, b die Relationen

$$(81)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\, b_{2\alpha}\,\Pi(2\alpha)(-1)^\alpha = \sum_\beta \dfrac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\frac{1}{2})}\, a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta\,, \\ \pi\, a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta = \sum_\alpha \dfrac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}\, \dfrac{4\beta+1}{2}\, b_{2\alpha}(-1)^\alpha\,\Pi(2\alpha)\,. \end{cases}$$

Setzen wir ferner die Zenithentwicklung an

$$R = \sum_\alpha (-1)^\alpha\, Z^\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0^{2\alpha+1} = \sum_\alpha b_{-2\alpha-1}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\psi}{2}\right)^{2\alpha+1}\,,$$

so liefern (71) und (72) die Relationen

$$(82)\qquad \begin{cases} \dfrac{b_{-2\alpha-1}(-1)^\alpha}{\Pi(2\alpha)} = \sum_\beta \dfrac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}\, a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta\,, \\ a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta = \sum_\alpha \dfrac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\frac{1}{2})}\, \dfrac{4\beta+1}{2}\, \dfrac{b_{-2\alpha-1}(-1)^\alpha}{\Pi(2\alpha)}\,, \end{cases}$$

deren erste aus der mit $(81)_1$ äquivalenten Gleichung

$$b_{2\alpha}\,\Pi(2\alpha) = \sum_\beta \frac{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)}\, a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})_\beta(-1)^\beta$$

durch Vertauschung von α mit $-\alpha-\frac{1}{2}$ entsteht; durch Vertauschung von α mit $\alpha+\frac{1}{2}$ erhält man aus der letzten Gleichung

$$(83)\quad b_{2\alpha+1}\,\Pi(2\alpha+1)=\sum_{\beta}\frac{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi(\beta-\alpha-\frac{1}{2})}\,a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})^{\beta}(-1)^{\beta},$$

eine Grösse, von der man sich überzeugt, dass sie, wie früher, die durch die Identität

$$R_0=-R\,(\text{ungerade})=\sum_{\alpha}H^{2\alpha+1}\cot g\,\vartheta_0^{2\alpha+1}$$

$$=\sum_{\alpha}4^{\alpha}\,b_{2\alpha+1}\cot g\,\psi^{2\alpha+1}$$

definirte Bedeutung hat. Zwischen den Zenithconstanten und den geraden Horizontconstanten bestehen die zu (60) analogen Beziehungen

$$(84)\qquad \pi\,4^{-\alpha}(-1)^{\alpha}\,b_{-2\alpha-1}=\sum_{\gamma}\frac{4^{\gamma}(-1)^{\gamma}\,b_{2\gamma}}{\alpha+\gamma+\frac{1}{2}}\,.$$

Während bei der Tangentenrefraction die Grösse R_1 in Bezug auf $\cot g\,\vartheta_1$ oder $\operatorname{cosec}\psi$ ungerade war, ist sie hier auch in Bezug auf diese Variable gerade. Wir wollen setzen

$$(85)\quad \sum_{\beta}a_{2\beta}(-\tfrac{1}{2})^{\beta}P_{2\beta}(i\cot g\,\psi)=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(\alpha)^2}c_{2\alpha}\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha}\operatorname{cosec}\psi^{2\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(\alpha)^2}\,c_{2\alpha}\cot g\,\vartheta_1^{2\alpha}\,,$$

woraus mit Hülfe von (73) und (74) die Relationen

$$(86)\quad \begin{cases} c_{2\alpha}\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha}=\sum_{\beta}\dfrac{\Pi(-2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\beta-\frac{1}{2})}\,a_{2\beta}\,, \\ a_{2\beta}=\sum_{\alpha}\dfrac{\Pi(2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}\,\dfrac{4\beta+1}{2}\,c_{2\alpha}\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha} \end{cases}$$

folgen. Die $c_{2\alpha}$ treten nach (77) auch in Q als Entwicklungscoefficienten auf; es ist nämlich

$$Q\,\xi\sin\varphi=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(2\alpha)\,\Pi(-\frac{1}{2})}\,4^{\alpha}\,c_{2\alpha}\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha}\,\xi^{2\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(2\alpha)\,\Pi(-\frac{1}{2})}\,4^{\alpha}\,c_{2\alpha}\operatorname{tg}\chi^{2\alpha}\,.$$

Die $c_{2\alpha}\operatorname{tg}\varphi^{2\alpha}$ stimmen bis auf Factoren mit den (62) eingeführten $l'_{2\alpha}$ überein, die damals (im Falle einer endlichen Ent-

wicklung nach τ) bedeutungslos waren, während hier die $l_{2\alpha+1}$ ihre Bedeutung eingebüsst haben. Durch Ausführung der Zwischenrechnung würde man zwischen den $a_{2\beta+1}$ und den $a_{2\gamma}$ die Relationen

$$(87)\quad a_{2\beta+1}(-1)^{\beta} = \sum_{\gamma}(-\tfrac{1}{2})_{\gamma}\, a_{2\gamma}\, \frac{\Pi(\beta+\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma-\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta-\gamma)\,\Pi(\beta+\gamma+\tfrac{1}{2})}$$

erhalten.

Vertauscht man in $(86)_1$ α mit $-\alpha-\frac{1}{2}$, so findet man mit Hülfe von (75), dass bis auf Zahlenfactoren die $c_{-2\alpha-1}$ $\operatorname{cotg}\varphi^{2\alpha+1}$ mit den Coefficienten der Entwicklung von R nach ungeraden Potenzen von $\sin\psi$, also die $c_{-2\alpha-1}$ mit den Coefficienten der Reihe

$$R = C\operatorname{tg}\vartheta_1 - C'\operatorname{tg}\vartheta_1^3 + C''\operatorname{tg}\vartheta_1^5 - \cdots$$

identisch sind.

Aus der partiellen Differentialgleichung lässt sich ein wichtiger Schluss ziehen. Nehmen wir von vornherein $\cos\varphi = \frac{\nu_0}{\nu_1}$, so lässt sich dieselbe in der Form

$$\frac{\partial R}{\partial \log\sin\psi} + \frac{\partial R}{\partial t} - \sin\varphi\operatorname{tg}\psi f_0 = 0\,,$$

$$f = -\frac{d\log\mu}{d\log\nu}\,,\quad t = \log\operatorname{tg}\varphi$$

schreiben. Substituiren wir hierin (80) und setzen den Factor von ψ gleich 0, so folgt

$$\frac{\partial S}{\partial \log\sin\psi} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

d. h. S darf die Variablen φ und ψ nur in der Verbindung $\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cosec}\psi$ enthalten. Die Coefficienten $c_{2\alpha}$ der Entwicklung (85) sind also absolute Constanten, d. h. vom Beobachtungsort unabhängig; da ϑ_1 der Einfallswinkel an der Grenze der Atmosphäre ist, so ist S überhaupt längs des betrachteten Lichtstrahls constant, wie im Falle der Tangentenrefraction. Auch die Bedeutung von S ist dieselbe, wie damals; denn da die Refraction des Strahles in beliebiger Höhe nach dem Gesagten die Form

$$R = \Psi S + \text{ungerade Function von } \operatorname{cotg}\Psi\,,$$

$$\sin\Psi = \sin\psi\cos W$$

besitzt, so wird die Horizontalrefraction dieses Strahles $\left(\Psi = \frac{\pi}{2}\right)$

$$(H) = R_1 = \frac{\pi}{2} S .$$

Daran lässt sich noch eine Folgerung knüpfen; wenden wir nämlich auf unsere Refraction das am Ende des vorigen Paragraphen besprochene Verfahren an, indem wir von der Höhe φ', die zu der Refraction R' mit der Constitution der Atmosphäre Q gehört, auf die Höhe φ heruntergehen, also R' um die Refraction zwischen φ und φ' vermindern, so folgt

$$R = (\psi' - \Psi') S' + \text{unger. Funct. von } \operatorname{cotg} \psi' . \\ - \text{unger. Funct. von } \operatorname{cotg} \Psi' .$$

War insbesondere $\varphi' = \frac{\pi}{2}$, so wurde $\psi' = \vartheta_0$, $\Psi' = \vartheta_1$, also

$$R = (\vartheta_0 - \vartheta_1) \sum_\beta a_{1\beta} (-\tfrac{1}{2})^\beta P_{1\beta}(i \operatorname{cotg} \vartheta_0) + \text{unger. Funct. v. } \operatorname{cotg} \vartheta_0 \\ - \text{unger. Funct. v. } \operatorname{cotg} \vartheta_1 ,$$

und die zugehörige Constitution der Atmosphäre $\left(\xi^2 = 1 - u = \frac{\nu_0^2}{\nu^2}\right)$

$$Q \sin \varphi \frac{\nu_0}{\nu} = f \sin \varphi = \sum_\beta a_{1\beta} P_{1\beta}\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right) ;$$

auf diese Weise haben wir eine neue Darstellung des bisher nicht behandelten Falles

$$f = \sum_n \alpha_{1n} \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^{1n} , \quad R = \sum_n \alpha_{1n} R_{1n}$$

gewonnen.

Es bedarf keiner Auseinandersetzung, wie man zu der Refraction (78) die zugeordnete Secantenrefraction oder die Invariante zu bilden hat. Ebenso versteht es sich von selbst, dass Ausdrücke von R, die sich nach geraden Kugelfunctionen zweiter Art entwickeln lassen, in ähnlichem Sinne in den bisherigen Betrachtungen inbegriffen sind, wie wir berechtigt waren, ein in einfacher Weise von τ abhängiges R dem Typus

$$R = \sum_\beta a_{1\beta+1} \tau^{1\beta+1}$$

unterzuordnen. Beispiele solcher Refractionen wären etwa

$$\sum_{\beta}{}' (-1)^{\beta} \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}^{2\beta} i Q_{2\beta}(i \operatorname{cotg}\psi) = \tfrac{1}{2}\sin\psi\left(\frac{\psi_1}{\sin\psi_1} + \frac{\psi_2}{\sin\psi_2}\right),$$

$$\cos\psi_1 \cos\frac{\lambda}{2} = \cos\left(\psi + \frac{\lambda}{2}\right), \quad \cos\psi_2 \cos\frac{\lambda}{2} = \cos\left(\psi - \frac{\lambda}{2}\right),$$

oder

$$\sum_{\beta}(4\beta+1)(-\tfrac{1}{2})^{\beta} Q_{2\beta}(i\operatorname{cotg}\psi) Q_{2\beta}(i\operatorname{cotg}\varphi'') = \sin\varphi''\cdot\sin\psi'\cdot\psi'',$$

$$\operatorname{tg}\psi = \sin\varphi''\operatorname{tg}\psi', \quad \operatorname{tg}\psi'' = \operatorname{tg}\varphi''\sec\psi',$$

und ähnliche, die aus (66) leicht erhalten werden können; die letzte der beiden hingeschriebenen ist die Invariante des ersten Gliedes ψ der ursprünglichen Formel.

14.

Von den zu unseren Anschlussversuchen benutzten Refractionstafeln beruhen nur die Bessel'schen auf directen Beobachtungen in der Nähe des Horizontes, mussten aber unausgeglichener Fehlerreste wegen vorläufig bei Seite gelassen werden. (*G*) und (*R*) sind theoretischen Ursprungs, d. h. mit einer zu Grunde gelegten Hypothese über die Temperaturabnahme berechnet, die nachträglich erst den Beobachtungen angepasst wurde. (*OB*) endlich ist selbst eine Interpolationsformel. Bei der Temperaturberechnung aus unseren Anschlüssen kann es sich also nicht um eine wirkliche Bestimmung handeln, sondern nur um ein Urtheil darüber, ob unsere Methode eintretenden Falles, d. h. wenn wirkliche Refractionsbestimmungen in der Nähe des Horizontes vorlägen, anwendbar sein würde. Hierzu genügt *eine* Refractionstafel mit verschiedenen Anschlussformeln; ich habe als erstere (*G*), als letztere die drei Refractionen (*PG*), $(\Phi G)_2$ und (*TG*) gewählt, die der Uebersicht halber hier noch einmal zusammengestellt sein mögen.

$$(PG) = H\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\left(1 + \frac{n''}{n}u\right) : (1 + n'u + n''u^2),$$

$$u = \operatorname{cotg}\psi\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sin\varphi\operatorname{tg}\vartheta_0;$$

$$\operatorname{Log} H = 3{,}311860, \quad \operatorname{Log} n' = 0{,}716490,$$

$$\operatorname{Log}\sin\varphi = 9{,}021033, \quad \operatorname{Log} n'' = 0{,}846991,$$

$$\operatorname{Log} n'' : n = 0{,}274418.$$

$$(\Phi G)_3 = l\Phi + (m-l)x(1-2x\Phi) + Cx[(1+x^2)(1-2x\Phi) - x\Phi],$$

$$\Phi = \Phi(x), \quad x = b \operatorname{cotg} \vartheta_0;$$

$$\operatorname{Log} l = 3{,}364315, \quad \operatorname{Log} b = 1{,}418200,$$

$$\operatorname{Log}(m-l) = 2{,}847004, \quad \operatorname{Log} C = 2{,}102525\, n.$$

$$(TG) = a_1\tau + a_3\tau^3 + a_5\tau^5 + a_7\tau^7,$$

$$\tau = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sin\varphi \operatorname{tg}\vartheta_0;$$

$$\operatorname{Log} a_1 = 3{,}082223, \quad \operatorname{Log} a_5 = 2{,}281313,$$

$$\operatorname{Log} a_3 = 2{,}776803, \quad \operatorname{Log} a_7 = 1{,}722667,$$

$$\operatorname{Log}\sin\varphi = 8{,}979127.$$

Der Zusammenhang zwischen der Temperaturabnahme $\Theta_0 - \Theta$ und der Höhe $r - r_0$ wird nach unserem Verfahren nicht explicite, sondern mit Hilfe des unabhängigen Parameters ν dargestellt. Um die verschiedenen Temperaturcurven unmittelbar mit einander zu vergleichen, müsste streng genommen durch Interpolation auf äquidistante Werthe von $r - r_0$ reducirt werden. Diese Reduction aber kann man sich hier, wo es nur auf einen ungefähren Ueberblick ankommt, ersparen, da, wie die Rechnung lehrt, die zu gleichen Werthen von ν gehörigen Werthe der Höhe für die verschiedenen Hypothesen nur um wenige Meter differiren; eine graphische Aufzeichnung der Temperaturcurven würde die Vergleichung noch mehr erleichtern. Die Rechnung wurde daher für alle drei Hypothesen mit den 15 äquidistanten Werthen

$$0{,}0001, \quad 0{,}0002, \quad 0{,}0003, \quad \ldots \quad 0{,}0015$$

der Variablen

$$y = 1 - \frac{\nu_0}{\nu}$$

geführt, die eine Höhe bis zu 10 km umspannen; dies entspricht in der That der Annahme gleicher ν, da μ_0 und folglich $\nu_0 = r_0\mu_0$ in allen drei Fällen denselben Werth besitzt. Dass der Werth von μ_0 für die drei Hypothesen übereinstimmt,

$$\operatorname{Log}\log\mu_0 = 6{,}446394,$$

war zu erwarten, da $\log\mu_0$ gleich der Summe der Zenithconstanten ist, für deren erste Z bei den Anschlüssen der Tafelwerth festgehalten wurde.

Zu dem Dualismus zwischen Tangentenrefraction und Secantenrefraction bildet eine Ergänzung die Correspondenz der Ausdrücke für $\log \mu$ und die Zenithconstante (Z) in beliebiger Höhe, die aus folgender Zusammenstellung

$$\left.\begin{aligned} \log \mu &= \sum_{\beta} A_{2\beta+1} (-1)^{\beta} \operatorname{tg} \frac{\chi^{2\beta+1}}{2} \\ (Z) &= \tfrac{1}{2} A_1 \sin \chi \end{aligned}\right\} \text{Tangentenrefraction}$$

$$\left.\begin{aligned} \log \mu &= \tfrac{1}{2} F_1 \operatorname{tg} \chi \\ (Z) &= \sum_{\beta} F_{2\beta+1} \operatorname{tg} \frac{\chi^{2\beta+1}}{2} \end{aligned}\right\} \text{Secantenrefraction}$$

ersichtlich ist; die Bezeichnung ist die der Formeln (38) und (49). Da das Integral J', welches nebst $\log \mu$ bei der Temperaturberechnung gebraucht wird (p. 555), durch die einfache Relation

$$J' = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\nu_0}{\nu} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\nu_0}{\nu} (Z) - Z$$

mit (Z) zusammenhängt, so erhält die Herleitung der Temperatur, durch die wir auf J' geführt werden, hier eine gewisse Plausibilität; d. h. die Formel

$$D : \frac{\mu - 1}{\mu} = \text{constans}$$

für den Zusammenhang zwischen Dichtigkeit und Brechungsexponenten scheint der Refractionstheorie natürlicher zu sein als die theoretisch und experimentell gleichberechtigten

$$D : (\mu^2 - 1) = \text{const.}, \quad D : (\mu - 1) = \text{const.}, \quad D : \log \mu = \text{const.},$$

zum mindesten, so lange man berechtigt ist, bei der Relation $gr^2 =$ constans zwischen Schwere und Radius stehen zu bleiben.

Für das Integral J hatten wir die Formel

$$\frac{h}{r_0} (\mu_0 - 1) J = \mu_0 - \mu + J' + y(\mu - 1) .$$

Zur numerischen Rechnung müssen die beiden ersten Terme, oder der Ausdruck

$$J'' = \log \mu_0 - \log \mu + J'$$

zusammengezogen werden. Man erhält

I. für (PG):

$$J'' = g\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right)^2 \frac{\nu+\nu_0}{W}$$

$$\cdot \frac{\nu\cos(w+\gamma)+(\nu+\nu_0)W\cos(2w+\gamma)+\nu_0 W^2\cos(3w+\gamma)}{(\nu^2+2\nu\nu_0 W\cos w+\nu_0^2 W^2)(1+2W\cos w+W^2)},$$

$$f_0 = g\cos\gamma\,,\quad f_0' = g\sin\gamma\,,\quad \left(g>0\,,\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right).$$

Die Bedeutung der Buchstaben wie p. 558.

II. für $(\Phi G)_3$: Hier empfiehlt es sich, die mit C multiplicirten Glieder besonders zu nehmen und zu setzen

$$e^w \int_1^\mu 2by\frac{d\mu}{\mu} = L - CL'\,,$$

woraus

$$\log\mu_0 - Z - J'' = \frac{e^{-w}}{2b}(L-CL') = \log\mu - J' - Z\,,$$

$$\log\mu = \frac{e^{-w}}{2b}[m+2(m-l)w+Cw-2Cw^2+L-CL']$$

folgen würde. Führen wir dann neben den bisherigen Bezeichnungen

$$v = b-x\,,\qquad w = b^2-x^2$$

noch die folgenden

$$v = by = xz\,,\qquad w = b^2u = x^2 s$$

ein, setzen ferner

$$\varrho(x) = \frac{3}{2}+\frac{3\cdot5}{4x^2}+\frac{3\cdot5\cdot7}{8x^4}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{16x^6}+\cdots,$$

$$\sigma(x) = 1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3\cdot5}{4x^2}+3\cdot\frac{3\cdot5\cdot7}{8x^4}+4\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{16x^6}+\cdots,$$

$$A_0 = l+2b^2(m-l)\,,$$

so ergiebt sich schliesslich

$$L = \frac{lb}{2x^3}+mz+(m-l)z(2w+s+z+2)+\frac{bA_0}{2x^5}\varrho(x)\,,$$

$$L' = zw(2w+s+z+1)+s\frac{b^3}{x^3}\varrho(x)+\frac{b^3}{x^5}\sigma(x)\,.$$

ϱ und σ ändern sich im betrachteten Intervall nur unbedeutend.

III. für (TG):

$$J'' = \sum_{\beta} \frac{\beta+1}{\beta+2} C_\beta y^{\beta+2},$$

wenn

$$\log \mu_0 - \log \mu = \sum_{\beta} C_\beta y^{\beta+1}$$

gesetzt wird; die C_β sind p. 565 gegeben. Die rechten Seiten enthalten sieben Glieder, von denen aber die beiden letzten unmerklich werden. Ihrer Einfachheit wegen würde sich besonders die Potenzenformel zu ausgedehnteren Temperaturberechnungen empfehlen.

Als empirische Constanten gehen in die Temperaturen hier streng genommen nur r_0 und Θ_0 ein; für r_0 wurde das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien des Bessel'schen Erdellipsoids für Pulkowa genommen,

$$\text{Log } r_0 = 6{,}805359 \quad \text{(in Metern)}.$$

Für Θ_0 wurde, da die Gyldén'sche mittlere Refraction sich auf $+ 9°{,}3$ C. Lufttemperatur bezieht, der Werth

$$\Theta_0 = 272{,}85 + 9{,}3 = 282{,}15$$

angesetzt. Die Constante $\frac{h}{r_0}$, die in J als Factor auftritt, ist im Grunde von den Refractionsconstanten abhängig, da die Bedingung $J(\nu_1) = 1$ liefern würde

$$\frac{h}{r_0}(\mu_0 - 1) = \mu_0 - 1 - Z.$$

Dieser theoretische Werth von $\frac{h}{r_0}$ zeigt aber für die drei Hypothesen bedeutende Abweichungen, was zu erwarten war; denn die rechte Seite wird von der Ordnung der zweiten Zenithconstante Z', die, wenn sie nicht einen von vornherein vorgeschriebenen Werth besitzt, in verschiedenen Anschlussformeln sehr verschieden ausfällt. Man findet

	(PG)	$(\Phi G)_3$	(TG)
Log h	3,916733	3,920031	3,915482,

während der von Herrn Bruns angegebene physikalische Werth ist

$$\text{Log } h = 3{,}917260.$$

Der Bedeutung von h zufolge wird man so grosse Unsicherheiten wie diese nicht zulassen dürfen. Hierzu kommt, dass die mit den theoretischen Werthen gerechneten Temperaturen eine bedeutend schlechtere Uebereinstimmung zeigen, als wenn man für alle drei Hypothesen denselben physikalischen Werth zu Grunde legt. Im letzteren Falle ist die Bedingung $J_1 = 1$ vernachlässigt, und wenn man auch auf dieselbe kein besonderes Gewicht zu legen hat, so wird man immerhin die so erhaltenen Temperaturen nicht als das strenge Resultat der vorliegenden Refractionswerthe ansehen dürfen. Daraus ergiebt sich für strenge Anschlussversuche die Nothwendigkeit, die Constante $\frac{h}{r_0}$ innerhalb ihrer Genauigkeitsgrenzen von vornherein als Parameter in die Refractionsformel einzuführen. Während also, was lediglich die Darstellung der Refractionswerthe anbelangt, eine Reihe von Coincidenzstellen in der Nähe des Horizontes genügen, wird man um der späteren Temperaturberechnung willen auch für $\log \mu_0$ und $\frac{h}{r_0}$, oder für Z und Z' vorgeschriebene Werthe ansetzen; nur unter dieser Voraussetzung wird der theoretische Werth von h keine besondere Unsicherheit in den Temperaturverlauf bringen, sondern dieselbe wird von dem Gang der Widersprüche zwischen Tafel und Formel im Horizont abhängig sein.

Zu den nun folgenden Täfelchen, die mit dem Argument $y = 1 - \frac{\nu_0}{\nu}$ die Höhe $r - r_0$ und die Temperaturabnahme $\Theta_0 - \Theta$ für den theoretischen wie für den physikalischen Werth von h geben, ist hiernach nichts weiter zu bemerken. Die Uebereinstimmung der Temperaturcurven genügt, wenn für h der physikalische Werth genommen wird, vollständig, zumal da für grössere Höhen die Meteorologie über kein anderes Mittel verfügt; die etwas grössere Abweichung, die $(\Phi G)_3$ zu erkennen giebt, beruht auf der unendlichen Höhe, die die unvollständige KRAMP-sche Function voraussetzt, während zu (PG) und (TG) eine Atmosphäre von resp. 37 und 34 km Höhe gehört. Dass keine systematische Unsicherheit auftritt, zeigt die mehrfache Durchschlingung der Curven.

(PG).

$y \cdot 10^4$	$r - r_0$	$\Theta_0 - \Theta$	
		h theor.	h phys.
1	774,7 m	4°33	4°29
2	1540,2	8,49	8,42
3	2296,9	12,52	12,41
4	3045,5	16,44	16,29
5	3786,2	20,27	20,08
6	4519,7	24,04	23,80
7	5246,5	27,76	27,47
8	5966,9	31,46	31,11
9	6681,4	35,14	34,73
10	7390,5	38,83	38,35
11	8094,6	42,52	41,97
12	8794,0	46,24	45,61
13	9489,1	50,00	49,29
14	10180,2	53,80	52,99
15	10867,6	57,66	56,74

$(\Phi G)_3$.

$y \cdot 10^4$	$r - r_0$	$\Theta_0 - \Theta$	
		h theor.	h phys.
1	774,6 m	4°13	4°31
2	1539,6	8,15	8,52
3	2295,8	12,06	12,62
4	3043,9	15,83	16,61
5	3784,5	19,47	20,48
6	4518,1	22,97	24,24
7	5245,3	26,34	27,88
8	5966,4	29,57	31,40
9	6681,9	32,66	34,82
10	7392,1	35,61	38,12
11	8097,3	38,43	41,33
12	8797,8	41,13	44,44
13	9494,0	43,69	47,47
14	10186,2	46,14	50,42
15	10874,5	48,47	53,30

(*TG*).

$y \cdot 10^4$	$r - r_0$	$\Theta_0 - \Theta$	
		h theor.	h phys.
1	774,7 m	4°41	4°29
2	1540,2	8,65	8,42
3	2297,0	12,76	12,40
4	3045,7	16,75	16,24
5	3786,7	20,64	19,98
6	4520,4	24,46	23,64
7	5247,4	28,22	27,23
8	5967,9	31,97	30,79
9	6682,6	35,72	34,33
10	7391,6	39,51	37,90
11	8095,5	43,37	41,51
12	8794,6	47,31	45,19
13	9489,2	51,39	48,97
14	10179,7	55,60	52,88
15	10866,4	60,02	56,95

Das Ergebniss unserer Versuche berechtigt somit zu der Behauptung, dass die von Herrn BRUNS angegebene umgekehrte Behandlung des Refractionsproblems den an sie zu stellenden Ansprüchen genügt; aus der interpolatorischen Darstellung beobachteter Refractionswerthe folgt, wenn die erwähnten Vorsichtsmaassregeln (guter Anschluss im Horizont, sowie in den Werthen von $\log \mu_0$ und h) nicht ausser Acht gelassen werden, die mittlere Temperaturabnahme in freier Luft genauer und bequemer als durch die bisherigen meteorologischen Hülfsmittel. Zu einer wirklichen Anwendung des Verfahrens fehlt, nachdem seine Anwendbarkeit an reinen Rechnungsbeispielen gezeigt ist, nur noch das Material, dessen Beschaffung hoffentlich in nicht zu ferner Zeit von einer der günstiger gelegenen Sternwarten in ihren Arbeitsplan aufgenommen wird.

SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1893.

P. Stäckel in Halle a. S., *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses.* Vorgelegt von Herrn LIE.

Nachdem GAUSS gezeigt hatte, dass das Krümmungsmaass einer Fläche bei ihren Biegungen unverändert bleibt, untersuchte MINDING [1]), unter welchen Bedingungen zwei gegebene Flächen durch Biegung in einander übergeführt werden können, und erkannte, dass nur für die Flächen von constantem Krümmungsmaass der GAUSS'sche Satz umgekehrt werden darf [2]). Sind vielmehr zwei Flächen F und Φ von veränderlichem Krümmungsmaass gegeben und gelingt es einem Punkte P der ersten mit dem Krümmungsmaasse k einen Punkt Π der zweiten zuzuordnen, dessen Krümmungsmaass ebenfalls k ist, so kann man, sobald nur das Krümmungsmaass in der Nähe von P und Π stetig ist, auch die Punkte einer gewissen Umgebung von P so auf

---

1) CRELLE's Journal, Bd. 19, S. 370. 1838.

2) Es dürfte von Interesse sein, folgende Stelle aus RIEMANN's Abhandlung »Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« anzuführen: »In die Auffassung der Flächen mischt sich neben den inneren Maassverhältnissen, bei denen nur die Länge der Wege in ihnen in Betracht kommt, immer auch ihre Lage zu ausser ihnen gelegenen Punkten. Man kann aber von den äusseren Verhältnissen abstrahiren, indem man solche Veränderungen mit ihnen vornimmt, bei denen die Länge der Linien in ihnen unverändert bleibt, d. h. sie sich beliebig — ohne Dehnung — gebogen denkt, und alle so aus einander entstehenden Flächen als gleichartig betrachtet. .... *Nach den vorigen Untersuchungen werden in jedem Punkte die inneren Maassverhältnisse einer zweifach ausgedehnten Grösse, wenn sich das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausdrücken lässt, wie dies bei den Flächen der Fall ist, charakterisirt durch das Krümmungsmaass.*«

Punkte der Umgebung von II beziehen, dass für entsprechende Punkte beider Flächen das Krümmungsmaass dasselbe ist. Eine solche Abbildung wird sogar auf unendlich viele Arten möglich sein. Herr Professor A. WANGERIN machte mich nun darauf aufmerksam, dass für specielle nicht auf einander abwickelbare Flächen eine Abbildung dieser Art noch nicht untersucht worden ist, während es doch wünschenswerth wäre, an einem einfachen Beispiele darzuthun, dass bei veränderlichem Krümmungsmaass der GAUSS'sche Satz nicht umgekehrt werden darf. Nun gelingt es zwar leicht Flächen zu finden, die in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaass besitzen, jedoch der Beweis, dass diese Flächen durch Biegung nicht in einander übergeführt werden können, macht erhebliche Schwierigkeiten. Diese lassen sich aber bei dem Beispiele, welches hier mitgetheilt werden soll, durch ein Verfahren überwinden, welches auch an sich von Interesse sein dürfte.

Werden bei einer *Rotationsfläche* als GAUSS'sche Coordinaten die Bogenlänge s der Meridiancurve und der Winkel φ zwischen der veränderlichen und einer festen Meridianebene gewählt, so ist das Quadrat des Linienelementes der Fläche:

$$dS^2 = ds^2 + r^2(s)\,d\varphi^2,$$

während bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes (s, φ) durch:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}\,ds$$

gegeben werden. Als Ausdruck für das Krümmungsmaass in diesem Punkte findet man:

$$k = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds^2}.$$

Dieser Rotationsfläche soll eine zweite Rotationsfläche zugeordnet werden, deren Punkte ebenfalls durch die Bogenlänge s der Meridiancurve und den Winkel φ der Meridianebene bestimmt seien. Zwei Punkte dieser Flächen sollen entsprechend heissen, wenn zu ihnen dasselbe Werthsystem (s, φ) gehört. Ist das Quadrat des Linienelementes der zweiten Fläche:

$$d\Sigma^2 = ds^2 + \varrho^2(s)\,d\varphi^2,$$

so wird das Krümmungsmaass im Punkte (s, φ) gleich k sein, wenn

$$r\frac{d^2\varrho}{ds^2} - \varrho\frac{d^2r}{ds^2} = 0$$

ist. Hieraus folgt durch Integration:

$$r\frac{d\varrho}{ds} - \varrho\frac{dr}{ds} = b$$

und nach Division mit r^2 durch abermalige Integration:

$$\varrho = r\left(a + b\int\frac{ds}{r^2}\right),$$

wo a und b willkürliche Constanten bedeuten. Mithin besitzen die ∞^2 Rotationsflächen:

$$(F)\qquad \begin{cases} x = r\left(a + b\int\frac{ds}{r^2}\right)\cdot\cos\varphi, \\ y = r\left(a + b\int\frac{ds}{r^2}\right)\cdot\sin\varphi, \\ z = \int\sqrt{1 - \left[\frac{dr}{ds}\left(a + b\int\frac{ds}{r^2}\right) + \frac{b}{r}\right]^2}\,ds \end{cases}$$

in den entsprechenden Punkten (s, φ) dasselbe Krümmungsmaass:

$$k = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds^2},$$

und es ist jetzt zu untersuchen, welche dieser Flächen durch Biegung in einander übergehen.

Ist das Krümmungsmaass k constant, so gehen die Flächen (F) durch Biegung in einander über, und man erhält die bekannten Schaaren der Rotationsflächen von negativem bez. positivem Krümmungsmaass. Dieser Fall soll daher ausgeschlossen und allgemein untersucht werden, wann zwei Rotationsflächen von variablem Krümmungsmaass auf einander abwickelbar sind. Die zu diesen Flächen gehörigen Grössen mögen durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden. Es sei

$$dS_1^2 = ds_1^2 + r_1^2(s_1)\,d\varphi_1^2,$$
$$dS_2^2 = ds_2^2 + r_2^2(s_2)\,d\varphi_2^2.$$

Sind die beiden Flächen auf einander abwickelbar, so muss es möglich sein, eine Substitution

$$s_2 = s_2(s_1, \varphi_1), \qquad \varphi_2 = \varphi_2(s_1, \varphi_1)$$

zu finden, welche dS_2^2 genau in dS_1^2 überführt. Die Bedingungen hierfür erhält man wohl am einfachsten durch folgende Ueberlegung.

Da bei jeder Biegung das Krümmungsmaass erhalten bleibt, so gehen dabei Linien constanten Krümmungsmaasses in eben solche Linien über. Bei Rotationsflächen sind nun die Parallelkreise Linien constanten Krümmungsmaasses. Folglich geht bei der Biegung einer Rotationsfläche in eine Rotationsfläche jeder Theil eines Parallelkreises wieder in einen Theil eines Parallelkreises über. Ferner gehen bei jeder Biegung orthogonale Trajectorien einer Curvenschaar in orthogonale Trajectorien der entsprechenden Curvenschaar über. Mithin entsteht bei der Biegung einer Rotationsfläche in eine Rotationsfläche aus jedem Meridian wieder ein Meridian. Da nun jede Rotationsfläche bei einer Drehung um die Rotationsaxe in sich übergeht, so darf man annehmen, dass der Meridian $\varphi_1 = 0$ bei der Biegung in den Meridian $\varphi_2 = 0$ übergeht, und man darf ferner als Anfangspunkt der Zählung von s_2 den Punkt wählen, welcher dem Punkte $\varphi_1 = 0$, $s_1 = 0$ auf der ersten Fläche entspricht; auch die Richtung der Zählung von s_2 kann man so wählen, dass positivem s_1 positives s_2 entspricht. Beachtet man jetzt, dass die Biegung alle Bogenlängen unverändert lässt, so erkennt man, dass bei diesen Festsetzungen im Falle der Biegung

$$s_2 = s_1 \tag{1}$$

sein muss. Also ist $ds_2^2 = ds_1^2$. Verbindet man dies mit $dS_2^2 = dS_1^2$, so folgt

$$r_1^2 d\varphi_1^2 = r_2^2 d\varphi_2^2$$

oder, da r_1 und r_2 als positiv angenommen, und φ_1 und φ_2 in derselben Richtung gezählt werden dürfen:

$$r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2.$$

Diese Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung; sie besagt, dass die Bogen entsprechender Parallelkreise zwischen entsprechenden Meridianen gleich sein müssen. Man hat jetzt:

$$d\varphi_2 = \frac{r_2(s_1)}{r_1(s_1)} d\varphi_1.$$

Es ist aber:

$$d\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 ,$$

demnach:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} = 0 , \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{r_2(s_1)}{r_1(s_1)} ,$$

mithin ist φ_2 eine Function von φ_1 allein und weiter

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = 0 ,$$

also φ_2 eine lineare Function von φ_1. Da aber dem Werthe $\varphi_1 = 0$ der Werth $\varphi_2 = 0$ entspricht, so ist

$$\varphi_2 = c\varphi_1 , \tag{2}$$

wo c eine willkürliche (positive) Constante bedeutet.

Hiermit ist bewiesen, dass, wenn es möglich ist dS_2^2 durch eine Substitution

$$s_2 = s_2(s_1, \varphi_1) , \qquad \varphi_2 = \varphi_2(s_1, \varphi_1)$$

in dS_1^2 überzuführen, dies stets bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes und der Richtung der Zählung von s_2 und φ_2 durch:

$$s_2 = s_1 , \qquad \varphi_2 = c\varphi_1$$

bewirkt werden kann. Damit aber diese Substitution dS_2^2 in dS_1^2 verwandelt, muss — dies ist nothwendig und hinreichend — die Gleichung:

$$r_2(s) = \frac{1}{c} r_1(s)$$

identisch in s bestehen. Mithin werden *alle* Biegungsflächen der Rotationsfläche von variablem Krümmungsmaass:

$$x = r_1 \cos\varphi_1 , \; y = r_1 \sin\varphi_1 , \; z = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dr_1}{ds_1}\right)^2} ds_1 ,$$

welche wieder Rotationsflächen sind, dargestellt durch:

$$x = \frac{1}{c} r_1 \cos c\varphi_1 , \; y = \frac{1}{c} r_1 \sin c\varphi_1 , \; z = \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr_1}{ds_1}\right)^2} ds_1 ,$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Schaar von Biegungsflächen ist bereits von MINDING[1]) angegeben, aber es fehlt

1) CRELLE's Journal, Bd. 18. S. 367. 1838.

bei ihm der Nachweis, dass es keine anderen Rotationsflächen giebt, welche in die Fläche für $c = 1$ verbiegbar sind[1]).

O. BONNET hat in seiner Abhandlung: Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, Journal de l'École polytechnique Cah. 42, T. XXV. p. 20 (1867) die Aufgabe behandelt, alle Biegungsflächen einer Rotationsfläche zu finden, bei denen die Krümmungslinien aus den Krümmungslinien der Rotationsfläche, also aus deren Parallelkreisen und Meridianen, hervorgehen. Er findet, wie von vorn herein zu erwarten war, dass diese Biegungsflächen nothwendig wieder Rotationsflächen sind und stellt (S. 25) ihre Gleichungen allgemein auf. Es ist BONNET aber entgangen, dass diese Biegungsflächen wesentlich die bereits von MINDING aufgestellten sind, was sich wohl daraus erklärt, dass die Darstellung dieser Flächen bei ihm eine ganz andere wie bei MINDING ist. Dagegen hat Herr G. DARBOUX in seinen ausgezeichneten Leçons sur la théorie générale des surfaces, T. III. S. 430 (1890) als Consequenz seiner allgemeinen Untersuchungen über die Abwickelbarkeit von Flächen auf einander die Thatsache hervorgehoben, dass die MINDING'sche Schaar uns giebt »toutes les surfaces de révolution qui correspondent à une formé donnée de l'élément linéaire«. Hier kam es aber darauf an, diese Thatsache direct und mit möglichst einfachen Mitteln herzuleiten.

Handelt es sich jetzt um zwei Flächen der Schaar (F), so ist:

$$r_1(s) = r(s)\left(a_1 + b_1\int\frac{ds}{r^2}\right),$$

$$r_2(s) = r(s)\left(a_2 + b_2\int\frac{ds}{r^2}\right).$$

Die beiden Flächen sind daher nur dann auf einander abwickelbar, wenn

$$a_2 + b_2\int\frac{ds}{r^2} = \frac{1}{c}\left(a_1 + b_1\int\frac{ds}{r^2}\right)$$

---

1) Es ist leicht, auf Grund der oben angestellten Ueberlegungen auch die weitere Frage zu beantworten, auf wieviel verschiedene Arten diese Abwickelung möglich ist oder, was auf dasselbe herauskommt, ob die gegebene Rotationsfläche ausser der Drehung um die Axe noch andere Transformationen in sich gestattet.

ist. Hieraus folgt durch Differentiation:

$$\left(b_2 - \frac{b_1}{c}\right)\frac{1}{r^2} = 0\,,$$

mithin muss:

$$b_2 = \frac{b_1}{c}\,, \quad a_2 = \frac{a_1}{c}\,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

sein. *Wählt man also aus der Schaar der ∞^2 Flächen F, die oben definirt wurden, irgend zwei aus, für welche*

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

ist, so sind diese beiden Flächen sicher nicht auf einander abwickelbar, während sie in entsprechenden Punkten (s, φ) dasselbe Krümmungsmaass besitzen.

Wählt man im Besonderen $a_1 = 1$, $b_2 = 0$ und $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, so gilt dies von den Flächen:

$$\text{(I)} \quad x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}\, ds$$

und

$$\text{(II)} \qquad x = r\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{r^2}\cos\varphi\,, \quad y = r\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{r^2}\sin\varphi\,,$$

$$z = \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 - \left[\frac{dr}{ds}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{r^2} + \frac{1}{r}\right]^2}\, ds\,,$$

wo man jetzt die Function $r(s)$ specialisiren könnte, freilich mit der Beschränkung, dass das Krümmungsmaass nicht constant ausfallen darf.

A. Wangerin in Halle a. S., *Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses;* Zusatz zu der vorstehenden Arbeit des Herrn P. STÄCKEL.

Der vorstehenden Untersuchung des Herrn P. STÄCKEL erlaube ich mir noch ein anderes sehr einfaches und, wie ich glaube, instructives Beispiel von zwei Flächen hinzuzufügen, die in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass besitzen, ohne auf einander abwickelbar zu sein. Ich bemerke dazu, dass ich auf dies Beispiel erst geführt bin, nachdem ich von den Resultaten des Herrn STÄCKEL Kenntniss erhalten hatte.

Ich betrachte einerseits die Schraubenfläche

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = f(r) + m\varphi\,, \tag{1}$$

die dadurch entsteht, dass die Curve $z = f(x)$ der xz-Ebene eine Schraubenbewegung um die z-Axe ausführt, andererseits die Rotationsfläche

$$\xi = \varrho\cos\psi\,,\quad \eta = \varrho\sin\psi\,,\quad \zeta = F(\varrho)\,. \tag{2}$$

Das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte der Fläche (1) ist

$$k_1 = \frac{r^3 f'(r) f''(r) - m^2}{[m^2 + r^2 + r^2 f'(r) f'(r)]^2} = -\frac{1}{2r}\,\frac{d\left(\dfrac{1}{1 + f'(r)f'(r) + \dfrac{m^2}{r^2}}\right)}{dr}\,; \tag{3}$$

das Krümmungsmaass in einem Punkte der Fläche (2) dagegen hat den Werth

$$k_2 = -\frac{1}{2\varrho}\,\frac{d\,\dfrac{1}{1 + F'(\varrho)F'(\varrho)}}{d\varrho}\,. \tag{4}$$

Die beiden Flächen ordne ich einander derart zu, dass einem Punkte a von (1) derjenige Punkt α von (2) entspricht, dessen Parameter ϱ, ψ den Parametern r, φ von a bezüglich gleich sind. Dann ist, damit beide Flächen in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass haben, erforderlich, dass

$$\frac{1}{1+f'(r)f'(r)+\frac{m^2}{r^2}} = \frac{1}{1+F'(r)F'(r)} + c \tag{5}$$

ist, wo c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Die Bedingung (5) nehme ich als erfüllt an; die Flächen (1) und (2) haben dann in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass; dass sie trotzdem, falls ihr Krümmungsmaass nicht etwa constant ist, nicht auf einander abwickelbar sind, ergiebt sich aus folgender Ueberlegung. Einem Bogen $\alpha\beta$ eines Parallelkreises von (2) entspricht ein Bogen ab einer auf (1) liegenden Schraubenlinie. Das Verhältniss der Längen beider Bogen ist:

$$\frac{\alpha\beta}{ab} = \frac{r}{\sqrt{r^2+m^2}}, \tag{6}$$

wenn r der Radius des in Rede stehenden Parallelkreises ist. Beide Bogen können daher, da $m > 0$ ist, nie gleich sein. Andererseits müssten, wenn eine Abwickelung beider Flächen auf einander möglich sein sollte, gerade diese Bogen auf einander fallen, da ja bei der Abwickelung Linien mit gleichem Krümmungsmaass auf einander fallen müssen. Daraus folgt, dass die Flächen (1) und (2) nicht auf einander abwickelbar sind, trotzdem sie in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass besitzen.

Was die zwischen den Functionen f und F bestehende Bedingungsgleichung (5) betrifft, so kann man durch geeignete Wahl der darin auftretenden Constante c stets bewirken, dass einer gegebenen Function $f(r)$ ein reeller Werth von $F(r)$ entspricht und umgekehrt. Welche Theile von (1) und (2) einander entsprechen, kann in jedem besonderen Falle leicht ermittelt werden.

Hiernach haben wir folgendes Resultat gewonnen: *Ist eine beliebige Rotationsfläche gegeben, so kann man stets* (und zwar im Allgemeinen auf unendlich viele Arten) *eine Schraubenfläche so*

bestimmen, dass gewisse Theile beider Flächen in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass haben, ohne auf einander abwickelbar zu sein; und umgekehrt kann man zu jeder gegebenen Schraubenfläche Rotationsflächen bestimmen, die der obigen Forderung genügen.

Ein besonders einfaches Beispiel erhält man, wenn man

$$f'(r) = 0\,,\quad c = 0$$

setzt. Fläche (1) ist dann die windschiefe Schraubenfläche, (2) die durch Rotation der logarithmischen Linie

$$\zeta = \pm\, m \log \xi$$

um die ζ-Axe entstehende Rotationsfläche. — Wenn die Rotationsfläche ein Rotationsparaboloid ist, ist die zugehörige Schraubenfläche für $c = 0$ ebenfalls durch elementare Functionen ausdrückbar.

Dass das oben ausgesprochene Resultat sich unmittelbar dahin erweitern lässt, dass an Stelle der Rotationsfläche (2) die Schraubenfläche

$$\xi = \varrho\cos\psi\,,\quad \eta = \varrho\sin\psi\,,\quad \zeta = F(\varrho) + n\cdot\psi$$

tritt, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Halle a. S., 2. Februar 1893.

R. Schumann, *Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte.*

Der älteste Werth für die Polhöhe der jetzigen Leipziger Sternwarte wurde erhalten durch eine geodätische Uebertragung, und zwar lag dabei die Polhöhe der alten Sternwarte auf der Pleissenburg zu Grunde. Sämmtliche in Leipzig ausgeführten und bis zum Jahre 1823 bekannt gewordenen Polhöhenbestimmungen findet man zusammengestellt in: »Möbius' gesammelte Werke, herausgegeben auf Veranlassung der königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften« (Bd. IV, herausgegeben von W. Scheibner, Seite 463 u. f.); nochmals kurz angegeben und bis zum Jahre 1849 fortgesetzt wurde dieses Verzeichniss durch K. Bruhns, in seiner »Geschichte und Beschreibung der Leipziger Sternwarte«, Seite 15 u. f.

Aus den letzten Beobachtungen von Möbius und d'Arrest findet Bruhns als wahrscheinlichsten Werth für die Polhöhe der Pleissenburg:

$$51^\circ\ 20'\ 20''.5$$

und daraus mit Hülfe trigonometrischer Messungen für die Polhöhe der Mitte der grossen Kuppel der neuen Sternwarte »bis auf weitere Bestimmungen«:

$$51^\circ\ 20'\ 9''.8.$$

Die ersten Bestimmungen auf der neuen Sternwarte wurden durch Bruhns selbst vorgenommen und veröffentlicht in der Gratulationsschrift: »Die geographischen Constanten der Universitätssternwarte zu Leipzig« (Seite 7 u. f.).

In dieser Publication erwähnt er zunächst eine Reihe von 16 Beobachtungen des Sternes η Urs. maj. im 1. Vertical am

RAMSDEN'schen Passageninstrument, ausgeführt 1862 April 5 bis August 5. Das Resultat:

$$51^\circ\ 20'\ 6''.6$$

war indessen nicht als ein definitives anzusehen, da die Reduction der Beobachtungen Schwankungen des Instruments im Azimuth erkennen liess, und da ferner eine nachträgliche Untersuchung ergab, dass einer der beiden Instrumentpfeiler geborsten war. Weiter sind an Polhöhenbestimmungen zu erwähnen:

1) 1863 Febr. 12—März 5, 1864 Mai 4—Juni 12, 1865 März 19—22: Messungen der Zenithdistanzen von Nord- und Südsternen in der Nähe des Meridians, am 13zölligen Universalinstrument der Sächsischen Gradmessung; Beobachter und Rechner: BRUHNS;

2) 1864 Juli 3—17: Beobachtungen des Sternes η Urs. maj. im 1. Vertical. Instrument, Beobachter wie bei 1.;

3) während der Jahre 1866 und 1867: Beobachtungen am Meridiankreise; Beobachter und Rechner: ENGELMANN;

4) 1866 Mai 21—Juni 27: Beobachtungen des Sternes η Urs. maj. im 1. Vertical am Passageninstrumente von UTZSCHNEIDER und LIEBHERR; Beobachter: BRUHNS, Rechner: HELMERT;

5) 1867 Febr. 21—Mai 25: Beobachtung von 11 dem Zenith nahen Sternen im 1. Vertical; Instrument wie bei 4.; Beobachter und Rechner: HELMERT;

6) 1867 Juni 21—Sept. 3: Beobachtung des Sternes η Urs. maj. im 1. Vertical am gebrochenen Passageninstrument von PISTOR und MARTINS; Beobachter und Rechner: HELMERT;

7) 1868 Juli 22—October 27: Messung der Zenithdistanzen von Polaris und 9 Südsternen in der Nähe des Meridians am 10zölligen Universalinstrument der Sächsischen Gradmessung; Beobachter: HELMERT, Bearbeiter: ALBRECHT; Beobachtungsort: Pleissenburg, Pfeiler B;

8) 1869 Januar 13—September 30; 1870 Juni 14—Juli 25: Beobachtungen von α Persei, ι und η Urs. maj. im 1. Vertical am Passageninstrument von RAMSDEN; Beobachter und Rechner: LEPPIG.

Nach dieser Bestimmung trat eine längere Pause ein. Offenbar sah K. BRUHNS den erlangten Werth als ausreichend sicher an. Die Einwürfe, die sich indessen gegen die Bestimmungen

bis 1870 erheben liessen, waren die Veranlassung zu der folgenden Reihe:

9) 1885 April 16 — 1886 April 2: Messungen der Zenithdistanzen von Süd- und Nordsternen in der Nähe des Meridians am Wanschaff'schen Universalinstrument; Beobachter und Rechner: Schnauder.

Sämmtliche neun Reihen lagen fertig reducirt vor und zwar waren die erforderlichen Sternörter entnommen worden bei Nr. 7 und 9 dem Fundamentalcatalog der Astronomischen Gesellschaft, bei den übrigen dem betreffenden Berliner Jahrbuch, mit Ausnahme von acht Sternen der 5. Reihe, bei welchen der British Association Catalog, der Armagh- und der Radcliffecatalog benutzt wurden. Bisweilen erhielten diese Oerter wieder Correctionen nach neueren Bestimmungen, so dass in dieser Hinsicht das gesammte Material ungleichmässig behandelt erscheint.

Um nun diese neun Reihen nach Möglichkeit auszunutzen und unter einander vergleichbar zu machen, wurden von mir auf den Vorschlag des jetzigen Directors der Leipziger Sternwarte, des Herrn Prof. Bruns, die Reihen 1—6 und 8, soweit es anging, auf den Fundamental-Catalog reducirt; die Resultate dieser Neureduction sind in den weiterhin folgenden Abschnitten mitgetheilt. Die Reihe Nr. 7, als definitiv bearbeitet und bereits publicirt, ist dabei ganz unverändert geblieben; bei den übrigen wurde, mit Ausnahme von Reihe 9, weitgehende Rücksicht auf die Behandlung genommen, die der betreffende Beobachter (oder auch Berechner) den Beobachtungen hat angedeihen lassen; einerseits war bei den früheren Bearbeitern eine vollständigere Kenntniss aller Nebenumstände vorauszusetzen, andererseits waren bei den älteren Reihen die Originalzahlen nebst den dazugehörigen Bemerkungen theils nicht mehr vorhanden, theils auch nicht mehr mit voller Sicherheit zu interpretiren. Die Verantwortlichkeit für die Richtigkeit der Rechnungen, die nicht vom Verfasser dieser Arbeit herrühren, bleibt daher dem damaligen Rechner überlassen.

Ein wesentlicher Beitrag zur Beurtheilung der 4., 5., 6., 8. Reihe besteht in einer Anzahl von handschriftlich vorliegenden Bemerkungen, die Herr Prof. Helmert im Jahre 1884, zum Theil nach dem Gedächtniss, zusammengestellt hat. Ein Theil davon, ebenso wie die sonstigen schriftlichen oder mündlichen Angaben,

die noch zu erlangen waren, ist im Folgenden mit nur unwesentlichen Aenderungen benutzt worden.

Bei der 1., 2., 3., 7. Reihe kann schon aus dem Grunde von einer erschöpfenden Wiedergabe der Beobachtungen abgesehen werden, da dieselben bereits veröffentlicht sind; desgleichen bei den Reihen 4, 5, 6, 8, weil diese, wie auch die 2., als Beobachtungen im 1. Vertical, in dem zu diesem Zwecke bestimmten Südzimmer der Sternwarte angestellt worden sind, und dieses Südzimmer zu Beobachtungen, die während 3—4 Stunden eine unveränderte Aufstellung des Instrumentes verlangen, schlechterdings ungeeignet ist; so war unter Anderem nach Herrn Prof. Helmert's Erinnerung kein Schutz der Pfeiler gegen die Sonnenstrahlen vorhanden, obgleich die Sonne durch drei Fenster von 4 m Höhe und 1 m Breite von SO., S. und SW. her, ausser im Hochsommer, stundenlang auf die Pfeiler scheinen konnte. Ausserdem besteht in diesem, mit ziemlich flachem Dache versehenen Zimmer eine tägliche Temperaturschwankung, die der äusseren mindestens gleichkommt. Zweifellos ist hierauf mit die Veränderlichkeit des Azimuths der Südzimmerinstrumente, sowohl von Tag zu Tag, als auch während der Beobachtung selbst zurückzuführen. Dazu kommt noch, dass bei den Beobachtungen im 1. Vertical die Zeitangaben von einer minderwerthigen Uhr (Seyffert) abhingen, und dass es ferner damals üblich war, diese Uhr, auch an längeren Beobachtungsabenden, nur einmal vermittelst einer Taschenuhr mit der Normaluhr (Fraunhofer), bisweilen noch mit Tiede 336, zu vergleichen und den Gang und Stand dieser beiden wieder mit Hülfe der von Engelmann aus directen Zeitbestimmungen für jeden Sonnabend interpolirten Uhrcorrectionen zu ermitteln. Die Beobachter selbst hatten Grund zu vermuthen, dass die zur Reduction benutzten durchschnittlichen Gänge nicht ausreichend mit den während der Beobachtungen selbst bestehenden übereingestimmt haben.

Von den noch nicht veröffentlichten Reihen wird, des Interesses wegen, welches sie bietet, nur die Wiedergabe der neunten vollständig erfolgen.

Reihe Nr. 1.

Die erforderlichen Angaben über das Instrument und seine Untersuchung, über Methode und Berechnung der Beobachtungen findet man in der oben genannten Gratulationsschrift von Bruhns.

Die Positionen der benutzten Sterne sind sämmtlich im F. C. enthalten; um die Beobachtungen auf diesen zu reduciren, wurde hier, wie weiterhin immer in ähnlichen Fällen, folgendes Verfahren eingeschlagen: aus dem F. C. wurden mittlere Oerter für die beiden die Beobachtungsepoche einschliessenden Jahresanfänge berechnet und mit den zugehörigen Angaben des betreffenden Cataloges verglichen; aus den sich ergebenden Unterschieden ($= d\delta$) wurden durch geradlinige Interpolation Correctionen für die Beobachtungszeiten selbst hergeleitet.

Die für die vorliegende Reihe nothwendigen Grössen $d\delta$, im Sinne F. C. — Berl. Jahrb. verstanden, sind:

	1863.0	1864.0	1865.0	1866.0
α Urs. min. .	$d\delta = +0''.03$	$+0''.02$	$+0''.02$	$+0''.02$
δ Urs. min. .	$+1.17$	$+1.19$	$+1.21$	$+1.23$
β Urs. min. .	—	$+1.65$	$+1.69$	—
α Bootis . . .	-1.25	-1.25	-1.28	—
α Coronae . .	—	-1.33	-1.36	—
α Tauri . . .	-1.30	-1.32	—	—
β Orionis . .	-0.33	-0.31	—	—
α Orionis . .	$+0.04$	$+0.06$	—	—
α Can. maj. .	-1.67	-1.79	—	—
α Can. min. .	-0.65	-0.68	—	—
β Gemin. .	-0.11	-0.10	—	—
α Serp. . . .	-1.25	-1.26	—	—
α Oph. . . .	-1.53	-1.55	—	—
α Lyrae . . .	-0.73	-0.72	—	—

Die Beobachtungen von α Urs. min. in der (westlichen) Digression erfordern auch die Rectascensionsunterschiede ($= d\alpha$); man erhält in analoger Weise wie bei der Declination:

	1863.0	1864.0	1865.0	1866.0
α Urs. min. .	$d\alpha = +0^s.501$	$+0^s.526$	$+0^s.551$	$+0^s.571$

Wie bei Bruhns, so sind auch hier die Beobachtungen in nur einer Lage des Instrumentes unterdrückt worden; aus den übrigen erhält man (nach Verbesserung mehrerer augenfälliger Druckfehler auf Seite 17, 18 und 21 jener Gratulationsschrift) folgende Werthe für die Polhöhe φ des Standortes:

			α Urs. min. O. C.
1863	Febr.	14	$\varphi = 51^\circ\ 20'\ 5''.48$
		17	5.68
		18	7.07
		22	4.80
1864	Juni	6	4.77
		8	7.47
			$\varphi = 51^\circ\ 20'\ 5''.88$

			α Urs. min. U. C.
1863	Febr.	13	6".51
		22	4.01
1864	Mai	4	6.70
		12	6.36
	Juni	7	8.36
		8	8.04
1865	März	19	6.86
			6".69

			α Urs. min. Digr.
1863	Febr.	12	5".75
1865	März	19	7.27
		21	5.16
		22	4.99
			5".79

			δ Urs. min. U. C.
1863	Febr.	17	6".19
		18	6.46
		20	6.80
		21	6.92
	März	5	6.48
1865	März	21	5.16
		22	6.45
			6".35

			β Urs. min. O. C.
1864	Mai	12	6".10
	Juni	7	7.17
		12	6.10
			6".46

		α Bootis	
1863	Febr. 22	$\varphi = 51^\circ\ 20'$	5.″76
1864	Mai 4		6.51
	12		5.17
			5.″81
		α Coronae	
1864	Mai 4		6.″80
	12		5.77
	Juni 7		3.86
	12		5.64
			5.″52
		α Tauri	
1863	Febr. 20		2.″17
	22		7.02
	März 5		6.09
			5.″09
		β Orionis	
1863	Febr. 22		4.″39
	März 5		4.93
			4.″66
		α Orionis	
1863	Febr. 20		7.″19
	21		5.90
	22		6.11
	März 5		4.77
			5.″99
		α Lyrae	
1863	Febr. 21		7.″62
	März 4		7.12
			7.″37

Nur einmal beobachtet sind folgende Sterne:

1863	Febr. 20	β Gemin.	$\varphi = 51^\circ\ 20'$	5.″19
	21	α Can. maj.		6.98
	21	α Can. min.		7.93
	21	α Serp.		6.53
	21	α Oph.		5.90
				6.″51

Mit diesen Zahlen gestaltet sich nach Bruhns die weitere Rechnung zur Ableitung eines Endresultates wie folgt:

		$\varphi = 51^\circ 20'$	Gew.
Nordsterne:	α Urs. min.	6.″12	17
	δ Urs. min.	6.35	7
	β Urs. min.	6.46	3
Südsterne:	β Gemin.	5.19	1
	α Can. maj.	6.98	1
	α Can. min.	7.93	1
	α Serp.	6.53	1
	α Oph.	5.90	1
	α Tauri	5.09	3
	β Orionis	4.66	2
	α Orionis	5.99	4
	α Bootis	5.81	3
	α Coronae	5.52	4
	α Lyrae	7.37	2
Mittel nach Gewicht aus Nordsternen:		6.″27	27
aus Südsternen:		5.88	23
im Mittel:		6.″09	50

Polhöhe Φ des Centrums der Sternwarte

$$\Phi = +\,51^\circ\,20'\,6.''00.$$

(Nebenbei möge hier bemerkt werden, dass der Kürze wegen, wie eben, so auch fernerhin bedeuten sollen:

φ = die Polhöhe des Standortes,
Φ = die Polhöhe des Centrums der Sternwarte.)

Um den Einfluss der Biegung zu untersuchen, oder um letztere besser zu eliminiren, könnte man die Mittelbildung etwa folgendermassen vornehmen:

Der Unterschied zwischen der grössten und der kleinsten der nach Norden gemessenen Zenithdistanzen beträgt $18^\circ 40'$, das Mittel aller $34^\circ 40'$; nach Süden sind die entsprechenden Grössen $67^\circ 50'$ und $38^\circ 50'$, diese beiden werden aber, wenn man die Beobachtungen der 3 Sterne α Lyrae, α Canis majoris und β Orionis weglässt: $22^\circ 40'$ und $35^\circ 50'$, nähern sich also merklich den entsprechenden, für Nord giltigen Zahlen. Ohnehin ist die Beobachtung dieser 3 Sterne unsicherer wegen ihrer Zenith-, resp. Horizontnähe, wie sich später ergeben wird.

Nimmt man dann die Werthe der Polhöhe aus den beiden Culminationen und der Digression des Polsternes als gleichberechtigt und als für eine mittlere Zenithdistanz gültig an, so erhält man durch einfaches Mittelnehmen:

aus den Südsternen: $\varphi = 51^\circ\ 20'\ 5''.99 \pm 0''.32$,
» » Nordsternen: $\varphi = 51\ 20\ 6.34 \pm 0.14$,

welche beiden Zahlen noch etwas näher zusammen liegen, als die entsprechenden früheren; aus ihnen würde als Polhöhe, in naher Uebereinstimmung mit dem eben gefundenen Werthe hervorgehen:

$$\Phi = 51^\circ\ 20'\ 6''.06.$$

Nach alledem scheint der Einfluss der Biegung nur ein geringer zu sein.

Dass die Reduction auf den F. C. die Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander gebessert hat, erhellt aus Folgendem. Zunächst findet man als mittleren Fehler einer Sternbreite, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen:

nach Bruhns: $\pm 0''.95$,
nach dem F. C.: ± 0.89.

Der Grund für den geringen Unterschied liegt hauptsächlich in den grossen Abweichungen, welche in beiden Fällen die Beobachtungen der 3 Sterne α Lyrae, α Canis majoris und β Orionis verursachen; unterdrückt man dieselben auch hier wieder, so kommt als mittlerer Fehler:

nach Bruhns: $\pm 0''.86$,
nach dem F. C.: ± 0.57.

Eine Untersuchung der Beobachtungen auf periodische Fehler der Kreistheilung ergab zu vernachlässigende Beträge für dieselben.

Reihe Nr. 2.

Wegen näherer Angaben über das Instrument und die Beobachtungen ist wiederum auf die mehrfach erwähnte Gratulationsschrift zu verweisen.

Für die Neureduction kann man sich damit begnügen, die Correction der Declination von η Urs. maj. für die Epoche der Beobachtung zu ermitteln; man findet $d\delta = -0''.21$; dies liefert:

$$\varphi = 51^\circ\ 20'\ 5''.34 \pm 0''.42$$

und nach Anbringung von + 0″.33 als Reduction von dem gemeinsamen Parallel der Südzimmerpfeiler auf den des Centrums der Sternwarte:

$$\Phi = 51^\circ\,20'\,5''.67.$$

Reihe Nr. 3.

Unter seinen: »Beobachtungen am Meridiankreise der Leipziger Sternwarte« führt Engelmann auch eine Polhöhenbestimmung auf (Seite 42 u. f.); über das erlangte Resultat sagt er (Seite 46): »Man darf annehmen, dass das Mittel der hier aufgeführten Werthe von φ, nämlich:

$$\Phi = 51^\circ\,20'\,6''.06,$$

schon der Wahrheit recht nahe kommen und namentlich von Biegung grösstentheils befreit sein werde.«

Die Biegung ist allerdings nur in einer mehr summarischen Weise durch zweckmässige Anordnung der Beobachtungen zu eliminiren gesucht worden, da definitive Biegungscoëfficienten nicht bekannt waren. Da die Zenithdistanzen sich über einen Bogen von etwa 170° vertheilen, so dürften diese Meridiankreisbeobachtungen erneuter Beachtung werth sein; unter den 56 namentlich aufgeführten, zahlreich beobachteten Sternen gehören 53 dem F. C. an, die 3 übrigen ε Bootis, 1879 12-Y-Catalog und 79 Draconis sind bei der Neureduction weggeblieben. Das Resultat selber beruht auf mehr als 2000 Beobachtungen.

Berücksichtigt man, dass Engelmann die Auwers'schen Correctionen für die Sterne des Berliner Jahrbuchs nach Nr. 1550 der Astronomischen Nachrichten bereits angebracht hat, so ergeben sich für die in Rede stehenden 53 Sterne folgende Reductionen auf den F. C. Diese Grössen gelten für 1867.0, welcher Zeitpunkt der Mitte der Beobachtungsepoche entspricht.

α Andromedae	— 0″.40	α Aurigae	— 0″.35
γ Pegasi	— 0.39	β Orionis	— 0.53
α Cassiopejae	+ 0.33	β Tauri	— 0.02
α Ursae minoris	+ 0.05	α Orionis	— 0.64
α Arietis	— 0.80	α Canis majoris	— 1.01
α Ceti	— 0.31	α Geminorum	— 1.11
α Persei	+ 0.35	α Canis minoris	— 0.33
α Tauri	— 0.90	β Geminorum	— 0.20

α Hydrae	— 0″66	α Aquilae	— 0″64
α Leonis	— 0.63	β Aquilae	— 0.44
α Ursae majoris	+ 0.60	α^2 Capricorni	— 0.81
β Leonis	— 0.76	α Cygni	— 0.18
γ Ursae majoris	+ 0.12	α Cephei	+ 0.99
α Virginis	— 0.54	β Cephei	+ 1.25
η Ursae majoris	+ 0.13	α Aquarii	— 1.14
α Bootis	— 0.70	α Piscis australis	— 1.29
α^2 Librae	— 1.02	α Pegasi	— 0.91
β Ursae minoris	+ 1.20	μ Herculis	— 0.35
α Coronae	— 0.67	β Lyrae	+ 0.13
α Serpentis	— 1.15	ξ Aquilae	— 1.41
α Scorpii	— 0.69	32 Vulpeculae	— 0.92
α Herculis	— 0.84	ζ Cygni	— 0.22
α Ophiuchi	— 1.33	ε Ursae minoris	— 0.19
γ Draconis	+ 0.28	λ Ursae minoris	— 0.08
δ Ursae minoris	+ 0.62	11 Cephei	+ 1.20
α Lyrae	— 0.06	ι Cephei	+ 0.30
γ Aquilae	— 0.82		

Durch Anbringung dieser Reductionen ergiebt sich, genau nach Engelmann's Vorgange, folgende Tabelle:

	A. W.	B. O.	A. O.	B. W.
α Andromedae	6″99	4″20	4″26	6″22
γ Pegasi	7.02	3.80	4.10	5.82
α Cassiopae	7.61	5.26	4.37	6.66
α Ursae minoris O. C. .	7.94	5.94	5.54	8.28
» U. C. .	7.22	5.67	4.82	7.65
α Arietis	6.88	3.67	4.17	6.94
α Ceti	6.55	3.20	4.57	6.76
α Persei	6.75	4.22	—	—
α Tauri	6.93	4.62	—	—
α Aurigae	6.93	4.09	—	—
β Orionis	7.26	3.75	—	—
β Tauri	7.13	3.84	—	—
α Orionis	6.93	2.99	—	—
α Canis majoris	6.81	3.28	—	—
α Geminorum	6.56	3.70	—	—
α Canis minoris	6.67	3.01	—	—
β Geminorum	6.96	3.83	—	—
α Hydrae	6.89	3.65	—	—

	A. W.	B. O.	A. O.	B. W.
α Leonis	6″70	3″69	3″34	—
α Ursae majoris O. C. .	7.31	4.69	4.10	—
» U. C. .	8.36	7.30	6.64	9″83
β Leonis	6.97	3.49	—	—
γ Ursae majoris O. C. .	7.24	4.70	4.06	—
» U. C. .	7.04	8.51	7.44	8.52
α Virginis	6.45	2.71	5.00	6.04
η Ursae majoris O. C. .	7.09	4.92	4.82	7.21
» U. C. .	6.33	8.21	6.76	7.50
α Bootis	7.25	3.91	5.09	6.83
α^2 Librae	6.86	3.40	5.26	6.41
β Ursae minoris . . .	7.37	5.42	4.92	7.57
α Coronae	6.81	4.09	5.13	6.95
α Serpentis	7.22	3.52	4.61	6.50
α Scorpii	8.58	4.22	4.87	7.64
α Herculis	7.15	3.46	4.73	7.15
α Ophiuchi	7.17	3.50	4.79	6.33
γ Draconis	7.19	4.64	4.90	8.05
δ Ursae minoris O. C. .	7.90	5.98	4.91	8.53
» U. C. .	7.25	5.24	—	—
α Lyrae	7.62	4.31	4.62	6.96
γ Aquilae	6.55	3.43	4.33	6.69
α »	6.61	2.95	4.36	6.28
β »	6.57	3.30	4.77	6.71
α^2 Capricorni	6.33	3.62	4.73	4.87
α Cygni	6.89	5.11	4.48	6.26
α Cephei	7.59	4.89	4.31	6.24
β »	7.22	4.16	4.76	—
α Aquarii	6.55	3.45	4.60	5.16
α Piscis australis . . .	7.89	—	—	6.11
α Pegasi	6.88	3.25	4.22	6.62

Hierin sind durch die Buchstaben A und B die beiden Kreise, durch O und W die beiden Lagen des Klemmarmes der Axe gekennzeichnet.

Die Uebereinstimmung innerhalb der einzelnen Rubriken ist nach der Reduction auf den F. C. eine wesentlich bessere als vorher, da der mittlere Betrag der Abweichungen vom jedesmaligen Mittel von $\pm$ 0″6 auf $\pm$ 0″4 sinkt.

Aus der Verbindung der directen und reflectirten Beobachtungen folgt nachstehendes Tableau:

	A. W.	B. O.	A. O.	B. W.
α Andromedae . . .	—	—	4″65	—
γ Pegasi	—	—	4.83	—
α Arietis	—	—	3.88	—
α Bootis	5″90	—	5.14	—
α Coronae	6.09	—	4.81	—
α Herculis	5.74	—	—	—
α Ophiuchi	5.53	—	4.78	—
α Lyrae	—	5″16	5.20	—
μ Herculis	8.49	—	6.77	—
β Lyrae	—	5.41	—	—
ζ Aquilae	—	5.40	4.97	—
32 Vulpeculae	—	4.59	—	—
ζ Cygni	5.94	5.23	5.03	—
Polaris O. C.	—	5.63	5.34	—
» U. C.	6.47	5.30	5.02	—
δ Ursae minoris O. C. .	7.04	—	5.38	—
» U. C. .	6.31	—	—	—
β Ursae minoris . . .	7.88	—	6.70	—
α Cephei	—	5.63	5.65	—
β »	6.79	5.52	5.39	—
ε Ursae minoris . . .	6.46	—	—	—
λ Ursae minoris . . .	6.71	6.42	6.37	—
11 Cephei	—	6.03	6.40	—
ι Cephei	6.80	—	—	—

Wie bei Engelmann, so sind auch hier die Beobachtungen gewisser Sterne in der unteren Culmination unterdrückt worden.

Die Bedeutung der Zahlen in der folgenden Zusammenstellung geht aus den Ueberschriften hervor; die Zahlen selbst sind durch einfaches Mittelbilden aus den beiden vorhergehenden Tafeln entstanden; die Buchstaben D und R bezeichnen die directen und reflectirten Beobachtungen.

	A. W.	B. O.	A. O.	B. W.
südl. Sterne D.	6″95	3″67	4″57	6″44
nördl. » D.	7.41	5.13	4.68	7.52
südl. » R.	6.28	5.16	5.01	—
nördl. » R.	6.81	5.75	5.78	—
Mittel D.	7.18	4.40	4.62	6.98
Mittel R.	6.54	5.45	5.39	—
$\frac{D.+R.}{2}$	6.86	4.92	5.00	6.98

Daraus endlich ergiebt sich für Kreis A: $\varphi = 5''.93$, für Kreis B: $\varphi = 5''.95$, also folgt, da die Polhöhe des Meridiankreises mit der des Sternwartencentrums identisch ist:

$$\Phi = 51^\circ\ 20'\ 5''.94.$$

Reihen Nr. 4 und 5.

Im Jahre 1866 führte Bruhns eine der Reihe Nr. 2 ganz analoge aus, und zwar benutzte er dazu ein Passageninstrument von Utzschneider und Liebherr. Da dasselbe auch Herrn Professor Helmert bei seiner im darauffolgenden Jahre unternommenen, ausgedehnteren Breitenbestimmung (Reihe Nr. 5) gedient hat, so mögen hier die nothwendigsten Angaben folgen.

Das Instrument besitzt ein gerades, centrisches Fernrohr, die Objectivöffnung beträgt 67 mm, die Brennweite 81 cm, die Vergrösserung war 120fach, das damals vorhandene Fadennetz bestand aus 5 Gruppen von je 5 Fäden, die Abstände vom Mittelfaden waren von früheren Beobachtungen her bekannt. Das Instrument selbst war im Südzimmer zwischen zwei gemauerten Pfeilern aufgestellt.

Den Werth eines Niveautheils nahm Herr Professor Helmert für die Reduction der beiden Reihen zu $1''.65$ an; nach deren Beendigung fand Engelmann den Werth $1''.68 \pm 0''.05$, was keinen Anlass zu Aenderungen gab.

Zunächst möge die Reihe Nr. 4 erledigt werden.

Der Stand der Seyffert'schen Uhr ist, wie immer, für jeden Abend durch einmalige Vergleichung mit der Normaluhr erhalten worden; als Uhrgang wurde der Mittelwerth aus der Zeit 1866 Mai 21 bis Juni 27 mit $+ 100^s : 37$ in Rechnung gestellt.

Die Bruhns'schen Beobachtungen beziehen sich wiederum nur auf den einen Stern η Urs. maj.; die Grössen $\varphi - \delta$, die sich für die einzelnen Tage, nach Reduction auf den F. C. ergeben, sind:

1866	$\varphi = 51^\circ\ 20'$	Gewicht nach der Anzahl der Fädenpaare
Mai 21	$7''.13$	4
Juni 8	6.26	5
9	5.25	5
20	5.37	5
21	4.84	5
23	4.92	5
25	4.29	4
27	4.67	5

Herr Professor Helmert hat nun hier, wie auch später immer, in doppelter Weise Gewichte für die Tagesresultate gebildet: einmal nahm er die Gewichte gleich der Anzahl der Paare an, die sich aus den Antritten an dieselben Fäden in Ost und West bilden liessen; diese Gewichte wurden entsprechend erhöht, wenn einzelne Fäden bei einer Reihe übrig blieben. Für die Neureduction sind diese Gewichte, die mit der Anzahl der Fäden bis 25 gehen können, in Anbetracht der 5 Fädengruppen auf die Zahlen 1—5 abgerundet worden. Zuweilen aber bildete er Gewichte nach den mittleren Abweichungen der aus diesen Paaren folgenden Grössen $\varphi - \delta$ von ihrem Mittelwerthe; für denselben Stern unterscheiden sich diese Abweichungen und damit die daraus folgenden Gewichte an den verschiedenen Beobachtungstagen nur wenig von einander. Zufällige gute Uebereinstimmung bei wenigen Fäden liefert allerdings in einigen Fällen ein grösseres Gewicht; dem Resultate ist indessen aus anderen Gründen weniger Vertrauen zu schenken. Bei der Neureduction blieb diese zweite Art von Gewichten unbeachtet.

Im vorliegenden Falle giebt die Mittelbildung ohne Gewichte:

$$\varphi = +\,51^\circ\,20'\,5''.34,$$

Mittelbildung mit Rücksicht auf die Anzahl der Fädenpaare dagegen

$$\varphi = +\,51^\circ\,20'\,5''.32.$$

In den Tagesresultaten der Bruhns'schen Reihe spricht sich in ziemlich auffälliger Weise ein Gang aus; möglicherweise liegt der Grund in dem Einfluss von Pfeilerschwankungen täglicher Periode, die, bei der nach und nach von 10^h bis 7^h Abends vorrückenden Beobachtungszeit, durch vorausgegangene Bestrahlung der Pfeiler in immer anderer Weise auf die Beobachtungen einwirken würden. Aus diesem Grunde ist von einer Berücksichtigung der Gewichte abgesehen und das einfache Mittel benutzt worden; man erhält das mit dem der zweiten Reihe identische Resultat:

$$\Phi = +\,51^\circ\,20'\,5''.67.$$

Eine Vorstellung über das Verhalten der Instrumentalfehler erhält man aus dieser Reihe nicht, da Azimuth und Neigung mehrmals geändert wurden; wohl aber erhält man eine solche bei der nun zu erörternden Reihe Nr. 5.

Diese Reihe ist an 20 Tagen in der Zeit von 1867 Febr. 21 bis Mai 25 ausgeführt worden; die 11 beobachteten Sterne sind: α Persei, 46 und 57 Aurigae, B. A. C. 2379, 3083, 3949, 4556, 21 Lyncis, Radcliffe-Catalog 2458, η Urs. maj., 13 Bootis; die damals zur Verfügung stehenden Oerter entstammen theils direct dem Berliner Jahrbuch, dem Radcl.-Cat., dem B. A. C., dem Armagh-Cat., theils sind an diese Catalogpositionen wieder Correctionen angebracht worden. Diese Catalogpositionen beruhen auf Messungen, die etwa zwei Jahrzehnte vor der Beobachtungsepoche der Reihe Nr. 5 angestellt wurden; jene der Neureduction dagegen auf solchen, deren Epochen sich nur um wenige Jahre davon unterscheiden.

Die zur Bestimmung der Polhöhe verwendeten neuen Declinationen, reducirt auf 1867.0, enthält die folgende, nach Sternen und Catalogen geordnete Tabelle:

	1867.0	F. C.	Br. A.	Grdm.	Pulk.
α Persei . .	$\delta = +49^\circ\ 23'$	5″96	5″83	6″05	—
46 Aurigae .	$+49\ 21$	6.59	6.75	—	6″26
57 » .	$+48\ 55$	—	33.69	—	33.90
2379 B. A. C.	$+49\ 41$	—	—	—	53.28
21 Lyncis . .	$+49\ 28$	—	18.12	18.29	18.57
3949 B. A. C.	$+51\ 21$	—	—	—	18.64
η Urs. maj. .	$+49\ 58$	40.79	40.44	40.80	—
13 Bootis . .	$+50\ 5$	—	15.83	16.04	14.84

Darin bedeutet F. C. wie früher den Fundamentalcatalog, Br. A. den Sterncatalog in: »Neue Reduction der BRADLEY'schen Beobachtungen .... von A. AUWERS«; Grdm.: den Sterncatalog in: »Die Declinationen der bei der Gradmessung zu Breitenbestimmungen benutzten Fixsterne, von C. BRUHNS« (3. Anhang zum Bericht über die 3. allgemeine Conferenz der Europäischen Gradmessung); Pulk.: den Sterncatalog in: »Observations de Poulcova, publiées par OTTO STRUVE. Vol. VIII«. Nur für die drei Sterne 2458 Radcl., 3083 und 4556 B. A. C. waren keine, den obigen äquivalenten Declinationen aufzufinden.

Die aus den HELMERT'schen Beobachtungen folgenden Grössen $\varphi - \delta$ findet man für alle 11 Sterne in der nächsten nach Datum und Sternen geordneten Tabelle:

1867	α Persei	
Febr. 21	+ 1° 56′ 59″.40	1
März 13	57 1.39	1
22	0.47	5

1867	46 Aurigae	
Febr. 21	+ 1° 58′ 58″.48	4
März 2	59 0.21	5

1867	5 Aurigae	
Febr. 21	+ 2° 24′ 31″.20	2
März 2	32.30	5

1867	2379 B. A. C.	
Febr. 21	+ 1° 38′ 13″.12	2
März 2	13.64	2

1867	21 Lyncis	
Febr. 21	+ 1° 51′ 47″.48	5
März 2	48.09	5

1867	3083 B. A. C.	
März 25	— 0° 0′ 58″.80	1
29	1 0.08	2
30	0 59.57	2
31	59.39	2

1867	2458 Radcliffe	
März 28	+ 0° 10′ 57″.15	3
29	57.05	3
31	57.63	2
April 17	56.94	3
18	57.56	4

1867	3949 B. A. C.	
April 17	— 0° 1′ 13″.13	2
18	13.75	2
20	13.95	2
21	13.53	2
Mai 1	12.46	1
6	12.07	2
7	12.18	1
8	12.04	2

1867	η Urs. maj.	
April 18	+ 1° 21′ 25″.55	3
21	24.78	5
Mai 1	25.04	5
6	24.97	5
7	25.81	5
8	24.96	5
10	25.54	5
18	24.78	5
25	24.64	5

1867	13 Bootis	
April 18	+ 1° 14′ 50″.65	2
21	50.26	5
Mai 1	50.49	5
6	50.50	5
7	50.85	5
10	51.08	5
18	50.50	5
25	50.54	4

1867	4556 B. A. C.	
April 18	— 0° 3′ 26″.59	2
21	26.85	2
Mai 1	26.59	1
6	26.59	2
7	25.95	2
10	26.51	1
18	26.70	1

Die beigefügten Zahlen bedeuten Gewichte je nach den Paaren correspondirender Fäden; die $\varphi - \delta$ gelten für 1867.0.

Aus der Verbindung beider Tabellen gehen, je nachdem man die Gewichte berücksichtigt oder nicht, die folgenden beiden nach Sternen und Catalogen geordneten Polhöhentabellen hervor:

	F. C.	Br. A.	Grdm.	Pulk.
α Persei	51° 20′ 6″.41	6″.28	6″.50	—
46 Aurigae . . .	6.03	6.19	—	5″.70
57 Aurigae . . .	—	5.68	—	5.89
2379 B. A. C. . .	—	—	—	6.66
21 Lyncis	—	5.90	6.07	6.35
3949 B. A. C. . .	—	—	—	5.64
η Ursae majoris .	5.89	5.54	5.90	—
13 Bootis	—	6.38	6.59	5.42

	F. C.	Br. A.	Grdm.	Pulk.
α Persei	51° 20′ 6″38	6″25	6″47	—
46 Aurigae . . .	5.93	6.09	—	5″60
57 Aurigae . . .	—	5.44	—	5.65
2379 B. A. C. . .	—	—	—	6.66
21 Lyncis	—	5.90	6.07	6.35
3949 B. A. C. . .	—	—	—	5.73
η Ursae majoris .	5.91	5.56	5.92	—
13 Bootis	—	6.38	6.59	5.42

Wegen beträchtlicher systematischer Unterschiede der Resultate der verschiedenen Abende (man vergleiche die Beobachtungen von 46 und 57 Aurigae, 2379 B. A. C., 21 Lyncis von Febr. 21 und von März 2, oder das Verhalten der $\varphi - \delta$ von 3949 B. A. C.), sowie wegen des verschwindenden Einflusses der Gewichte sollen diese vernachlässigt und weiterhin nur die zweite der beiden letzten Tabellen beibehalten werden.

Unter Berücksichtigung der zu jedem Sterne gehörigen Anzahl von Beobachtungsabenden erhält man folgende Catalogbreiten:

	F. C.	Br. A.	Grdm.	Pulk.
$\varphi =$	51° 20′ 6″01	5″95	6″25	5″74
	± 0.17	± 0.11	± 0.11	± 0.15
	± 0.63	± 0.56	± 0.53	± 0.71

Die 1. Zeile giebt die Polhöhe selbst, die 3. die mittlere Unsicherheit eines Abendresultates und die 2. die daraus folgende mittlere Unsicherheit der Catalogbreite.

Wegen der nahen Uebereinstimmung des Mittels der aus den drei letzten Catalogen folgenden Polhöhen mit jenen des F. C., die bei dessen Eigenschaft als ausgeglichener Catalog zu erwarten war, kann das Princip, bei der Neureduction nur F. C.-Positionen anzuwenden, auch hier durchgeführt werden, ohne dem Vorwurfe, die Helmert'sche Reihe nicht erschöpfend genug ausgenutzt zu haben, einen wesentlichen Anhalt zu geben. Als Resultat der Reihe Nr. 5 darf hiernach angesehen werden:

$$\varphi = + 51° 20′ 6″01$$

und damit

$$\Phi = + 51° 20′ 6″34 .$$

Für die drei, zur Breitenbestimmung nicht verwendbaren Sterne ergeben sich aus den beobachteten $\varphi - \delta$ die folgenden auf 1867.0 reducirten Declinationen:

1867.2	3083 B.A.C.	$\delta =$	$+$ 51°	21′	5″.47 $\pm$ 0″.26
1867.3	2458 Radcliffe	$\delta =$	$+$ 51	9	8.74 $\pm$ 0.14
1867.3	4556 B.A.C.	$\delta =$	$+$ 51	23	32.55 $\pm$ 0.11

Es erübrigt nun nur noch, über das Verhalten der Instrumentalfehler zu berichten, und dies kann, mit einigen geringen Aenderungen, in Herrn Professor HELMERT's eigenen Worten geschehen:

»Die Libelle musste abgehoben werden während der Beobachtungen, bei diesen hatte die Axe also andere Auflagerung als beim Nivelliren. Directe Versuche zeigten, dass innerhalb der benutzten Stellen die Axe sehr regelmässig war. Um aber constanten Fehlern nach Möglichkeit vorzubeugen, wurde bei jeder Kreislage in zwei, die Verticale nahe einschliessenden Stellungen des Fernrohrs nivellirt.

Als Zapfenungleichheit wurde nach älteren Bestimmungen angenommen:

$$R - r = -1^{s}.41 ,$$

wo R und r die Radien der als Kreise gedachten Zapfenquerschnitte sind; R gehört dem Zapfenende an, welches den Nonius trägt. Die Nivellements begründen diese Annahme in doppelter Weise: einmal lassen sich je zwei benachbarte Nivellements in verschiedenen Kreislagen verbinden, sodann aber das Mittel sämmtlicher Nivellements der Nordlage mit dem der Südlage an einem Tage. Jener Werth ist frei von aller Veränderlichkeit des Instrumentes durch längere Zwischenzeit; nicht so der zweite, jedoch wird im Mittel aus vielen Nivellements der Fehler verschwinden.

Nach der ersten Methode erhält man:

$$\frac{1}{4}(R - r) = -5^{s}.580 \pm 0^{s}.080 \text{ (21 Tagesresultate)},$$

nach der zweiten:

$$\frac{1}{4}(R - r) = -5^{s}.682 \pm 0^{s}.075 \text{ (14 Tagesresultate)},$$

im Mittel:

$$\frac{1}{4}(R - r) = -5^{s}.631 \pm 0^{s}.056 ,$$

also genau den angewandten Werth.

Nebenbei ergiebt sich als mittlerer Nivellementsfehler nach der ersten Methode (einschliesslich der Neigungsänderungen während des Umlegens): $\pm$ 0.″33, nach der zweiten Methode (einschliesslich der mittleren Neigungsänderungen in 3 Stunden): $\pm$ 0.″56, somit die ungefähre mittlere Neigungsänderung in 3 Stunden selbst zu: $\pm$ 0.″45 = $\pm$ 0.ᵖ3, bei 32maligem Aufsetzen der Libelle in dieser Zeit; man kann also mit der verticalen Stabilität der Axe zufrieden sein.

Die horizontale Stabilität oder die des Azimuthes ist nicht sehr schön, wie die Uebersicht (vgl. weiter unten) zeigt, wohl aber ist der Collimationsfehler sehr constant gewesen.

Die Gewissheit, dass die Fadendistanzen die richtigen waren, erlangte man dadurch, dass die zusammengehörigen Einzelfäden beider Lagen zu Endwerthen gruppirt wurden. Es fand sich dabei immer nahezu derselbe mittlere Fehler des Resultates, wie bei der in der vorhergehenden Berechnung ausgeführten Methode (Reduction der einzelnen Antritte in jeder Lage erst auf den Meridian und dann auf den Mittelfaden). Es wird daher auch bei den Zenithsternen grössere Unsicherheit nicht zu erwarten sein.

Insofern das Fernrohr ein gerades und ein Ocularprisma nicht vorhanden war, blieb dem Beobachter nichts anderes übrig als sich auf den Boden fast horizontal hinzulegen, um beobachten zu können. Gewöhnlich lag er in der Richtung W—O (Kopf W); ausnahmsweise fand eine zweite Lage O—W statt, um eine etwaige Verschiedenheit der persönlichen Gleichung zu entdecken, was aber nicht gelungen ist.«

Die im Vorhergehenden erwähnte Helmert'sche Uebersicht enthält, ausser den resultirenden Polhöhen oder Declinationen, mittlere Fehler dieser Grössen, des Nivellements, der Durchgänge, zwei Arten von Gewichten, halbe Summe und halbe Differenz der Neigungsglieder, die Grössen $c \pm k \sin z$, endlich c und k selbst; sie vollständig mitzutheilen, würde zu weit führen; auszugsweise mögen, zur Rechtfertigung der Behauptungen über Stabilität des Azimuths und der Collimation zunächst die Reihen dieser beiden Instrumentalfehler folgen und zwar für diejenigen Tage, an denen entweder Sterne in beiden Lagen des Instruments und in jeder Hälfte des Verticals oder an denen wenigstens, wenn in jeder Hälfte des Verticals immer nur eine Lage des Instruments zur Anwendung kam, Sterne von so verschiedenen Zenithdistanzen beobachtet wurden, dass aus den

verschiedenen $c \pm k \sin z$ sich c und k mit genügender Sicherheit bestimmen liessen.

1867	Stern	$c + k \cdot \sin z$	$c - k \cdot \sin z$	c	k
Febr. 21	α Persei	— 10″89	—	—	—
	46 Aurigae	—	+ 0″82	—	—
	57 »	—	+ 1.01	— 5″08	— 25″1
	2379 B.A.C.	—	+ 0.29	—	—
	21 Lyncis	—	+ 1.09	—	—
März 29	3083 B.A.C.	— 3.35	—	— 3.05	— 9.1
	2458 Radcl.	—	— 2.63	—	—
März 31	3083 B.A.C.	—	— 2.61	—	—
	2458 Radcl.	— 5.02	—	— 3.21	— 18.2
April 17	2458 Radcl.	—	— 3.84	—	—
	3949 B.A.C.	— 2.79	—	— 3.24	+ 13.6
April 18	2458 B.A.C.	—	— 2.74	—	—
	3949 »	— 3.13	—	—	—
	η Urs. maj.	—	— 2.34	— 2.92	— 1.9
	13 Bootis	—	— 2.74	—	—
	4556 B.A.C.	—	— 2.83	—	—
April 21	3949 B.A.C.	—	— 1.16	—	—
	η Urs. maj.	— 10.80	—	—	—
	13 Bootis	— 11.12	—	— 2.66	— 45.3
	4556 B.A.C.	— 5.47	—	—	—
Mai 1	3949 B.A.C.	—	— 1.83	—	—
	η Urs. maj.	— 8.61	—	—	—
	13 Bootis	— 8.72	—	— 3.12	— 28.8
	4556 B.A.C.	— 4.36	—	—	—
Mai 6	3949 B.A.C.	—	— 1.04	—	—
	η Urs. maj.	— 9.87	—	—	—
	13 Bootis	— 9.83	—	— 2.99	— 35.9
	4556 B.A.C.	— 4.69	—	—	—
Mai 7	3949 B.A.C.	—	— 1.88	—	—
	η Urs. maj.	— 9.60	—	—	—
	13 Bootis	— 9.29	—	— 3.18	— 32.4
	4556 B.A.C.	— 4.42	—	—	—
Mai 8	3949 B.A.C.	—	— 0.93	—	—
	η Urs. maj.	— 11.80	—	— 2.50	— 47.7
Mai 10	η Urs. maj.	—	— 3.06	—	—
	13 Bootis	—	— 2.84	— 2.20	+ 4.1
	4556 B.A.C.	—	— 2.28	—	—
Mai 18	η Urs. maj.	—	— 0.32	—	—
	13 Bootis	—	— 0.24	— 3.59	— 17.1
	4556 B.A.C.	—	— 3.11	—	—

Diese Grössen beruhen noch auf den damals bekannten Rectascensionen; die Neureduction würde auch für diese Coordinate durchgeführt worden sein, wenn zugleich bessere Uhrstände und -gänge, deren Unsicherheit stärker eingeht, als die der Rectascension, hätten beschafft werden können.

Nothwendigerweise bleibt die Bestimmung des Azimuths aus Sternen, welche so nahe am Zenith durch den 1. Vertical gehen, eine unsichere; die hier auftretende Variabilität scheint indessen, um nur aus der Unsicherheit der Fadenantritte sich erklären zu lassen, zu beträchtlich, namentlich wenn man obige Reihe neben die jener Azimuthe hält, welche aus den Struve-schen Beobachtungen von zenithnahen Sternen im 1. Verticale abgeleitet sind (Observations de Poulcova Vol. VIII, p. [191]...); weiter ist es bei derartigen Schwankungen von Tag zu Tag wahrscheinlich, dass auch während der Beobachtungen selbst Aenderungen des Azimuths stattgefunden haben:

»Die Variation von k während der Beobachtung eines Sternes in beiden Lagen ist unzweifelhaft mit Ursache, dass die Beobachtungen desselben Sternes an verschiedenen Abenden weniger gut unter einander übereinstimmen, als der mittlere Fehler der Uebereinstimmung der Fäden und des Nivellements zusammen erwarten lassen. Jedoch ist der Unterschied beider mittlerer Fehlerberechnungen im Allgemeinen geringfügig und nur bei 3949 B.A.C. bedeutender, obgleich dies gerade ein Zenithstern ist, bei welchem die Variation von k wenig ausmacht; es sind sonach noch andere Ursachen da.«

Auffallend bleibt die Constanz der Neigung, die aus der bereits mitgetheilten Untersuchung der Zapfenungleichheit genugsam erhellt.

Ein systematischer Unterschied zwischen Beobachtungen mit verschiedenen Kreislagenfolgen scheint nicht vorhanden gewesen zu sein; für die einzelnen Sterne lautet die Differenz im Sinne NO, SW — SO, NW:

$\frac{1}{2}\alpha$ Pers.	— 1″.46	2458 Radcl.	+ 0″.45
46 Aur.	+ 1.73	3949 B. A. C.	— 1.22
57 Aur.	+ 1.10	η U. maj.	— 0.02
2379 B. A. C.	+ 0.52	13 Bootis	— 0.17
21 Lyncis	+ 0.61	4556 B. A. C.	+ 0.10
3083 B. A. C.	+ 0.04		

Zur Illustration obiger Bemerkungen diene die folgende Tabelle, welche aus der schon erwähnten Uebersicht durch Umordnung erhalten und durch mehrere Columnen erweitert worden ist. Neben dem Namen des Sterns enthält die Columne II unter Z. D. die Zenithdistanz (bei den drei ersten Sternen nördlich), Columne III unter Z. d. A. Zahl der Abende, Columne IV unter Z. Z. die mittlere Zwischenzeit zwischen dem ersten und letzten Fadenantritt des Abends, Columne V unter Z. d. F. die Zahl der benutzten Fädenpaare, Columne VI unter i. m. F. den inneren, d. h. den aus der Uebereinstimmung der Antritte errechneten m. F., Columne VII unter m. F. F. den m. F. eines Antritts, endlich Columne VIII unter m. F. A. den m. F. eines Abendresultats.

Stern	Z. D.	Z. d. A.	Z. Z.	Z. d. F.	i. m. F.	m. F. F.	m. F. A.
4556 B. A. C.	1°30′	7	42^m	7	± 0″.23	± 2^s.0	± 0″.26
3949 »	1 55	8	48	9	0.19	1.4	± 0.76
3083 »	1 55	4	47	8	0.21	1.5	± 0.45
2458 Radcl.	2°35′	5	1^{h}11^m	16	0.19	1.4	± 0″.27
13 Bootis	10 45	8	2 25	23	0.18	0.6	± 0.24
η Urs. maj.	11 15	9	2 30	24	0.19	0.6	± 0.40
2379 B. A. C.	12 20	2	2 41	10	0.41	1.1	—
21 Lyncis	13 15	2	2 53	24	0.18	0.4	—
α Persei	13 30	3	2 55	7	0.33	0.5	± 0.81
46 Aurigae	13 40	2	2 54	23	0.31	0.7	—
57 »	15 5	2	3 11	17	0.25	0.5	—

Zu Rubrik 6 ist zu bemerken, dass die HELMERT'schen Beobachtungen im 1. Vertical mit den 5 Sternen α Persei, 46 und 57 Aurigae, 2379 B.A.C. und 21 Lyncis begannen, dass also bei den kleineren Werthen für den inneren mittleren Fehler der übrigen Sterne jedenfalls die grössere Uebung des Beobachters in Betracht zu ziehen ist. Im Allgemeinen wird aus dieser Zusammenstellung ersichtlich, wie für die dem Zenith nächsten Sterne, allerdings bei kürzerer Inanspruchnahme der Uhr, aber trotz der wachsenden Unsicherheit der Fädenantritte und trotz der abnehmenden Anzahl von Paaren combinirbarer Fäden die innere Genauigkeit der Resultate zunimmt.

Die Widersprüche zwischen den Werthen der Rubriken 6 und 8 beweisen deutlich das Bestehen bedeutender systematischer Abendunterschiede.

Reihe Nr. 6.

Die Reihe Nr. 6 ist kurze Zeit nach Schluss der vorigen Reihe von Herrn Professor Helmert unternommen worden; von 1867 Juni 21 bis September 3 wurden an 9 Abenden Durchgänge des Sternes η Urs. maj. durch den 1. Vertical beobachtet und zwar an einem gebrochenen, umlegbaren Passageninstrument von Pistor und Martins.

»Der Standort war der Ostpfeiler des Südzimmers und lag genau in einem Parallel mit den Instrumenten der übrigen Verticalbeobachtungen. Das Fadennetz bestand aus 11 festen und einem beweglichen Faden mit Mikrometerschraube; die Fadendistanzen, von früher her bekannt, waren nahezu ganzzahlige Vielfache von 1′7″, d. h. dem Werthe einer Schraubenrevolution. Zwischen den Durchgängen durch die festen Fäden wurden solche durch den beweglichen beobachtet und zwar, da die Schraube etwas verbogen war, immer bei derselben Ablesung der Trommel. Die Schraube wurde dabei immer nach dem Sterne zu bewegt, sodass bei Beobachtungen in NO—SW und in SO—NW der todte Gang ohne Einfluss ist.

Das feste Fadennetz war mit der Schraube ausgemessen worden und es ergab sich, unter der Annahme, dass die angewandten Fadendistanzen noch richtig waren, als Werth einer Revolution:

$$1' 7''.12 \pm 0''.10.$$

Die Beobachtungen zeigten nachträglich, dass die festen Fäden noch nahezu die angenommenen Entfernungen hatten.

Die angewandte Vergrösserung war hundertfach, das Bild des Sternes nicht völlig scharf, sondern etwas geschwänzt, und zwar in einer zu den Fäden fast senkrechten Richtung. Es werden also alle Durchgänge in gleicher Beziehung fehlerhaft beobachtet; das Mittel aus zwei zusammengehörigen Lagen wird demnach fehlerfrei sein.

Indem sowohl in SO—NW als in NO—SW beobachtet wurde, eliminirt sich im Mittel aus diesen beiden Bestimmungen

jeder Rest persönlicher Gleichung; die Bewegungsrichtung des Sternes ersieht man aus folgendem Täfelchen:

SO	von	unten	links	nach	oben	rechts } I
NW	»	u.	r.	»	o.	l. } I
NO	»	o.	r.	»	u.	l. } II
SW	»	o.	l.	»	u.	r. } II

Bei I eliminirt sich, wie bei II, die persönliche Gleichung, dadurch entstehend, dass der Stern von oben oder unten kommt; im Mittel aus I und II die, dass derselbe von rechts oder links kommend gesehen wird.

Als Werth eines Scalentheils der Libelle wurde zunächst nach einer Bestimmung aus dem Jahre 1866 benutzt: 1″.78; dagegen fand Engelmann am 6. September 1867 (also 3 Tage nach Beendigung der etwa über 2½ Monat ausgedehnten Reihe) den Werth 1″.50 ± 0″.03, welcher Werth der Reduction zu Grunde gelegt wurde.

Das vorliegende Instrument ist so eingerichtet, dass man während des Umlegens die Libelle hängen lassen kann, wie auch während der Beobachtungen selbst. Man beobachtet somit an der Libelle unmittelbar die Neigung für die Stellung, welche das Instrument bei den Beobachtungen des Sternes innehatte. Die hierbei gemachten Nivellements gestatten die Bestimmung der Zapfendicke für, streng genommen, 2 Stellungen des Fernrohres, die um ca. 20° von einander abweichen. Man erhält auf ähnliche Weise wie bei der vorigen Reihe:

für SO—NW: 2.(Kreisende — Nichtkreisende) = — 0ᵖ.48 ± 0ᵖ.16
» NO—SW: 2.(» — ») = — 1.92 ± 0.09,

welche Werthe bei der Reduction der Beobachtungen benutzt wurden. Die Genauigkeit eines Tagesnivellements incl. Neigungsänderung in 2ʰ.5 wird durch den mittleren Fehler ± 0ᵖ.31, die mittlere Veränderlichkeit der Neigung selbst durch ± 0ᵖ.22 = ± 0″.33 ausgedrückt; in verticaler Richtung hat also das Instrument sichere Aufstellung.«

Die Uhrcorrectionen wurden in derselben Weise, wie bei der vorigen Reihe, ermittelt.

Ueber die Tagesresultate der 6. Reihe, so wie dieselben sich nach der Neureduction ergeben, erhält man Aufschluss aus folgender Tafel:

1867	Kreis	$\varphi = 51^\circ 20'$			$c \mp k \sin z$	k
Juni 21	S—N	4.″97 ± 0.″32	3	7	— 6.″54	— 20″
22	N—S	4.99 ± 0.14	5	9	— 14.35	— 20
25	»	6.42 ± 0.13	4	9	— 13.82	— 17
26	»	4.89 ± 0.22	5	8	— 14.54	— 21
27	»	6.29 ± 0.24	5	9	— 15.92	— 28
Juli 23	S—N	5.63 ± 0.09	4	16	— 9.70	— 4
Aug. 14	»	5.50 ± 0.18	5	13	— 11.91	+ 8
15	»	5.70 ± 0.09	5	9	— 13.58	+ 16
Sept. 3	»	5.56 ± 0.28	5	10	— 28.76	+ 94

Die Bedeutung der Columnen 1, 2, 3, 6 ist ohne Weiteres klar; die 4. resp. 5. Columne enthalten Gewichte nach innerer Uebereinstimmung und Luftzustand resp. nach Anzahl der Fäden oder Gruppen; die in der letzten Columne enthaltenen Grössen k bedeuten Azimuthe des Instrumentes unter der Annahme, dass während der ganzen Reihe der Collimationsfehler c nahezu gleich 10″ und dass k am 21. und 22. Juni nahezu gleich gross war; die Azimuthe der drei darauffolgenden Tage dürften diese Annahme einigermassen rechtfertigen.

Bildet man das einfache Mittel aus den Tagesresultaten, so erhält man 5.″55, berücksichtigt man die Gruppengewichte, so erhält man 5.″56, berücksichtigt man die Gewichte nach innerer Uebereinstimmung und Luftzustand, so erhält man 5.″57. Beachtet man endlich, was oben neben dem Aussehen der Bilder über die Bewegungsrichtung der Sterne gesagt wurde, und mittelt die zu SO—NW und zu NO—SW gehörigen Werthe, so entstehen die Zahlen:

SO—NW = 5.″47
NO—SW = 5.65
Mittel = 5.″56 ± 0.″19,

also: $\Phi = 51^\circ 20' 5.''89$.

Reihe Nr. 7.

Bei Reihe Nr. 7 handelt es sich um eine bereits publicirte und auf den F. C. reducirte Messungsreihe; man findet diese selbst nebst ausführlichen Angaben über ihre Veranlassung, sowie eine Discussion der einzelnen Resultate zur Ableitung eines Endwerthes in der III. Abtheilung der Astr.-Geod. Arbeiten für

die Europäische Gradmessung im Kgr. Sachsen; ausgeführt im Auftrage des Kgl. Sächs. Ministeriums der Finanzen von Herrn Professor Albrecht; III. Abtheilung, X. Abschnitt (Seite 190 u. f.).

Die daselbst mitgetheilte Polhöhenbestimmung auf der Pleissenburg wurde in der Zeit 1868 October 15—23 an einem zehnzölligen Universalinstrument von Pistor und Martins mit 47^{mm} Objectiv-Oeffnung und 504^{mm} Brennweite durch Herrn Professor Helmert ausgeführt, indem in 3 Kreisständen die Zenithdistanzen von Polaris und 9 Südsternen (mit Declinationen von 3° bis 30°) gemessen wurden. Als Polhöhe des Beobachtungspfeilers *B* der Pleissenburg ergiebt sich der Werth:

$$\varphi = 51° 20' 15''.51.$$

Die Reduction auf das Centrum der Sternwarte beträgt $-10''.41$ nach Messungen, welche von der Kgl. Preussischen Landes-Aufnahme ausgeführt wurden und deren Resultate in einem der Leipziger Sternwarte handschriftlich übermittelten: »Abriss der Station Leipzig« vorliegen. Diese Reduction liefert:

$$\Phi = 51° 20' 5''.10.$$

Diese Reihe steht in schroffem Widerspruche mit den übrigen Bestimmungen; der Vollständigkeit halber war sie jedoch mit aufzuführen. Die Ursache des Widerspruches dürfte wesentlich in dem benutzten Instrument liegen.

Reihe Nr. 8.

Zu der ziemlich ausgedehnten Reihe Nr. 8, beobachtet in den Jahren 1870 und 71, ist nur ein altes, vom Grafen Brühl im Jahre 1803 der Sternwarte geschenktes Passageninstrument von Ramsden benutzt worden. Die Beobachtungen bestehen in Durchgängen der drei Jahrbuchsterne α Persei, ι und η Urs. maj. durch den 1. Vertical und zwar sind diese an 5, 10 und 23 Abenden beobachtet worden.

Der Beobachter und Rechner, Herr Leppig, giebt über das Instrument folgende Notizen:

»Das Instrument war aufgestellt zwischen zwei gemauerten Pfeilern im Südzimmer der Sternwarte. Das Objectiv hat 70^{mm} Durchmesser bei 107^{cm} Brennweite. Zu dem Instrument gehören 2 Oculare, welche (nach Möbius) eine 40- und 73malige Vergrösserung geben. Bei den Beobachtungen ist fast immer die

schwache Vergrösserung angewandt worden, weil man dann das Fadennetz ganz benutzen konnte. Ein Uebelstand entsteht dadurch, dass das Ocular nicht verschiebbar ist; man muss deshalb bei Pointirung an den äussersten Fäden seitwärts sehen, wodurch leicht eine etwas ungenaue Auffassung des Antrittes der Sterne entsteht, auch ist das Bild dort nicht gut. Die Lichtstärke des Fernrohrs lässt nichts zu wünschen übrig, da man z. B. η Urs. maj. bei leidlich guter Luft zu jeder Tageszeit sehen kann.

Des Fadennetz besteht aus einem Horizontal- und 9 Verticalfäden, welche in Gruppen von 1, 1, 5, 1, 1 eingetheilt sind; die Distanzen der Fäden vom Mittelfaden sind aus den Beobachtungen selbst abgeleitet worden.

Das angewandte Niveau ist ein Hängeniveau; da dessen Röhre aber freiliegt, ändert sich infolge der Temperaturänderung im Laufe eines Abends die Blasenlänge ganz merklich. Ein Niveautheil ist nach älteren und neueren Bestimmungen zu 2.″440 angenommen worden.«

Die Unsicherheit dieses Werthes ist nicht angegeben. Im Jahre 1885 fand Herr Dr. Hahn für den Werth eines Scalentheiles an dem grossen Niveauprüfer der Leipziger Sternwarte: 2.″54 ± 0.″04.

Als Beobachtungsuhr diente wiederum die Seyffert'sche Pendeluhr, die vermittels einer Taschenuhr einmal am Abend mit der Normaluhr verglichen wurde. Der Uhrgang blieb unberücksichtigt; dem noch vorhandenen Uhrbuche gemäss erreichte der durchschnittliche stündliche Gang nach den wöchentlichen Uhrvergleichungen bisweilen den Betrag von 0.ˢ2, wodurch Polhöhenfehler im Betrage von 0.″5 entstehen können. Indessen ist der Gang von Seyffert in jener Zeit ein unregelmässiger gewesen und es dürften im Mittel aus den Resultaten der 34, über einen Zeitraum von 18 Monaten vertheilten Beobachtungsabende die durch seine Vernachlässigung entstandenen Fehler sich einigermaassen compensiren.

Da das Fernrohr ein gerades ist, musste bei der Beobachtung das Niveau abgehoben werden; die Neigung ist demzufolge kurz vor und nach jedem Durchgang bestimmt worden. Messungen über Ungleichheit oder über Gestalt der Rothgusszapfen finden sich nicht vor; es ist sehr wahrscheinlich, dass bei den Zapfenquerschnitten sich infolge der langjährigen Benutzung Abwei-

chungen von der Kreisgestalt gebildet haben, die dann nothwendigerweise die Ungenauigkeit der Beobachtung mit vergrössern.

Die Originalzahlen der Nivellements sind nicht mehr vorhanden; die im Berechnungsbuche angeführten Neigungsglieder lassen, den verschiedenen Lagen des Instrumentes entsprechend gruppirt, nichts erkennen, was auf eine merkliche Zapfenungleichheit schliessen liesse.

Es kann leider nicht entschieden werden, ob die Umkehr der Vorzeichen bei einigen der Neigungsglieder, die Bruhns für 4 Abende im Berechnungsbuche angedeutet hat, wirklicher Fehler wegen oder nur probeweise vorgenommen worden ist; die Resultate dieser 4 Abende, dem am meisten beobachteten Sterne η Urs. maj. angehörend, sind hier weggeblieben.

Die Neigung selbst hat sich während der ganzen Zeit recht gut gehalten; bedenkliche Schwankungen ergeben sich im Collimationsfehler und, wie bei allen im Südzimmer beobachteten Reihen, im Azimuth des Ramsden'schen Instrumentes; die ersteren lassen keinen Zweifel, dass die Verbindung der einzelnen Theile dieses alten Instrumentes untereinander keine feste mehr gewesen ist.

Es ist selbstverständlich, dass diese eben erwähnten Uebelstände zusammen mit den früher aufgeführten Eigenschaften des Südzimmers die Unsicherheit der Beobachtungen erhöhen müssen; auf sie ist auch der Unterschied zurückzuführen, welcher besteht zwischen der mittleren Unsicherheit, die nach der Uebereinstimmung der aus combinirbaren Fädenpaaren folgenden Polhöhen sich ergiebt, mit jener, die den Abendresultaten vermöge ihrer Abweichungen vom Endresultat zukommt; für die erstere erhält man aus den einzelnen Sternen:

α Pers.	ι Urs. maj.	η Urs. maj.
$\pm$ 0.″20	$\pm$ 0.″22	$\pm$ 0.″21

für die letzteren:

$\pm$ 0.65	$\pm$ 0.61	$\pm$ 0.45.

Dabei ist die Anzahl der Abende:

5	10	19

und die Zeitdauer von Mittelfaden zu Mittelfaden der beiden Lagen:

$2^h\ 50^m$	$3^h\ 15^m$	$2^h\ 20^m$.

Die grössere Unsicherheit bei den ersten beiden Sternen, die eine grössere Zenithdistanz besitzen als η Urs. maj., ist wohl in der Hauptsache der Vernachlässigung der Uhrgänge zuzuschreiben.

Die Abendresultate selbst der Leppig'schen Reihe sind:

	α Persei		η Urs. maj.
1869 Jan.	13 $\varphi = 51^\circ 20' 6''.66$	1869 März	28 $\varphi = 51^\circ 20' 5''.77$
	14 5.24	April	3 6.22
	18 6.74		11 6.18
	25 5.24		14 5.83
	31 6.05		22 5.85
			28 5.56
	ι Urs. maj.	Mai	1 5.01
1869 Febr.	5 4.95	Juli	1 4.90
	6 5.37		12 5.28
	26 5.26		13 5.56
	27 6.33		22 5.92
März	1 6.57		23 4.58
	3 5.97		28 6.30
	17 6.28	Sept.	5 5.07
	29 6.57		9 5.43
	30 5.32		30 5.72
	31 6.49	1870 Juni	14 5.78
			16 5.69
			25 5.96

Ordnet und mittelt man diese Grössen für die einzelnen Sterne nach der Reihenfolge der Kreislagen, so erhält man:

	α Persei		ι Urs. maj.		η Urs. maj.	
N, S	6''.74	1	6''.39	4	5''.65	6
S, N	5.80	4	5.62	6	5.59	13
Diff.:	+ 0.94		+ 0.77		+ 0.06	

Diesen Differenzen ist trotz der übereinstimmenden Vorzeichen deswegen weniger Werth beizulegen, weil ihr absoluter Betrag mit der daneben geschriebenen wachsenden Anzahl der Messungen abnimmt. Indessen ist die Möglichkeit dargeboten, einen doch wohl angedeuteten systematischen Unterschied zwischen den beiden verschiedenen Kreislagenfolgen zu eliminiren. Aus N, S ergiebt sich mit Rücksicht auf die Anzahl der Abende:

$\varphi = 54^\circ\,20'\,6''.02$: aus S, N ebenso $\varphi = 54^\circ\,20'\,5''.63$: das Mittel ist $5''.82$ und aus demselben folgt:

$$\Phi = +\,54^\circ\,20'\,6''.15.$$

Reihe Nr. 9.

Die Reihe Nr. 9 ist die erste, welche mit dem Wanschaff'schen Universalinstrumente der Leipziger Sternwarte angestellt wurde; einige Notizen über das Instrument sind schon früher in den Jahresberichten der Sternwarte mitgetheilt worden. (Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. für 1885 und 86.

An dem Instrumente sind nacheinander folgende Beobachter thätig gewesen:

Herr Dr. Peter 1885 während kurzer Zeit zu Niveau- und Mikroskopuntersuchungen;

Herr Schnauder 1885/86 zu mehrfachen Instrumentaluntersuchungen, als Vorbereitung für die darauffolgende Neubestimmung der Polhöhe;

der Verfasser der vorliegenden Arbeit, 1890 zu gewissen Controlmessungen an einer Mire nach vorhergegangenen Instrumentaluntersuchungen.

Letzterer wurde ausserdem mit der Discussion des bis 1890 October 21 angesammelten Beobachtungsmaterials beauftragt und die Resultate derselben enthält der vorliegende Abschnitt; das Instrument selbst kam zu dieser Zeit in die Hände des Herrn Dr. Hayn. Zunächst folgen kurz die zum Verständniss des Weiteren unerlässlichen Notizen über das Instrument.

In der Construction weicht es wenig von der anderer Pistor- und Martins'scher Universalinstrumente ab. Das Fernrohr ist ein gerades, excentrisches; es besitzt eine Oeffnung von 55^{mm}, eine Brennweite von 58^{cm} und eine 58fache Vergrösserung. Das Fadennetz besteht aus 4 verticalen und 2 horizontalen Fäden, die Distanz der letzteren von einander beträgt etwa 45″ (die verschiedene Dicke beider Fäden macht einen Auffassungsunterschied bei Durchgängen wahrscheinlich). Der Kreis hat 34^{cm} Durchmesser und ist von 5′ zu 5′ getheilt.

Die mit etwa 20facher Vergrösserung versehenen Höhenkreismikroskope haben je 2 Paare Doppelfäden, deren Mitten etwa $3\frac{1}{4}$ Rev. auseinanderstehen; ihre Trommeln sind in 60 Theile getheilt und eine Revolution ist gleich 2′.

Die Mikroskop-Alhidade reitet auf der Axe; die Neigung der Mikroskopenebene gegen den Horizont ist durch eine Feinschraube corrigirbar, ihre Lage wird durch das Höhenniveau controlirt.

Hervorzuheben ist die Einrichtung einer Centralbeleuchtung; eine einzige Petroleumlampe, über dem Instrumente angebracht, sendet, vermittels eines Systems von Prismen, Spiegeln und Linsen, Licht nach allen Bedarfsstellen, mit Ausnahme der Mikroskope des Horizontalkreises.

Die Lampe steht auf einer Metallplatte, deren untere Fläche noch 18^{cm} über dem obersten Punkte des Höhenkreises sich befindet; durch ein System verticaler und horizontaler eiserner Hohlstäbe ist sie an der Umlegevorrichtung befestigt, ihre Wärmestrahlung wird durch ein cylindrisches Eisenblech abgeschwächt. Den Einfluss dieser Beleuchtungsart auf die Messung von Zenithdistanzen zu ergründen, ist der Zweck einer Specialuntersuchung durch Herrn Schnauder gewesen.

Seine Aufstellung fand das Instrument im Südhäuschen auf einem gemauerten Pfeiler, dessen Platte sich etwa 1^{m} über der Diele befand; die Breite und Tiefe des Beobachtungsraumes beträgt etwa 3^{m}, die Höhe $2^{m}40$; der $1^{m}10$ breite Spalt ist durch zwei Klappen verschliessbar. Zum Südhäuschen gehört eine Mire; in südwestlicher Richtung war auf einem $1^{m}20$ hohen, starken Holzpfahl eine verticale Neusilberplatte mit einer kreisförmigen Durchbohrung angebracht. Die Entfernung der Mire ermittelte Herr Schnauder durch Ausmessung einer 30^{cm} langen Scala mit Hilfe des Instrumentes selbst zu: $39^{m}31 \pm 0^{m}04$. —

Von Instrumentaluntersuchungen sei zunächst die der Mikroskope erwähnt; sie geschah in der üblichen Weise. Die mehrfach wiederholten Messungen stimmen gut unter sich und mit denen des Herrn Dr. Peter im Jahre 1884 überein. Zur Beurtheilung der Schraubenfehler sei ein Auszug aus der von Herrn Schnauder abgeleiteten Correctionstabelle mitgetheilt:

Trommel	I. Mikr.	II.	Trommel	I. Mikr.	II.
0^{p}	+ 0.13	− 0.01	30^{p}	− 0.13	+ 0.01
5	+ 0.11	+ 0.10	35	− 0.11	− 0.10
10	+ 0.06	+ 0.19	40	− 0.06	− 0.19
15	− 0.01	+ 0.23	45	+ 0.01	− 0.23
20	− 0.07	+ 0.20	50	+ 0.07	− 0.20
25	− 0.11	+ 0.13	55	+ 0.11	− 0.13
30	− 0.13	+ 0.01	60	+ 0.13	− 0.01

Hiernach wurden die periodischen Fehler zu eliminiren gesucht; die fortschreitenden blieben wegen ihrer Kleinheit unberücksichtigt; die zu Grunde liegenden Messungen sind vor Beginn und während der ersten Hälfte der Schnauder'schen Beobachtungsreihe angestellt worden und die erhaltenen Resultate wurden als gültig für die ganze Reihe angesehen.

Im Sommer 1890, vor Beginn der Controlmessungen, sind vom Verfasser wiederum beide Mikroskope untersucht worden; die Amplitude des periodischen Ganges hatte sich bei Mikr. I bedeutend vergrössert, während sie bei II eher etwas kleiner geworden war. Als Correctionstabelle (im Auszug gegeben) wurde verwendet für die Revolution 0.0 — 1.0:

Trommel	I. Mikr.	II.	Trommel	I. Mikr.	II.
0p	— 0p1	0p0	30p	+ 0p2	+ 0p2
5	+ 0.1	0.0	35	0.0	+ 0.2
10	+ 0.2	+ 0.1	40	— 0.1	+ 0.1
15	+ 0.3	+ 0.2	45	— 0.2	+ 0.1
20	+ 0.3	+ 0.2	50	— 0.2	0.0
25	+ 0.3	+ 0.2	55	— 0.1	0.0
30	+ 0.2	+ 0.2	60	0.0	0.0

Der in Rechnung gezogene fortschreitende Gang betrug bei beiden Mikroskopen + 0p1 = + 0″2 für jede Revolution. —

Das erste dem Instrumente beigegebene Höhenniveau erwies sich nach den Untersuchungen des Herrn Dr. Peter als unbrauchbar; ein zweites unterwarf Herr Schnauder am Niveauprüfer der Sternwarte in Bezug auf Gestalt und Scalenwerth, in Bezug auf letzteren allein am Instrumente selbst, eingehenden Untersuchungen; das Niveau verblieb dabei in seiner Fassung.

Die Ausgleichung der Niveauprüfermessungen geschah nach der folgenden, von Herrn Prof. Bruns herrührenden Methode:

Man denke sich durch die Axe des Niveaus einen verticalen Längsschnitt gelegt, nehme die Schnittlinie desselben mit dem äusseren Cylinder als Abscissenaxe, ein durch dieselbe gehendes Loth als Ordinatenaxe; dann möge die obere Schnittcurve der inneren Grenzfläche des Niveaus darstellbar sein in der Form:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$

wobei x und y Coordinaten, die a Constanten bedeuten.

Setzt man dann für die Blasenenden $x = m + \frac{l}{2}$, resp. $x' = m - \frac{l}{2}$, unter l die Blasenlänge verstanden, und:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y' - y}{x' - x},$$

so ergiebt sich:

$$\varphi = a_1 + 2a_2 \cdot m + 3a_3 \cdot m^2 + a_3 \cdot \frac{l^2}{4} + 4a_4 \cdot m^3 + a_4 \cdot m l^2 + \cdots;$$

daraus folgt, wenn man alle Grössen, die einer anderen Blasenstellung zugehören, mit dem Index 1 versieht:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{m_1 - m} = 2a_2 + a_4 \cdot l^2 + 3a_3(m_1 + m) + a_4\{3(m_1 + m)^2 + (m_1 - m)^2\}.$$

Die Kenntniss der bei der Entwickelung herausfallenden Grössen a_0 und a_1 ist nicht von Interesse, da es sich hier um die Gestalt der Curve, nicht um deren Lage handelt.

Demgemäss sind die Wanderungen der Blase angesetzt worden in der Form:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{m_1 - m} = c_1 + c_2 \cdot (m_1 + m) + c_3 \cdot \{3(m_1 + m)^2 + (m_1 - m)^2 + l^2\}.$$

Für die drei Coëfficienten ergaben sich folgende Zahlenwerthe:

	Zahl der Sätze	Temp.	$c_1 = 2a_2$	$c_2 = 3a_3$	$c_3 = a_4$
1885 März 25	3	+ 3°3 C.	1″856	+ 0″0049	0″000000
26	4	+ 3.6	1.814	+ 47	— 3
28	9	+ 4.0	1.808	+ 24	+ 40
April 2	9	+ 7.1	1.898	+ 32	0
1886 April 19	8	+ 10.2	1.783	+ 19	+ 22
22	9	+ 10.5	1.897	+ 31	— 58
23	9	+ 10.2	1.788	+ 31	— 31
24	10	+ 10.9	1.798	+ 41	— 30
25	10	+ 11.1	1.760	+ 32	— 4

Giebt man den beiden ersten Messungen wegen der geringeren Anzahl der Sätze halbes Gewicht, so erhält man die Mittelwerthe:

$$c_1 = 2a_2 = 1″821 \pm 0″018$$
$$c_2 = 3a_3 = + 0.00322 \pm 0.00038$$
$$c_3 = a_4 = - 0.0000078 \pm 0.0000112;$$

demnach ist c_3 zu vernachlässigen und die Curvengleichung wird:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + 0''.910 \cdot x^2 + 0''.00107 \cdot x^3 .$$

Rechnet man nun, mit plausiblen Annahmen über Glasdicke, Scalenlänge, Fehler des Scalennullpunktes und mit dem Parswerth 1''.821 dieselben Coëfficienten $a_0 \ldots a_3$ unter der Annahme einer Kreisgestalt, so erhält man für a_3 einen verschwindenden Betrag; das Glied $0''.00107 \cdot x^3$, dessen Coëfficient sich um $\frac{1}{8}$ seines Werthes sicher ergiebt, beweist darnach eine merkliche Abweichung von der Kreisgestalt. $c_1 = 2a_2$ ist der Scalenparswerth für den Anfang der Scala, ist aber nicht zur Reduction der Beobachtungen am Instrument verwandt worden, da das Niveau durch seine Befestigung am Instrument Spannungen erlitten haben dürfte.

Das Niveau liegt nämlich in einer oben aufgeschnittenen Messingröhre und wird durch 2 Federn von oben gegen 4 Stützpunkte gedrückt; an den Enden der Röhre befindet sich je ein Ansatz mit Schrauben zur Befestigung der Fassung am Instrument. Die Parsbestimmungen an letzterem ergaben Werthe, die im Allgemeinen kleiner sind, als die am Niveauprüfer; die an einem Tage sich ergebenden stimmen gut zusammen, Resultate von verschiedenen Tagen zeigen dagegen bisweilen ganz bedeutende Unterschiede.

Der Parswerth ist deshalb unmittelbar vor und nach jeder Tagesreihe am Instrument gemessen und das Resultat als für den betreffenden Tag gültig angesehen worden.

Diese Tagesresultate sind an einer späteren Stelle mitgetheilt.

Vor Beginn der Controlmessungen im Jahre 1890 war die Libelle aus ihrer Fassung genommen worden, um Theilstriche und Bezifferung, sowie die lahm gewordenen Haltefedern zu erneuern; mehrere nachherige Untersuchungen am Niveauprüfer können nur die Vermuthung von Verspannungen bestätigen. Indem die Prüferschraube immer sorgfältig gleichviel weiter gedreht wurde, und zwar Juli 22 um 0:10, Juli 23 um 0:03, ($1^r = 122''.97$) stellten sich für die verschiedenen Scalenablesungen folgende Werthe heraus:

1890 Juli 22		1890 Juli 23		1890 Juli 23	
Blasen-		Blasen-		Blasen-	
mitte	wanderung	mitte	wanderung	mitte	wanderung
40?8	5?72	—	—	43?8	1?47
34.6	6.29	44?0	1?82	42.0	1.60
28.4	6.33	39.5	1.72	39.3	1.70
22.2	6.25	37.6	2.05	37.5	1.85
16.0	6.41	35.9	1.90	35.5	1.77
9.8	5.80	33.5	1.85	33.6	1.80
—	—	31.6	1.87	31.6	1.95
—	—	29.6	2.00	29.7	1.80
—	—	27.7	1.75	27.8	1.80
—	—	25.9	1.90	26.0	1.77
—	—	23.9	1.85	24.0	1.87
—	—	22.1	1.80	22.2	1.82
—	—	20.2	1.92	20.3	1.72
—	—	18.2	1.90	18.3	1.92
—	—	16.3	1.95	16.3	1.97
—	—	14.4	1.95	14.3	1.87
—	—	12.5	1.72	12.6	1.67
—	—	10.7	1.90	10.7	1.70
—	—	8.9	1.62	8.9	1.65
—	—	—	—	7.4	1.25

Die Blasenlängen waren bei diesen drei Reihen resp.

10?1, 11?5, 11?6.

Während früher die Parswerthe mit der Theilung wuchsen, nehmen sie hier gegen beide Enden hin zu.

Bildet man aus obigen 44 Beträgen für die Wanderungen 11 Normalwerthe, setzt dieselben, bei einer gemeinsamen Blasenlänge von 11?0, an, wie früher geschehen, so ergeben sich nach der M. d. kl. Q.:

$$c_1 = \quad 1?849 \quad \pm 0?042$$
$$c_2 = +\,0.0008 \quad \pm 0.0015$$
$$c_3 = -\,0.000022 \pm 0.000015.$$

Diese Coëfficienten sind nicht unmittelbar mit denen des Herrn Schnauder vergleichbar, da er sofort die Blasenwanderungen in Parswerth, ausgedrückt in Bogensecunden, umgesetzt hat.

Die übrigbleibenden Reste bei der Darstellung der 11 Normalwerthe zeigt folgendes Täfelchen.

Blasen-mitte	R. — B.	Blasen-mitte	R. — B.
41.9	+ 0.15	21.7	+ 0.03
38.8	— 6	18.2	— 10
34.9	— 1	15.2	— 13
31.6	— 3	11.4	+ 2
28.4	— 1	8.7	+ 18
24.9	— 1		

Sie zeigen, dass bei Pars 15—5 eine Unstetigkeitsstelle sich befindet und dass am Anfang und am Ende der Scala dieser Libelle die Reihe der Wanderungen nicht durch eine so einfache Form für $(\varphi' - \varphi) : (m' - m)$ darstellbar ist. Auf Grund dieser Messungen sind die Theile der Scale $0^p - 5^p$ und $43^p - 50^p$ durch Ueberstreichen mit schwarzer Farbe von der Benutzung ausgeschlossen worden.

Aus c_4 folgt übrigens: $1^p = 1''.994 \pm 0''.045$; Parsbestimmungen am Instrument, angestellt vor und nach den Messungen der Mirenzenithdistanz, ergaben wiederum kleinere Werthe; es findet sich:

1890 Aug. 8	$1^p = 1''.890$	1890 Sept. 15	$1^p = 1''.919$
16	1.876	16	1.711
21	1.986	17	1.898
Sept. 7	1.913	18	1.915
10	1.780	19	1.868
11	1.944	20	1.925
12	1.894	Oct. 17	1.904
13	1.772		

von da an ist das Mittel: $1^p = 1''.879 \pm 0''.017$ benutzt worden.

Herr Schnauder fand:

am Niveauprüfer . . . . . $1''.821 \pm 0''.018$,

am Instrument im Mittel aus 125 Einzelbestimmungen: 1".527 (kleinster Werth 1".228, grösster Werth 1".953),

während vom Verfertiger der Libelle angegeben worden ist: 2".034.

Wegen der Verschiedenheit dieser Werthe war es nöthig, auf das Neigungsglied zu achten. Vorwegnehmend mag hier bemerkt werden, dass eine Niveauparsverbesserung in das Schnauder'sche Endresultat mit dem Factor — 0.47 eingehen würde, dass aber ein Vergleich der täglichen Neigungsglieder, die zwischen — 1.75 und + 1.58 schwanken, mit den nach der

INHALT.

Seite

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen 99

F. Hausdorff, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung II. Vorgelegt von Herrn BRUNS 120

P. Stäckel, Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses. Vorgelegt von Herrn LIE 163

A. Wangerin, Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses, Zusatz zu der vorstehenden Arbeit des Herrn P. STÄCKEL. Vorgelegt von Herrn LIE 170

R. Schumann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn BRUNS. 173

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
JUL 12 1893
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

III.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

JUL 12 1893

letzten Ausgleichung übrig bleibenden Polhöhenresten keinen Zusammenhang erkennen liess; man findet nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\text{Verbesserung} = + 0\overset{s}{.}0003 \pm 0\overset{s}{.}0684;$$

es kann somit bei dem angewandten Verfahren sein Bewenden haben. —

Der Höhenkreis ist von der gewöhnlichen Construction; seine 6 Speichen, deren Verlängerungen in den Punkten 0°, 60°.. auf die Theilung treffen, gehen an der horizontalen Axe zusammen in einen kurzen Messingcylinder, der durch 6, mit der Axe parallel liegende Schrauben an ein mit dieser fest verbundenes Stück angepresst wird.

Um die Neigung des Kreises gegen die Horizontalaxe zu bestimmen, hat Herr Schnauder Runbestimmungen in äquidistanten Zenithdistanzen vorgenommen; dieselben liessen nichts mit Sicherheit erkennen, was auf eine merkliche Abweichung von der richtigen Lage schliessen liesse.

Die Excentricität wurde als eliminirt erachtet durch die Ablesung an beiden Mikroskopen. Für Stand I ist ihr Betrag beiläufig durch Herrn Schnauder bestimmt worden; man findet in der Brünnow'schen Bezeichnung:

$$O = 79^\circ\, 8', \quad \frac{e}{r} = 4\overset{''}{.}5.$$

Bei Standwechsel hat sie sich zwar geändert, wie zu erwarten war und wie die nach Ablesungen geordneten Mikroskopdistanzen zeigen, sie blieb jedoch immer von derselben Ordnung.

Infolge des Verhaltens der Biegung in den 3 Kreisständen während der Schnauder'schen Polhöhenbestimmung wurde im Winter 1891/92 eine Untersuchung der Theilungsfehler vorgenommen. Das Nähere hierüber findet sich in »H. Bruns, Untersuchung einer Wanschaff'schen Theilung«, Astr. Nachr. Bd. 130, Nr. 3098. Aus dieser Arbeit ist hier die Correctionsformel

$$- 1\overset{''}{.}425 \sin 2u + 0\overset{''}{.}707 \cos 2u$$

benutzt worden, in der u die Ablesung des betreffenden Durchmessers bedeutet.

Uebrigens hatten Runbestimmungen aus benachbarten Intervallen schon früher Strichfehler bis zu 1″ wahrscheinlich gemacht.

Die Reduction aller Beobachtungen am WANSCHAFF'schen Instrument war schon einmal durch Herrn SCHNAUDER, ein zweites Mal mit einigen Modificationen durch den Verfasser, immer aber ohne Rücksicht auf Theilungsfehler beendet worden; ein Versuch zeigte bald, dass ihre Berücksichtigung Verbesserungen mit sich brachte und demgemäss wurden sie, nach der obigen Formel, nachträglich in Rechnung gezogen. —

Um den Einfluss der dem Instrumente eigenthümlichen Centralbeleuchtung zu erfahren, ist an einem Tage die Zenithdistanz des Polarsterns und an 25 Tagen die der Mire gemessen worden, sowohl unter Anwendung dieser Centralbeleuchtung, als bei diffusem Tageslicht; ein einfacher Beobachtungssatz bestand dabei aus Folgendem:

F. W. Einstellung auf die Mire am oberen Faden
» » » » » » unteren »
F. O. » » » » » oberen »
» » » » » » unteren »

und Wiederholung in der umgekehrten Kreislagenfolge; ein solcher Satz wurde dann erst bei Tageslicht, zweimal hintereinander bei Beleuchtung und dann nochmals bei Tageslicht ausgeführt, oder umgekehrt.

Die resultirenden Zenithdistanzen mit und ohne Lampe (z_m und z_0) findet man in folgender Zusammenstellung:

	Zenithpunkt	Object	z_0	z_m	Gewicht
1885					
Juni 28	120°	α Urs. min.	38° 39′ 54″.81	54″.48	2
Sept. 20	240	Marke	91 30 40.54	40.47	1
21	»	»	41.00	41.30	½
24	»	»	42.00	41.05	1
26	»	»	39.72	39.38	1
29	»	»	39.78	39.50	1
Oct. 11	»	»	39.40	39.10	1
14	»	»	39.71	39.59	1
16	»	»	40.51	40.41	1
Nov. 16	»	»	38.58	38.25	½
20	»	»	37.61	37.59	1
23	»	»	36.45	37.49	1
29	»	»	38.42	38.28	1

	Zenithpunkt	Object	z_o	z_m	Gewicht
1886					
Febr. 3	240°	Marke	91° 30′ 37″.07	37″.09	1
5	»	»	36.89	36.50	1
9	»	»	34.08	34.11	1
10	»	»	34.14	34.37	1
11	»	»	32.89	33.09	1
16	»	»	27.72	27.46	1
20	»	»	24.27	24.34	1
25	»	»	23.38	23.71	1
26	»	»	23.52	23.45	1
März 28	»	»	25.38	25.56	1
April 8	0°	»	27.92	26.79	1
8	»	»	26.90	26.90	1
12	»	»	26.55	26.56	1

Herr Schnauder fand im Mittel:

$$z_m - z_o = -0''.095 \pm 0''.082$$

und als mittleren Fehler einer Distanzdifferenz, wie sie aus einem vollständigen Beobachtungssatze hervorgeht: $\pm 0''.42$.

Aus der Kleinheit und Unsicherheit von $z_m - z_o$ wurde geschlossen, dass der Einfluss der Centralbeleuchtung auf Zenithdistanzen überhaupt unmerklich sei. —

Zur Polhöhenbestimmung selbst hat Herr Schnauder in der Zeit von 1885 April 16 bis 1886 April 2 an 31 Abenden Circummeridianhöhen von 11 Polsternen in oberer oder unterer Culmination und von 31 Südsternen gemessen.

Die 42 Sterne sind im Berliner Jahrbuch enthalten; die benutzten scheinbaren Oerter giebt folgende Tafel.

Datum und Stern	α	δ	Datum und Stern	α	δ
1885					
April 16			April 19		
			χ Leonis	10h59m 6s.78	+ 7° 57′ 13″.75
α Urs. min.	1h16m42s.69	+88° 41′ 42″.96	α Urs. min.	1 16 13.63	+88 41 42.11
l Leonis	10 43 14.43	+11 8 59.22	v Leonis	11 31 5.53	— 0 11 34.42
χ Leonis	10 59 6.93	+ 7 57 13.60	β Virginis	11 44 14.21	+ 2 24 32.37
α Urs. min.	1 16 12.70	+88 41 42.94	α Urs. min.	1 16 13.64	+88 41 42.10
April 19			Mai 19		
30 Hev.Cam.	10 17 1.52	+83 8 40.16	ε Virginis	12 56 29.06	+11 34 32.69
l Leonis	10 43 14.38	+11 8 59.43	43 Hev. Ceph.	0 53 11.27	+85 38 12.59

Datum und Stern	α	δ
Mai 23		
α Serpentis	15h38m38s.64	+ 6°47′17″.22
Gr. 750	4 0 42.13	+85 14 54.56
γ Herculis	16 16 53.14	+19 25 27.83
Gr. 750	4 0 42.13	+85 14 54.56
$\varkappa$ Ophiuchi	16 52 15.89	+ 9 33 19.51
ε Urs. min.	16 57 53.28	+82 13 32.71
α Ophiuchi	17 29 38.14	+12 38 43.77
δ Urs. min.	18 9 37.95	+86 36 38.16
72 Ophiuchi	18 1 56.16	+ 9 32 58.44
Mai 24		
π Bootis pr.	14 35 21.48	+16 54 41.14
α Urs. min.	1 16 31.08	+88 41 33.34
τ^1 Serpentis	15 20 29.65	+15 49 59.76
α Urs. min.	1 16 31.11	+88 41 33.33
Gr. 750	4 0 42.16	+85 14 54.24
γ Herculis	16 16 53.15	+19 25 28.04
Gr. 750	4 0 42.17	+85 14 54.24
49 Herculis	16 46 53.11	+15 10 7.26
ε Urs. min.	16 57 53.23	+82 13 32.02
Mai 28		
α Urs. min.	1 16 34.11	+88 41 32.57
τ Virginis	13 55 49.85	+ 2 5 59.72
α Urs. min.	1 16 34.13	+88 41 32.57
π Bootis pr.	14 35 21.47	+16 54 41.78
α Urs. min.	1 16 34.14	+88 41 32.57
τ^1 Serpentis	15 20 29.67	+15 50 0.65
Gr. 750	4 0 42.17	+85 14 52.95
ε Serpentis	15 45 7.18	+ 4 49 29.34
Gr. 750	4 0 42.17	+85 14 52.95
γ Herculis	16 16 53.18	+19 25 28.88
Mai 29		
α Urs. min.	1 16 35.27	+88 41 32.43
τ Virginis	13 55 49.85	+ 2 5 59.81
α Urs. min.	1 16 35.30	+88 41 32.42
π Bootis pr.	14 35 21.47	+16 54 41.94
Juni 3		
ε Serpentis	15 45 7.50	+ 4 49 29.99
Gr. 750	4 0 43.09	+85 14 54.40
γ Herculis	16 16 53.22	+19 25 29.90
Gr. 750	4 0 43.09	+85 14 54.39
49 Herculis	16 46 53.20	+15 10 9.00
ε Urs. min.	16 57 53.20	+82 13 36.23
Juni 5		
α Urs. min.	1 16 40.58	+88 41 31.51
τ Virginis	13 55 49.82	+ 2 6 0.44
Juni 5		
α Urs. min.	1h16m40s.60	+88°41′31″.54
π Bootis pr.	14 35 21.45	+16 54 43.06
α Urs. min.	1 16 40.62	+88 41 31.51
τ^1 Serpentis	15 20 29.68	+15 50 2.05
Gr. 750	4 0 43.25	+85 14 50.88
ε Serpentis	15 45 7.51	+ 4 49 30.38
Gr. 750	4 0 43.25	+85 14 50.87
γ Herculis	16 16 53.23	+19 25 30.50
Gr. 750	4 0 43.25	+85 14 50.87
49 Herculis	16 46 53.23	+15 10 9.60
ε Urs. min.	16 57 53.20	+82 13 36.82
Juni 16		
π Bootis pr.	14 35 21.39	+16 54 44.75
α Urs. min.	1 16 50.62	+88 41 30.56
τ^1 Serpentis	15 20 29.65	+15 50 3.88
Gr. 750	4 0 44.90	+85 14 48.03
Juni 19		
α Urs. min.	1 16 53.09	+88 41 30.37
τ^1 Serpentis	15 20 29.64	+15 50 4.35
Gr. 750	4 0 45.32	+85 14 47.37
ε Serpentis	15 45 7.52	+ 4 49 32.10
Gr. 750	4 0 45.32	+85 14 47.37
γ Herculis	16 16 53.26	+19 25 33.30
Gr. 750	4 0 45.32	+85 14 47.37
49 Herculis	16 46 53.30	+15 10 12.30
ε Urs. min.	16 57 52.64	+82 13 41.20
Juni 24		
Gr. 750	4 0 46.22	+85 14 46.10
ε Serpentis	15 45 7.27	+ 4 49 32.70
Gr. 750	4 0 46.22	+85 14 46.09
γ Herculis	16 16 53.26	+19 25 34.28
Gr. 750	4 0 46.22	+85 14 46.09
49 Herculis	16 46 53.31	+15 10 13.26
ε Urs. min.	16 57 52.33	+82 13 42.90
α Ophiuchi	17 29 38.47	+12 38 49.95
δ Urs. min.	18 9 39.03	+86 36 48.40
Juli 7		
ε Serpentis	15 45 7.43	+ 4 49 34.18
Gr. 750	4 0 48.94	+85 14 43.63
γ Herculis	16 16 53.18	+19 25 36.59
Gr. 750	4 0 48.95	+85 14 43.63
49 Herculis	16 46 53.29	+15 10 15.54
ε Urs. min.	16 57 51.22	+82 13 46.44

Datum und Stern	α	δ	Datum und Stern	α	δ
Juli 19			**Sept. 5**		
γ Herculis	16h16m53s08	+19°25′38″40	λ Urs. min.	19h39m13s63	+88°57′47″19
Gr. 750	4 0 51.94	+85 14 42.06	24 Vulpec.	20 11 54.77	+24 19 28.70
49 Herculis	16 46 53.21	+15 10 17.40	λ Urs. min.	19 39 13.61	+88 57 47.19
ε Urs. min.	16 57 49.84	+82 13 49.10	α Delphini	20 34 20.84	+15 30 50.36
α Ophiuchi	17 29 38.47	+12 38 54.20	76 Draconis	20 50 59.28	+82 6 44.88
			α Equulei	21 10 7.68	+ 4 46 46.64
Juli 24			1 Hev. Drac.	9 20 34.08	+84 49 37.48
24 Vulpeculae	20 11 54.90	+24 19 18.22	ε Pegasi	21 38 35.54	+ 9 24 18.08
λ Urs. min.	19 39 48.05	+88 57 33.86			
α Delphini	20 34 20.84	+15 30 42.59	**Sept. 16**		
76 Draconis	20 51 1.33	+82 6 25.99	54 Hev. Ceph.	6 46 27.04	+87 12 57.17
			γ Aquilae	19 40 50.20	+10 20 25.94
August 4			λ Urs. min.	19 39 1.24	+88 57 49.46
$\varkappa$ Ophiuchi	16 52 15.89	+ 9 33 30.26	24 Vulpec.	20 11 54.60	+24 19 30.18
ε Urs. min.	16 57 47.59	+82 13 52.04	λ Urs. min.	19 39 1.20	+88 57 49.47
α Ophiuchi	17 29 38.34	+12 38 56.34	α Delphini	20 34 20.74	+15 30 54.60
δ Urs. min.	18 9 31.26	+86 37 0.03	76 Draconis	20 50 58.10	+82 6 45.10
67 Ophiuchi	17 54 55.99	+ 2 56 32.16			
54 Hev. Ceph.	6 46 8.52	+87 18 5.28	**Oct. 14**		
			24 Vulpec.	20 11 54.09	+24 19 31.95
August 5			λ Urs. min.	19 38 24.35	+88 57 52.86
54 Hev. Ceph.	6 46 8.90	+87 18 4.98	α Delphini	20 34 20.27	+15 30 53.05
γ Aquilae	19 40 50.59	+10 20 24.44	76 Draconis	20 50 54.13	+82 6 54.40
λ Urs. min.	19 39 40.97	+88 57 38.70	**Nov. 16**		
24 Vulpec.	20 11 54.98	+24 19 22.69	ε Pegasi	21 38 34.67	+ 9 24 19.90
λ Urs. min.	19 39 40.96	+88 57 38.71	1 Hev. Drac.	9 20 41.39	+84 49 21.77
α Delphini	20 34 20.94	+15 30 45.32	ϑ Pegasi	22 4 26.52	+ 5 38 22.10
76 Draconis	20 51 1.25	+82 6 34.38	30 Hev. Cam.	10 16 58.20	+83 7 56.65
α Equulei	21 10 7.66	+ 4 46 43.07	ζ Pegasi	22 35 46.39	+10 14 18.80
			Br. 1508	10 50 42.79	+78 22 33.38
August 16			**Nov. 17**		
α Delphini	20 34 20.95	+15 30 47.36	α Equulei	21 10 6.72	+ 4 46 46.93
76 Draconis	20 51 0.78	+82 6 35.16	1 Hev. Drac.	9 20 41.56	+84 49 21.83
α Equulei	21 10 7.74	+ 4 46 44.56	ε Pegasi	21 38 34.66	+ 9 24 19.84
1 Hev. Drac.	9 20 29.72	+84 49 44.41	1 Hev. Drac.	9 20 41.56	+84 49 21.83
ε Pegasi	21 38 35.52	+ 9 24 15.40	ϑ Pegasi	22 4 26.54	+ 5 38 22.05
			30 Hev. Cam.	10 16 58.39	+83 7 56.55
Sept. 2			**Nov. 18**		
54 Hev. Ceph.	6 46 20.18	+87 12 59.04	76 Draconis	20 50 48.20	+82 6 53.50
110 Herculis	18 40 45.20	+20 26 36.29	α Equulei	21 10 6.70	+ 4 46 46.85
λ Urs. min.	19 39 47.29	+88 57 46.47	1 Hev. Drac.	9 20 41.72	+84 49 21.82
ω Aquilae	19 12 27.83	+11 23 42.48	ε Pegasi	21 38 34.64	+ 9 24 19.77
54 Hev. Ceph.	6 46 20.20	+87 12 59.04	1 Hev. Drac.	9 20 41.72	+84 49 21.82
γ Aquilae	19 40 50.39	+10 20 24.87	ϑ Pegasi	22 4 26.49	+ 5 38 21.99
λ Urs. min.	19 39 47.25	+88 57 46.48	30 Hev. Cam.	10 16 58.59	+83 7 56.44
24 Vulpec.	20 11 54.80	+24 19 28.24	ζ Pegasi	22 35 46.36	+10 14 18.72
λ Urs. min.	19 39 47.22	+88 57 46.49	Br. 1508	10 50 43.00	+78 22 33.06
α Delphini	20 34 20.86	+15 30 49.98	α Pegasi	22 59 4.90	+14 35 39.36

Datum und Stern	α	δ	Datum und Stern	α	δ
Nov. 19			März 30		
76 Draconis	20h50m48s.05	+82° 6′53″.45	o Virginis	14h59m25s.74	+ 9°21′47″.49
α Equulei	21 10 6.69	+ 4 46 46.77	α Urs. min.	1 16 31.21	+88 42 5.36
1 Hev. Drac.	9 20 41.88	+84 49 21.75			
ε Pegasi	21 38 34.63	+ 9 21 19.74	April 1		
1 Hev. Drac.	9 20 41.88	+84 49 21.75	λ Urs. min.	19 37 41.23	+88 57 18.17
ϑ Pegasi	22 4 26.48	+ 5 38 21.94	β Cancri	8 10 20.82	+ 9 31 56.13
30 Hev. Cam.	10 16 58.78	+83 7 56.32	λ Urs. min.	19 37 41.25	+88 57 18.17
ζ Pegasi	22 35 46.35	+10 14 18.67	δ Cancri	8 38 13.33	+18 34 10.66
			76 Draconis	20 50 44.66	+82 6 20.59
Nov. 20			ϑ Hydrae	9 8 27.44	+ 2 47 25.34
76 Draconis	20 50 47.89	+82 6 53.40	1 Hev. Drac.	9 20 49.12	+84 49 49.69
α Equulei	21 10 6.67	+ 4 46 46.70	l Leonis	10 43 17.35	+11 8 41.66
1 Hev. Drac.	9 20 42.08	+84 49 21.72	ϑ Urs. min.	1 16 30.78	+88 42 4.72
			α Leonis	11 8 16.93	+16 2 58.99
			α Urs. min.	1 16 30.77	+88 42 4.74
1886			v Leonis	11 31 8.34	— 0 11 52.00
März 25			April 2		
δ Cancri	8 38 13.44	+18 34 10.30	β Cancri	8 10 20.81	+ 9 31 56.15
76 Draconis	20 50 43.78	+82 6 21.81	λ Urs. min.	19 37 42.50	+88 57 18.08
ϑ Hydrae	9 8 27.23	+ 2 47 25.30	δ Cancri	8 38 13.32	+18 34 10.72
1 Hev. Drac.	9 20 49.80	+84 49 48.16	76 Draconis	20 50 44.80	+82 6 20.40
			ϑ Hydrae	9 8 27.12	+ 2 47 25.32
März 30			1 Hev. Drac.	9 20 48.99	+84 49 49.90
l Leonis	10 43 17.37	+11 8 41.54	l Leonis	10 43 17.34	+11 8 41.71
α Urs. min.	1 16 31.22	+88 42 5.37	α Urs. min.	1 16 30.63	+88 42 4.37
ϑ Leonis	11 8 16.94	+16 2 58.82	ϑ Leonis	11 8 16.93	+16 2 59.07
α Urs. min.	1 16 31.22	+88 42 5.37	α Urs. min.	1 16 30.63	+88 42 4.36
v Leonis	11 31 8.34	— 0 11 52.00	v Leonis	11 31 8.33	— 0 11 52.01
α Urs. min.	1 16 31.21	+88 42 5.36	α Urs. min.	1 16 30.63	+88 42 4.35

Mit Ausnahme einiger weniger Fälle, in denen 2 Südsterne einander sehr nahe folgen, fand regelmässige Abwechselung zwischen beiden Sternarten statt. Die Zenithdistanzen der Südsterne liegen zwischen 30° 30′ und 50° 15′, die der Nordsterne zwischen 27° 0′ und 48° 55′, während die entsprechenden Mittelwerthe sind: 39° 35′ und 40° 40′, nahe genug mit der Zenithdistanz des Poles: 38° 40′ übereinstimmend. Durch diese Symmetrie wurde bezweckt, den Einfluss der Biegung und Refraction, sowie die Aenderungen der letzteren im Laufe der Beobachtung herabzudrücken.

In sehr wenigen Ausnahmefällen überschreiten die Stundenwinkel der Südsterne 10 Zeitminuten, die Pointirungen wurden nach Möglichkeit symmetrisch zum Meridian vertheilt. Bei Nord-

sternen ist das letztere meist auch der Fall, ausser bei den dem Pole sehr nahen Sternen. Die Südsterne liess der Beobachter den Faden passiren, was bei geklemmtem Höhenkreis stets in der Mitte des Gesichtsfeldes geschah unter Anwendung der Azimuthalfeinbewegung; nach einiger Uebung gelang es zu erreichen, dass der Durchgang zwischen den beiden inneren Verticalfäden eintrat bei völlig unbewegtem Instrumente. Bei Polsternen ausserhalb des Meridians geschah es ebenso; waren sie demselben sehr nahe, so ist der Faden auf den Stern geschraubt und der Moment der Bisection registrirt worden. Zur Pointirung wurde immer erst der obere, dann der untere Horizontalfaden (mit 3 Ausnahmen) benutzt; die Fäden wurden vermittels der Höhenfeinschraube dem Sterne nahe gebracht, die letzte Drehung geschah im Uhrzeigersinne. Dies wurde, nach dem Drehen des Instrumentes um 180° im Azimuth, in der anderen Lage wiederholt, sodass an den beiden Fäden je eine Zenithdistanz, mit Elimination des Nullpunktes, erhalten wurde.

Nach dem Durchgange des Sternes erfolgte die Ablesung der Mikroskope und die Notirung des Standes der Niveaublase. Vermöge der Ablesung zweier Theilstriche in jedem Mikroskope liess sich der Run aus den Sternbeobachtungen selbst ableiten; es ergaben sich an jedem Abende 2 Mittelwerthe, je nachdem das Fernrohr dem Kreise folgte oder voranging. Dabei wurden als Werthe für die beiden Doppelfadendistanzen die aus den Schraubenuntersuchungen hervorgegangenen benutzt.

Zur Angabe des Luftdruckes diente das Stationsbarometer, zur Temperaturablesung ein Thermometer, das an einem Gestell östlich dicht neben dem Südhäuschen angebracht und bei jeder Ablesung herabgelassen wurde; seine Kugel befand sich 3^m4 über dem Erdboden. Der Luftdruck wurde vor Beginn und nach Schluss jeder Tagesreihe, bisweilen auch dazwischen, die Temperatur fast nach jedem Sterne abgelesen; 1885 Nov. 20 unterblieb die Schlussablesung des Barometers, und der Luftdruck wurde deshalb für die kurze Beobachtungsdauer als constant angenommen.

Die Refraction ist die Bessel'sche; die folgende Tafel enthält die zu ihrer Berechnung nöthigen Angaben in der Reihenfolge: Datum, Uhrzeit, inneres Thermometer, Barometer, äusseres Thermometer.

1885					1885				
			mm					mm	
April 16	9h 41m	+ 8°9	748.40		Juni 3	15h 0m	+ 14°7	757.35	+ 13°0
	10 0			+ 10°9		15 20			+ 12.3
	10 28			+ 10.2		16 7			+ 12.0
	11 22			+ 9.3		16 38			+ 11.25
	11 52	+ 8.5	748.95			17 5			+ 11.0
						17 10	+ 14.4	757.15	
April 19	10 0	+ 10.1	759.85						
	10 5			+ 10.9					
	10 20			+ 10.5	Juni 5	13 20	+ 17.6	753.10	
	10 42			+ 9.2		13 37			+ 20.2
	11 11			+ 7.8		13 55			+ 20.3
	12 4			+ 7.7		14 15			+ 20.0
	12 8	+ 9.8	760.00			14 35			+ 18.7
						14 55			+ 18.0
Mai 19	12 30	+ 10.9	752.00			15 13			+ 18.1
	12 45			+ 7.0		15 22			+ 17.7
	13 20			+ 6.9		16 6			+ 17.0
	13 25	+ 10.9	752.00			16 16			+ 17.0
						16 36			+ 16.5
Mai 23	15 18	+ 12.1	753.60			17 6			+ 16.0
	15 26			+ 6.9		17 10	+ 16.8	753.20	
	15 38			+ 6.7					
	16 16			+ 6.8	Juni 16	14 18	+ 18.4	752.35	
	16 50			+ 5.9		14 30			+ 13.25
	17 12			+ 5.5		14 45			+ 12.8
	17 15	+ 12.0	753.85			15 10			+ 12.4
	17 42			+ 5.3		15 21			+ 12.3
	18 10			+ 5.9		15 43			+ 12.7
	18 15	+ 11.9	753.75			15 46	+ 18.1	752.70	
Mai 24	14 10	+ 12.9	755.25		Juni 19	14 30	+ 17.7	749.65	
	14 20			+ 9.7		14 36			+ 15.0
	14 57			+ 9.5		14 52			+ 14.4
	15 20			+ 9.0		15 12			+ 13.8
	16 2			+ 7.9		15 45			+ 13.2
	16 17			+ 7.2		15 56			+ 13.0
	16 46			+ 7.9		16 9			+ 12.8
	17 10			+ 7.7		16 38			+ 12.7
	17 15	+ 12.3	755.60			17 7			+ 12.6
						17 10	+ 17.1	749.40	
Mai 28	13 30	+ 16.4	756.10						
	13 35			+ 18.1					
	14 16			+ 17.2	Juni 24	15 18	+ 17.8	754.80	
	14 56			+ 16.6		15 28			+ 18.8
	15 20			+ 16.25		15 40			+ 18.4
	16 8			+ 15.5		15 52			+ 18.2
	16 25	+ 16.0	756.05	+ 15.4		16 5			+ 18.2
						16 37			+ 17.7
Mai 29	13 28	+ 18.1	753.40	+ 20.3		16 49			+ 17.8
	13 48			+ 20.1		17 10			+ 17.3
	14 23			+ 18.1		17 48			+ 17.0
	14 48	+ 17.8	754.00			18 3			+ 17.1
	14 50			+ 17.9		18 5	+ 17.3	754.60	

1885			mm		1885			mm	
Juli 7	15h 35m	+19°7	757.55		Sept. 2	18h 47m			+10°5
	15 39			+19°4		19 0			+10.3
	16 5			+18.8		19 32			+ 9.6
	16 38			+18.4		19 48			+ 9.3
	17 5			+18.6		20 1			+ 9.0
	17 9	+19.3	757.70			20 40		mm	+ 8.3
						20 45	+14°3	756.40	
Juli 19	16 2	+21.1	753.60						
	16 6			+20.0	Sept. 5	19 42	+16.0	747.80	
	16 38			+18.2		19 46			+12.9
	17 8			+17.3		20 0			+12.7
	17 18			+17.2		20 18			+12.7
	17 49			+16.7		20 34			+13.0
	18 18			+16.6		20 52			+12.7
	18 24	+20.4	754.25			21 27			+12.4
						21 46			+12.0
Juli 21	19 58	+18.9	762.90			21 50	+15.7	748.10	
	20 4			+14.2					
	20 42			+10.9	Sept. 16	18 53	+17.8	757.10	
	20 55			+10.9		19 18			+20.5
	20 58	+18.8	763.35			19 40			+19.8
						19 50			+19.6
Aug. 4	16 35	+19.5	751.15			20 3			+19.8
	16 40			+19.95		20 40			+19.3
	16 55			+19.8		20 55			+19.0
	17 16			+19.2		20 57	+17.7	757.35	
	17 30			+18.7					
	17 47			+17.8					
	18 12			+17.4	Oct. 14	19 52	+14.0	755.95	
	18 15	+19.0	751.55			19 57			+ 6.7
						20 5			+ 6.3
Aug. 5	19 15	+19.0	752.80			20 30			+ 6.1
	19 18			+15.8		20 52			+ 5.7
	19 32			+15.7		20 55	+10.9	756.65	
	20 2			+15.3					
	20 41			+14.65	Nov. 16	21 18	+ 4.5	764.00	
	21 0			+14.6		21 20			— 2.0
	21 17			+14.4		21 37			— 2.3
	21 20	+18.8	752.95			21 54			— 2.4
						22 10			— 2.5
Aug. 16	20 22	+17.0	757.15			22 25			— 2.3
	20 28			+ 8.4		22 50			— 2.9
	20 55			+ 8.4		22 53	+ 4.3	764.50	
	21 9			+ 7.9					
	21 26			+ 7.7	Nov. 17	20 54	+ 3.8	764.10	
	21 40			+ 7.6		20 58			— 1.1
	21 50			+ 8.0		21 11			— 1.0
	21 52	+16.7	756.80			21 26			— 1.4
						21 38			— 1.8
Sept. 2	18 3	+14.9	756.25			21 56			— 1.6
	18 7			+14.9		22 20			— 1.7
	18 30			+14.4		22 24	+ 3.7	763.95	

1885			mm		1886			
Nov. 18	20h 44m	+3°3	754.30		März 30	11h 51m			+ 5°0
	20 49			— 0°9		12 15		mm	+ 5.0
	21 9			— 1.2		12 18	+8°2	757.55	
	21 27			— 1.3					
	21 57			— 1.5	April 1	7 47	+9.6	762.55	
	22 19			— 1.7		7 54			+ 9.4
	23 7			— 1.4		8 4			+ 9.0
	23 10	+3.1	753.75			8 28			+ 8.1
						8 45			+ 6.9
Nov. 19	20 47	+2.9	753.10			8 57			+ 6.5
	20 54			— 1.3		9 24			+ 5.1
	21 3			— 1.6		9 27	+8.9	763.05	
	21 27			— 1.4		10 35			+ 4.6
	21 58			— 1.5		11 2			+ 4.1
	22 21			— 2.1		11 26			+ 3.4
	22 44			— 2.3		11 39			+ 4.0
	22 47	+2.8	754.05			11 42	+8.3	763.50	
Nov. 20	20 48	+3.8	756.20		April 2	8 0	+9.5	759.05	
	20 52			— 1.2		8 5			+11.3
	21 28			— 2.0		8 28			+11.0
						8 45			+11.0
1886						8 56			+10.7
März 25	8 12	+4.0	755.60			9 26			+10.3
	8 29			+ 5.1		9 30	+9.3	758.80	
	8 48			+ 5.2		10 32	+9.0	758.50	
	9 0			+ 5.0		10 34			+ 7.7
	9 28			+ 4.0		10 50			+ 8.5
	9 32	+3.9	755.30			11 0			+ 8.0
						11 15			+ 7.5
März 30	10 29	+8.3	758.00			11 25			+ 7.3
	10 32			+ 4.9		11 36			+ 7.0
	10 53			+ 4.6		11 47			+ 7.1
	11 25			+ 4.5		11 50	+8.9	758.15	

Die Secundenzeichen auf dem Chronographen (HIPP'scher Farbschreiber) wurden von der Uhr TIEDE 336 gegeben und durch Signale nach der Hauptuhr DENCKER XII vor und nach den Beobachtungen controlirt.

Die auf Zeitbestimmungen am Meridiankreis beruhende Zeit von D. XII bedurfte indess noch einer Correction wegen des Längenunterschiedes und etwaiger systematischer Fehler. Herr SCHNAUDER hat deshalb in der Zeit von 1885 Februar 25 bis 1886 April 2 zwölf Zeitbestimmungen für D. XII am Universal-Instrument ausgeführt, und zwar mit Durchgängen in der Nähe des Meridians, wobei das Azimuth des Instruments mit dem Horizontalkreise aus Polarisbeobachtungen abgeleitet wurde.

Aus einer Zusammenstellung dieser Uhrcorrectionen mit jenen, welche aus den einschliessenden, am Meridiankreis durch Herrn Dr. Peter erhaltenen, folgen, findet er:

$$\text{Uhrcorr. D.XII (Univ.-I. — M.-Kr.)} = + 0^s.27 \pm 0^s.04;$$

um diese Grösse sind die dem Uhrbuche entnommenen Correctionen durchgängig geändert worden. Nahezu denselben Betrag erhielt Herr Schnauder noch auf folgende Weise: Vier gelegentliche, simultane Zeitbestimmungen jenes Jahres am Meridiankreise ergaben die Differenz:

$$\text{Uhrcorr. D. XII (S. — P.)} = + 0^s.16;$$

ausserdem ist, wegen der Längendifferenz der beiden Instrumentmeridiane:

$$\text{Uhrcorr. D.XII (U.I. — M. Kr.)} = + 0^s.09. —$$

In der folgenden Tafel sind zusammengestellt: die Correction der Zeitangabe des Chronographenstreifens, ferner unter Niveau der für den Abend abgeleitete Werth eines Niveautheils (vgl. die früheren Bemerkungen), dann die Zahl der Sterne oder genauer der vollen Sätze von Zenithdistanzen. Betreffs der letzten Columne vergleiche die spätere Darstellung.

1885	Corr. der Streifenzeit	Niveau	Sätze	51° 20′
April 16	$+ 27^s.85$	1″.71	4	4″.17
April 19	$+ 3.44$	1.60	8	4.97
Mai 19	$- 0.19$	1.70	2	6.07
Mai 23	$+ 9.39$ bis $16^h 50^m$; von da $+ 15.30$	1.84	9	5.74
Mai 24	$- 6.48$ für * 1 u. 2	1.50	9	5.56
	$- 6.53$ 3 — 6			
	$- 6.58$ 7 — 9			
Mai 28	$+ 36.25 - 0^s.05 [t^h - 14^h.0]$	1.57	10	5.69
Mai 29	$+ 34.95$	1.57	4	5.69
Juni 3	$+ 32.65$	1.42	6	5.90
Juni 5	$+ 19.22 - 0.045 [t - 13.6]$	1.42	13	5.84
Juni 16	$+ 42.04$	1.52	4	5.18
Juni 19	$+ 40.22 - 0.06 [t - 15.0]$	1.56	9	6.37
Juni 24	$+ 4.79 - 0.08 [t - 16.0]$	1.53	9	5.84
Juli 7	$- 0.17 + 0.09 [t - 16.0]$	1.63	6	5.59
Juli 19	$- 15.71$	1.42	5	5.24
Juli 21	$+ 3.09$	1.38	4	4.97

1885	Corr. der Streifenzeit	Niveau	Sätze	51° 20′
Aug. 4	— 10ˢ.78	1″.48	6	5″.61
Aug. 5	— 2.42	1.38	8	5.51
Aug. 16	+ 2.78	1.52	5	5.50
Sept. 2	+ 30.93	1.41	10	5.68
Sept. 5	— 15.83	1.51	8	5.58
Sept. 16	— 7.62	1.50	7	5.14
Oct. 14	— 2.76	1.49	4	5.36
Nov. 16	— 13.06	1.34	6	5.52
Nov. 17	+ 24.43	1.51	6	5.13
Nov. 18	— 6.97	1.38	10	5.26
Nov. 19	— 7.46	1.42	8	5.10
Nov. 20	— 6.95	1.52	3	5.70
1886				
März 25	— 23.94	1.39	4	5.12
März 30	+ 2.02	1.49	8	5.06
April 1	+ 16.96	1.40	12	5.60
April 2	+ 6.11	1.54	12	5.23

Es folgt jetzt die Zusammenstellung der Schnauder'schen Beobachtungen in chronologischer Folge. Hierbei enthält

Columne 1) die Fernrohrlage (West oder Ost),

Columne 2) den zur Einstellung benutzten Faden (oben oder unten),

Columne 3) den Zeitpunkt der Einstellung, wie er von dem Chronographenstreifen abgelesen wurde,

Columne 4) das Mittel aus den beiden Mikroskopen I und II, verbessert wegen periodischer Fehler und Run, aber ohne Theilungscorrection (für die Grade war Mikroskop I massgebend),

Columne 5) 6) 7) die Verbesserung für Niveau und Refraction, sowie die Reduction auf den Meridian,

Columne 8) die Summe der Columnen 3) bis 5).

Die Angaben I, II, III hinter dem Namen des Sternes geben die Gitter an. Der Beobachter benutzte, um die helleren Sterne auf möglichst bequem zu beobachtende Lichtpunkte zu reduciren, mehrere ganz leichte Mullgitter, die lose auf die Objectivfassung gesteckt wurden.

Stand I.

1885 April 16. α Ursae minoris.

W	u	10h	2m	50s.50	39°	30′	48″.40	+ 2″.39	+ 47″.13	— 52′	45″.45	38°	38′ 52″.47
	o		6	6.25		30	54.80	+ 4.74	+ 47.17	— 53	34.03		38 6.65
	o		9	25.74		31	42.02	+ 4.45	+ 47.21	— 54	22.92		38 7.76
	u		12	0.70		33	5.20	+ 4.03	+ 47.23	— 55	0.42		38 53.04
O	u		16	26.97	320	22	52.68	+ 4.54	— 47.28	+ 56	3.87	321	18 10.81
	o		19	38.42		22	53.57	+ 4.45	— 47.32	+ 56	48.73		18 56.43
	o		22	30.70		22	14.70	— 0.26	— 47.35	+ 57	28.53		18 55.62
	u		25	13.92		20	54.53	— 4.54	— 47.39	+ 58	5.76		18 8.36

l Leonis.

O	o	10	34	33.43	40	12	21.40	— 4.74	+ 48.46	— 3	54.57	40	9 13.58
	u		36	4.25		11	38.30	— 4.88	+ 48.39	— 4	23.84		10 0.97
W	o		41	38.32	319	48	30.29	— 4.20	— 48.37	+ 0	2.44	319	47 43.13
	u		44	56.87		47	37.88	+ 0.26	— 48.39	+ 0	8.80		46 58.55

χ Leonis.

W	u	10	50	52.53	346	34	23.50	+ 4.80	— 54.20	+ 4	46.90	346	35 18.00
	o		53	50.00		36	10.95	+ 4.80	— 54.17	+ 0	44.05		35 59.63
O	u		57	16.70	43	20	57.37	— 4.20	+ 54.16	— 0	3.33	43	21 47.00
	o	11	1	54.20		20	27.11	— 0.94	+ 54.19	— 0	18.14		21 2.22

α Ursae minoris.

O	o	11	8	49.79	320	12	48.05	+ 0.60	— 47.76	+ 66	52.98	321	18 53.87
	u		11	33.68		11	33.80	+ 0.51	— 47.79	+ 67	21.46		18 7.98
W	o		15	48.11	39	45	23.75	— 2.57	+ 47.82	— 68	4.53	38	38 4.47
	u		18	55.69		46	39.96	— 4.62	+ 47.84	— 68	35.03		38 54.69

1885 April 19. 30 Hev. Cam.

W	o	10	8	3.40	31	46	25.68	+ 4.32	+ 35.95	— 0	22.06	31	46 43.89
	u		10	58.20		46	59.26	+ 7.36	+ 35.95	— 0	9.99		47 32.58
O	o		17	22.64	328	10	47.22	+ 5.52	— 35.97	+ 0	0.05	328	10 16.82
	u		20	28.20		9	57.31	+ 7.12	— 35.98	+ 0	3.41		9 34.86

l Leonis.

O	o	10	28	22.56	40	15	15.33	— 4.64	+ 49.24	— 6	48.29	40	9 11.64
	u		31	5.25		13	44.06	— 3.60	+ 49.24	— 4	32.58		9 57.09
W	o		34	44.50	319	46	20.52	— 0.96	— 49.18	+ 2	12.83	319	47 43.21
	u		36	55.00		46	35.24	+ 0.80	— 49.17	+ 1	13.20		47 0.07
W	o		46	10.18		48	16.65	— 1.60	— 49.24	+ 0	16.64		47 42.42
	u		48	30.90		46	56.14	— 2.40	— 49.27	+ 0	53.03		46 57.50
O	o		51	14.30	40	10	31.52	— 7.36	+ 49.33	— 2	0.99	40	9 12.50
	u		53	50.88		12	45.21	— 5.84	+ 49.40	— 3	31.97		9 56.80

1885 April 19. χ Leonis.

O	o	10h	57m	13.70	43°	20′	9.94	—	2.88	+	55.17	—	0′	5.94	43° 20′ 56.32
	u		59	36.88		20	54.44	—	2.40	+	55.20	—	0	0.55	21 46.69
W	o	11	2	16.53	316	36	35.66		0.00	—	55.23	+	0	18.34	316 35 58.77
	u		5	42.77		34	48.72	+	1.60	—	55.29	+	1	18.38	35 13.44

α Ursae minoris (I).

W	o	11	14	55.27	39	45	4.69	+	2.72	+	48.77	+	10	25.73	39 56 24.94
	u		17	48.78		46	22.10	+	3.04	+	48.78	+	9	56.85	57 10.77
O	o		21	34.80	320	10	45.20	+	3.60	—	48.80	—	9	20.18	320 0 39.82
	u		23	26.72		9	40.64	+	3.36	—	48.84	—	9	2.43	319 59 52.76

υ Leonis.

O	o	11	28	13.38	51	28	46.37	+	0.40	+	73.53	—	0	12.54	51 29 47.76
	u		30	40.60		29	22.24	+	0.08	+	73.55	—	0	0.20	30 35.67
W	o		35	5.28	308	27	58.72	—	0.46	—	73.60	+	0	25.74	308 27 40.70
	u		37	42.08		26	27.94	+	0.48	—	73.64	+	1	9.62	26 24.40

β Virginis.

W	o	11	42	14.00	311	4	14.17	+	1.04	—	67.13	+	0	9.73	311 3 17.81
	u		45	3.00		3	37.04	+	0.40	—	67.13	+	0	0.22	2 30.53
O	o		49	25.13	48	53	13.04	—	1.60	+	67.15	—	0	36.52	48 53 42.07
	u		52	1.60		54	49.16	—	1.60	+	67.19	—	1	27.74	54 27.01

α Ursae minoris (I).

O	o	11	56	0.28	320	6	2.16	+	2.40	—	48.95	—	4	36.88	320 0 38.73
	u		58	25.66		4	59.39	+	1.92	—	48.96	—	4	20.54	319 59 54.81
W	o	12	1	25.10	39	51	31.99	—	1.08	+	48.97	+	4	1.04	39 56 20.92
	u		4	18.19		52	35.44	+	0.32	+	48.98	+	3	42.93	57 7.67

1885 Mai 19. ε Virginis.

O	o	12	50	27.96	39	44	51.75	+	4.59	+	48.36	—	1	8.12	39 44 36.58
	u		52	24.58		45	3.98	+	5.44	+	48.34	—	0	31.25	45 26.51
W	o		55	58.30	320	15	7.21	—	3.57	—	48.33	+	0	0.67	320 14 15.98
	u		59	4.87		14	8.67	—	4.08	—	48.34	+	0	12.64	13 28.89

43 Hev. Ceph.

W	o	13	5	20.70	42	59	34.62	+	0.26	+	54.20	+	0	20.20	43 0 49.28
	u		8	18.82	43	0	11.59	+	0.17	+	54.20	+	0	31.27	1 37.23
O	o		12	41.70	316	59	46.76	+	10.46	—	54.19	—	0	51.99	316 58 11.04
	u		15	54.80		59	18.18	+	11.73	—	54.18	—	1	10.55	57 25.18

1885 Mai 23. α Serpentis.

O	o	15h	28m	40.49	44°	34′	24.22	+0.18	+57.39	−3′	4.72	44° 32′ 17.07
	u		31	48.80		33	32.94	+0.92	+57.35	−1	28.54	33 2.67
	o		33	56.42		31	56.58	+0.64	+57.33	−0	35.90	32 48.65
	u		35	58.40		32	15.44	+1.66	+57.32	−0	14.02	33 3.40
W	o		41	30.75	345	28	10.40	−9.84	−57.33	+0	15.89	345 27 19.42
	u		44	40.79		26	32.00	−5.52	−57.36	+1	6.92	26 36.04
	o		47	47.80		25	49.87	−4.29	−57.40	+2	30.38	27 21.56
	u		50	4.48		23	39.07	0.00	−57.45	+3	52.94	26 34.56

Gr. 750.

W	o	15	58	2.00	43	23	32.37	+2.48	+55.40	+0	0.95	43 24 30.90
	u	16	0	47.85		24	19.06	+3.31	+55.40	+0	0.01	25 47.48
O	o		5	3.40	346	36	8.70	+2.76	−55.40	−0	3.08	346 35 43.28
	u		7	33.73		35	28.02	+1.01	−55.40	−0	7.28	34 26.65

γ Herculis.

O	o	16	11	4.73	31	54	35.35	+0.09	+36.32	−1	9.85	31 54 1.91
	u		13	28.61		54	36.60	+0.64	+36.30	−0	23.45	54 50.39
W	o		18	0.58	328	6	7.61	−2.85	−36.30	+0	3.59	328 5 32.05
	u		20	43.10		4	49.71	−3.31	−36.31	+0	34.83	4 44.92

Gr. 750.

W	o	16	30	11.28	43	21	28.04	−4.69	+55.40	−2	9.77	43 24 28.22
	u		32	54.40		21	45.82	−2.21	+55.40	−2	34.46	25 42.87
O	o		37	27.12	346	39	27.51	+3.13	−55.40	+3	21.04	346 35 44.50
	u		39	34.52		39	4.22	+2.21	−55.40	+3	44.23	34 27.10

$\varkappa$ Ophiuchi.

O	o	16	43	13.54	41	47	46.22	+1.29	+52.24	−2	23.19	41 46 16.56
	u		46	9.20		47	13.78	+1.84	+52.22	−1	4.36	47 3.48
W	o		54	54.23	348	14	2.66	+0.37	−52.23	+0	15.21	348 13 26.04
	u		57	9.83		12	43.45	−1.10	−52.26	+0	48.22	12 38.34

ε Ursae minoris.

W	o	17	1	11.30	30	52	25.94	−0.28	+35.04	−0	4.09	30 52 56.58
	u		3	27.02		53	19.26	+1.29	+35.02	−0	10.94	53 44.63
O	o		7	29.62	329	6	43.86	+2.94	−35.03	+0	31.54	329 6 43.34
	u		9	54.80		5	42.89	+2.85	−35.04	+0	48.73	5 59.43

α Ophiuchi (III).

O	o	17	22	9.20	38	41	47.20	−1.84	+46.93	−1	39.98	38 40 52.34
	u		25	3.48		41	27.80	−1.76	+46.91	−0	35.78	41 37.17
W	u		35	52.65	321	17	32.39	−3.40	−46.94	+1	20.80	321 18 2.85
	o		38	39.14		16	54.32	−2.39	−46.98	+2	44.51	18 49.46

1885 Mai 23. δ Ursae minoris.

W	o	17h	43m	21.93	35°	16′	50.70	— 3.40	+ 44.48	—	1′	24.86	35° 16′ 3.92
	u		46	16.83		17	45.39	— 1.66	+ 44.46	—	1	6.92	16 48.27
O	o		49	44.17	324	43	31.33	+ 2.30	— 44.44	+	0	48.41	324 43 40.60
	u		52	5.83		42	54.88	+ 2.67	— 44.43	+	0	37.48	42 53.60

72 Ophiuchi.

O	o	17	56	45.69	44	46	25.86	+ 1.84	+ 52.29	—	0	43.94	44 46 36.05
	u		59	3.76		46	44.34	+ 2.02	+ 52.27	—	0	12.45	47 23.48
W	o	18	4	48.40	348	43	39.65	— 1.40	— 52.25	+	0	17.68	348 43 3.98
	u		7	15.60		42	15.70	— 1.84	— 52.26	+	0	56.49	42 18.09

1885 Mai 24. π Bootis pr.

O	o	14	28	55.89	34	25	45.08	+ 0.30	+ 39.65	—	1	28.61	34 24 56.42
	u		30	56.95		25	44.98	— 0.90	+ 39.63	—	0	42.35	25 41.36
W	o		38	34.44	325	35	42.92	— 5.17	— 39.63	+	0	19.98	325 34 48.13
	u		41	26.56		33	35.09	— 6.67	— 39.66	+	1	14.44	34 2.90

α Ursae minoris (I + II).

W	o	14	45	12.35	39	54	35.26	— 6.82	+ 48.30	+	5	37.95	39 57 54.69
	u		47	25.90		52	3.39	— 5.92	+ 48.29	+	5	54.94	58 40.70
O	o		50	38.00	320	8	59.06	+ 2.85	— 48.29	—	6	20.09	320 1 53.53
	u		52	57.22		8	33.48	+ 4.57	— 48.28	—	6	38.82	1 7.95

τ^1 Serpentis.

O	o	15	14	13.38	35	30	16.99	+ 1.95	+ 44.34	—	1	23.70	35 29 37.58
	u		17	12.70		30	3.08	+ 2.70	+ 44.32	—	0	23.70	30 23.40
W	o		24	4.57	324	30	24.68	+ 0.07	— 44.35	+	0	24.51	324 30 7.94
	u		26	53.96		28	43.07	0.00	— 44.39	+	1	20.24	29 21.92

α Ursae minoris (I + II).

W	o	15	34	32.27	39	44	12.94	0.00	+ 48.23	—	65	34.58	38 39 26.59
	u		34	13.33		44	27.40	+ 2.02	+ 48.23	—	65	4.42	40 13.23
O	o		37	13.79	320	16	28.25	+ 8.62	— 48.23	+	64	29.98	321 20 18.62
	u		39	39.46		16	44.03	+ 8.92	— 48.23	+	64	4.78	19 33.50

Gr. 750.

O	o	15	48	38.80	316	36	22.28	+ 7.57	— 54.92	—	0	22.48	316 35 12.75
	u		51	8.80		35	27.64	+ 6.82	— 54.94	—	0	13.84	34 25.72
W	o		55	56.98	43	23	32.45	— 0.22	+ 54.97	+	0	3.49	43 24 30.69
	u		58	38.46		24	19.78	+ 0.75	+ 54.99	+	0	0.70	23 16.22

1885 Mai 24. γ Herculis (I).

W	o	46h	42m	54.50	328°	5′	33.33	+2.47	−36.07	+0′ 36.55	328° 5′ 36.28
	u		44	38.44		5	9.94	+2.40	−36.07	+0 42.43	4 48.40
O	o		49	49.98	84	53	44.80	+3.42	+36.08	−0 44.97	84 54 9.33
	u		24	44.36		55	3.34	+3.85	+36.44	−0 48.24	54 57.08

Gr. 750.

O	o	46	25	44.40	346	37	30.02	+7.87	−55.06	−4 28.42	346 35 44.74
	u		27	24.60		36	58.42	+6.97	−55.04	−4 44.42	34 26.23
W	o		30	34.54	43	24	24.54	+2.92	+55.02	+2 40.83	43 24 30.28
	u		32	42.94		24	49.43	+3.75	+55.00	+2 30.30	25 48.48

49 Herculis.

W	o	46	40	8.30	323	49	20.58	+6.30	−42.60	+4 32.44	323 50 46.42
	u		42	20.34		49	24.20	+5.85	−42.57	+0 42.50	49 29.98
O	o		49	55.22	36	9	8.46	+0.67	+42.54	−0 46.78	36 9 29.89
	u		52	42.30		40	37.44	−0.30	+42.55	−4 3.90	40 45.76

ε Ursae minoris.

O	o	46	56	6.33	329	7	46.40	+4.05	−34.83	+0 4.46	329 6 48.78
	u		58	33.43		6	34.74	+2.25	−34.83	+0 0.40	5 59.23
W	o	47	2	35.56	30	52	34.54	−4.87	+34.83	−0 6.83	30 52 57.64
	u		6	3.42		53	30.45	−0.75	+34.84	−0 20.97	53 43.57

1885 Mai 28. α Ursae minoris (I + II).

W	o	43	38	37.80	39	56	43.78	−2.67	+47,06	+0 22.36	39 57 50.53
	u		40	43.40		57	24.74	−2.67	+47.06	+0 26.67	58 35.77
O	o		44	57.20	320	3	47.93	−8.04	−47.08	−0 36.56	320 4 46.28
	u		47	27.92		2	38.92	−8.74	−47.08	−0 43.46	0 59.97

τ Virginis.

O	o	43	54	47.90	49	12	48.67	+0.74	+65.48	−0 24.98	49 43 29.58
	u		53	43.00		43	43.45	+4.40	+65.48	−0 6.54	44 43.49
W	o		57	47.24	340	46	49.68	+2.20	−65.24	+0 40.64	340 45 57.28
	u	44	0	25.32		45	34.97	+0.74	−65.24	+0 43.69	45 44.43

α Ursae minoris (I).

W	o	44	3	46.47	39	55	47.26	+2.42	+47.44	+4 39.23	39 57 45.72
	u		7	9.38		55	48.77	+5.48	+47.42	+4 53.73	58 34.80
O	o		40	52.85	320	4	44.98	−0.47	−47.42	−2 40.84	320 4 46.58
	u		43	29.27		4	44.55	−2.83	−47.42	−2 23.47	0 58.43

1885 Mai 28. π Bootis pr.

O	o	14h	29m	39.00	34°	25′	1.68	— 0.16	+ 38.65	— 0′	54.06	34°	24′ 46.14
	u		32	38.10		25	2.38	— 0.47	+ 38.65	— 0	9.32		25 31.24
W	o		37	16.10	325	35	9.76	— 2.04	— 38.65	+ 0	13.13	325	34 42.20
	u		40	10.22		33	35.67	— 1.65	— 38.67	+ 1	0.89		33 56.24

α Ursae minoris (I).

W	o	14	44	9.85	39	51	24.73	— 0.94	+ 47.12	+ 5	35.10	39	57 46.04
	u		46	51.65		51	48.12	+ 2.43	+ 47.11	+ 5	55.65		58 33.34
O	o		50	9.47	320	8	46.13	+ 7.46	— 47.10	— 6	21.58	320	1 44.91
	u		52	34.54		8	19.27	+ 7.85	— 47.10	— 6	44.15		0 58.87

τ^1 Serpentis.

O	o	15	12	31.52	35	30	44.01	— 1.57	+ 40.34	— 1	50.22	35	29 29.56
	u		16	9.58		30	6.85	— 3.14	+ 40.32	— 0	28.30		30 15.78
W	o		25	59.84	324	29	23.10	+ 2.59	— 40.35	+ 1	15.74	324	30 1.03
	u		27	51.18		27	44.35	+ 3.38	— 40.37	+ 2	8.74		29 16.10

Gr. 750.

W	o	15	31	9.54	43	24	25.58	+ 1.10	+ 53.44	+ 2	3.76	43	24 23.85
	u		32	54.90		22	29.90	+ 0.63	+ 53.42	+ 1	49.22		25 13.17
O	o		35	21.31	316	37	25.75	+ 2.51	— 53.43	— 1	30.50	316	35 4.33
	u		37	21.98		36	28.16	+ 1.10	— 53.45	— 1	16.11		34 19.40

ε Serpentis.

O	o	15	40	18.72	46	29	32.79	— 1.26	+ 59.60	— 0	29.86	46	30 1.27
	u		43	14.14		29	50.71	— 0.63	+ 59.59	— 0	2.79		30 46.88
W	o		46	18.80	313	30	23.90	— 0.63	— 59.60	+ 0	5.41	313	29 29.08
	u		49	21.52		28	59.94	— 0.24	— 59.63	+ 0	39.41		28 39.48

Gr. 750.

W	o	15	58	51.81	43	23	24.87	+ 1.33	+ 53.51	+ 0	5.76	43	24 25.47
	u		56	0.93		24	13.91	+ 2.35	+ 53.53	+ 0	2.47		25 12.26
O	o	16	1	1.02	316	35	52.35	+ 5.10	— 53.55	— 0	0.54	316	35 3.36
	u		3	44.77		35	10.68	+ 3.92	— 53.56	— 0	1.96		34 19.08

γ Herculis.

O	o	16	9	0.60	31	55	22.02	+ 2.35	+ 35.33	— 1	55.74	31	54 3.96
	u		11	57.20		54	53.99	+ 1.88	+ 35.33	— 0	41.04		54 50.16
W	o		18	36.82	328	5	52.00	+ 0.78	— 35.32	+ 0	11.88	328	5 29.34
	u		20	58.42		4	30.50	+ 0.55	— 35.33	+ 0	48.42		4 43.84

1885 Mai 29. α Ursae minoris (I).

W	o	13h	32m	26.90	39°	56′	46.62	+ 0.24	+ 46.53	+ 0′ 14.78	39° 57′ 45.17
	u		35	7.20		57	34.04	+ 0.24	+ 46.53	+ 0 15.94	58 33.72
O	o		38	49.04	320	2	52.65	+ 0.66	— 46.54	— 0 22.66	320 1 44.11
	u		42	1.62		2	14.69	— 0.34	— 46.54	— 0 29.48	0 58.36

τ Virginis.

O	o	13	49	52.79	49	13	14.62	+ 1.02	+ 64.43	— 0 46.64	49 13 30.43
	u		51	55.97		13	27.72	+ 1.42	+ 64.44	— 0 47.79	14 15.79
W	o		58	36.39	310	46	44.27	+ 1.42	— 64.52	+ 0 18.25	310 45 59.42
	u	14	0	44.53		45	25.49	+ 2.28	— 64.57	+ 0 48.84	45 12.04

α Ursae minoris (I).

W	o	14	5	10.20	39	55	7.46	+ 6.59	+ 46.69	+ 1 44.96	39 57 45.70
	u		10	0.60		55	35.02	+ 6.90	+ 46.72	+ 2 6.56	58 35.20
O	o		14	17.28	320	5	0.05	— 1.65	— 46.75	— 2 27.68	320 1 44.02
	u		16	26.32		4	25.99	— 3.62	— 46.77	— 2 38.30	0 57.30

π Bootis pr.

O	o	14	29	25.17	34	25	5.76	+ 4.33	+ 38.39	— 0 59.53	34 24 48.95
	u		32	9.29		25	5.66	+ 3.62	+ 38.38	— 0 14.26	25 33.40
W	o		37	26.27	325	35	4.55	+ 0.72	— 38.39	+ 0 14.72	325 34 44.60
	u		41	1.10		33	14.04	— 0.66	— 38.42	+ 1 21.33	33 56.29

1885 Juni 3. ε Serpentis.

O	o	15	39	12.10	46	29	44.40	+ 6.39	+ 60.49	— 0 48.74	46 29 59.54
	u		41	27.40		29	37.06	+ 5.40	+ 60.48	— 0 16.45	30 46.49
W	o		46	31.48	313	30	22.37	+ 1.56	— 60.48	+ 0 6.37	313 29 29.82
	u		49	19.30		29	6.13	— 0.35	— 66.51	+ 0 37.87	28 43.14

Gr. 750.

W	o	15	55	12.37	43	23	28.72	— 0.64	+ 54.32	+ 0 3.65	43 24 26.05
	u		58	10.31		24	18.50	0.00	+ 54.32	+ 0 0.59	25 13.41
O	o	16	1	32.50	316	35	53.84	+ 3.88	— 54.33	— 0 0.28	316 35 3.06
	u		3	35.30		35	9.03	+ 2.98	— 54.33	— 0 1.72	34 15.96

γ Herculis.

O	o	16	10	18.73	34	54	43.99	— 0.28	+ 35.82	— 1 19.57	34 53 59.96
	u		13	18.33		54	28.40	— 0.85	+ 35.81	— 0 20.19	54 43.17
W	o		18	2.00	328	5	59.35	— 2.13	— 35.82	+ 0 6.25	318 5 27.65
	u		20	23.10		4	46.16	— 3.27	— 35.83	+ 0 35.76	4 42.82

1885 Juni 3. Gr. 750.

W	o	16h	25m	51.12	43°	21′	55.27	— 2.84	+ 54.36	+ 1′	37.42	43° 24′ 24.71
	u		28	37.20		22	20.63	— 2.06	+ 54.36	+ 1	59.54	25 42.47
O	o		32	44.42	346	38	29.03	+ 1.44	— 54.36	— 2	34.39	346 35 4.42
	u		34	47.40		38	3.84	+ 0.71	— 54.36	— 2	54.87	34 48.32

49 Herculis.

O	o	16	39	33.02	36	10	10.94	— 2.84	+ 42.14	— 1	32.54	36 9 47.70
	u		42	42.90		9	54.59	— 3.69	+ 42.12	— 0	26.40	10 6.62
W	o		48	37.20	323	50	45.08	— 6.18	— 42.12	+ 0	10.41	323 50 7.19
	u		51	4.30		49	25.69	— 6.25	— 42.14	+ 0	44.89	49 22.29

ε Ursae minoris.

W	o	16	54	47.97	30	52	25.62	— 4.47	+ 34.49	— 0	2.09	30 52 53.55
	u		57	4.84		53	10.31	— 3.05	+ 34.50	— 0	0.02	53 44.74
O	o		59	53.19	329	7	3.51	+ 2.70	— 34.50	+ 0	2.09	329 6 33.80
	u	17	2	36.24		6	10.73	+ 2.98	— 34.50	+ 0	8.94	5 48.15

1885 Juni 5. α Ursae minoris (I).

W	o	13	38	49.20	39	56	44.07	— 4.26	+ 46.52	+ 0	21.98	39 57 45.34
	u		40	39.53		57	23.45	— 3.91	+ 46.52	+ 0	25.72	58 34.78
O	o		43	34.39	320	3	4.15	+ 4.28	— 46.51	— 0	32.25	320 1 48.67
	u		45	44.03		2	18.28	+ 0.14	— 46.51	— 0	37.44	0 54.47

τ Virginis.

O	o	13	50	0.80	49	13	16.91	— 2.70	+ 64.34	— 0	48.90	49 13 29.65
	u		51	58.61		13	32.53	— 2.48	+ 64.33	— 0	20.21	14 14.17
W	o		58	38.22	340	46	48.26	0.00	— 64.33	+ 0	15.82	340 45 59.75
	u	14	1	6.40		45	28.81	— 1.21	— 64.35	+ 0	50.81	45 14.06

α Ursae minoris (I).

W	o	14	4	12.70	39	55	22.62	— 1.21	+ 46.49	+ 1	39.48	39 57 47.38
	u		6	48.53		55	54.46	+ 1.42	+ 46.49	+ 1	50.54	58 32.91
O	o		10	9.19	320	4	30.58	+ 3.83	— 46.49	— 2	5.61	320 1 42.31
	u		12	21.53		3	54.29	+ 3.19	— 46.50	— 2	46.07	0 54.91

π Bootis pr.

O	o	14	29	1.97	34	25	22.88	— 1.28	+ 38.23	— 1	14.84	34 24 44.99
	u		31	48.33		25	15.04	— 1.99	+ 38.22	— 0	21.69	25 29.58
W	o		38	26.28	325	34	55.21	+ 0.07	— 38.28	+ 0	24.00	325 34 41.00
	u		41	34.80		33	8.42	— 2.27	— 38.31	+ 1	27.47	33 55.31

1885 Juni 5. α Ursae minoris (I).

W	o	14h	44m	50.87	39°	54′	21.07	— 0.50	+ 46.67	— 5′	37.44	39°	57′	44.65
	u		47	2.60		51	49.93	+ 2.06	+ 46.67	— 5	54.45		58	32.84
O	o		50	24.95	320	8	44.82	+ 4.26	— 46.68	+ 6	20.64	320	4	41.76
	u		52	38.10		8	16.84	+ 3.69	— 46.68	+ 6	38.56		0	55.26

τ^1 Serpentis.

O	o	15	13	54.04	35	30	9.12	— 1.85	+ 39.95	— 1	19.99	35	29	27.23
	u		16	8.40		30	8.76	— 2.13	+ 39.94	— 0	33.10		30	13.47
W	o		23	18.17	324	30	21.74	— 0.71	— 39.96	+ 0	19.88	324	30	0.95
	u		25	24.02		29	0.96	— 1.06	— 39.99	+ 0	55.47		29	15.38

Gr. 750.

W	u	15	28	21.42	43	21	46.89	— 0.78	+ 52.91	+ 2	31.66	43	25	10.68
	o		30	58.87		21	27.14	— 2.13	+ 52.93	+ 2	7.86		24	25.80
O	u		35	2.42	316	36	38.99	+ 2.06	— 52.97	— 1	35.07	316	34	13.04
	o		37	39.47		37	9.07	+ 1.85	— 52.99	— 1	16.47		35	1.46

ε Serpentis.

O	o	15	40	20.14	46	29	36.68	— 1.21	+ 59.10	— 0	33.68	46	30	0.89
	u		42	38.57		29	54.71	— 0.14	+ 59.09	— 0	7.89		30	45.77
W	o		47	5.80	313	30	16.65	+ 0.85	— 59.12	+ 0	8.84	313	29	27.22
	u		49	43.63		29	1.24	+ 0.43	— 59.15	+ 0	40.80		28	43.32

Gr. 750.

W	o	15	52	56.97	43	23	24.04	+ 0.64	+ 53.10	+ 0	8.21	43	24	25.99
	u		55	2.72		24	15.48	+ 0.85	+ 53.14	+ 0	4.24		25	13.38
O	o		58	37.48	316	35	53.68	+ 0.71	— 53.13	— 0	0.47	316	35	0.79
	u	16	1	1.18		35	6.83	+ 0.14	— 53.14	— 0	0.06		34	13.77

γ Herculis.

O	o	16	8	58.87	31	55	33.39	— 2.56	+ 35.06	— 2	5.94	31	53	59.95
	u		10	33.80		55	33.19	— 3.42	+ 35.04	— 1	18.91		54	46.20
W	o		20	6.47	328	5	36.56	+ 0.43	— 35.03	+ 0	27.35	328	5	29.31
	u		22	8.63		4	10.99	— 0.71	— 35.04	+ 1	8.00		4	43.24

Gr. 750.

W	o	16	25	31.08	43	22	2.24	— 1.99	+ 53.13	+ 1	33.20	43	24	26.58
	u		28	22.39		22	25.83	— 1.49	+ 53.12	+ 1	55.58		25	13.04
O	o		31	53.20	316	38	23.66	— 2.06	— 53.11	— 2	26.40	316	35	2.09
	u		33	39.48		37	55.79	— 2.49	— 53.10	— 2	43.32		34	16.88

1885 Juni 5. 49 Herculis.

O	o	16h	39m	43s.57	36°	40′	15″.89	—	3″.69	+ 41″.16	— 1′	33″.94	36° 9′ 19″.45
	u		41	43.46		40	16.30	—	3.55	+ 41.14	— 0	47.08	40 6.94
W	o		49	56.41	323	50	29.04	—	1.14	— 41.15	+ 0	22.80	323 50 9.55
	u		52	43.19		48	54.15	—	1.14	— 41.18	+ 1	15.88	49 24.71

ε Ursae minoris.

W	o	16	56	49.86	80	52	19.28	+	1.70	+ 33.71	— 0	0.18	80 52 54.54
	u		59	8.23		53	3.97	+	3.76	+ 33.71	— 0	0.79	53 40.65
O	o	17	1	56.90	329	6	57.33	+	4.19	— 33.71	+ 0	6.20	329 6 34.01
	u		4	24.88		6	1.04	+	3.83	— 33.72	+ 0	14.92	5 46.07

1885 Juni 16. π Bootis pr.

O	o	14	33	27.70	34	24	7.37	—	2.20	+ 38.94	— 0	2.96	34 24 41.15
	u		36	15.10		24	55.97	—	3.12	+ 38.95	— 0	5.29	25 26.51
W	o		39	41.10	325	34	43.10	—	11.17	— 38.99	+ 0	52.50	325 34 45.44
	u		42	6.10		32	55.88	—	12.08	— 39.02	+ 1	55.04	33 59.32

α Ursae minoris (I).

W	o	14	47	13.70	39	54	4.24	—	1.06	+ 47.54	+ 5	57.32	39 57 48.01
	u		49	13.72		54	32.52	+	2.13	+ 47.53	+ 6	12.98	58 35.15
O	o		52	34.40	320	9	5.65	+	6.54	— 47.54	— 6	39.86	320 1 44.82
	u		55	24.18		8	44.38	+	5.93	— 47.54	— 7	3.36	0 56.44

τ¹ Serpentis.

O	o	15	13	52.00	35	29	52.06	+	2.05	+ 40.68	— 1	11.86	35 29 28.48
	u		16	19.10		29	50.34	+	2.36	+ 40.66	— 0	24.54	30 8.82
W	o		24	15.38	324	30	3.77	+	1.06	— 40.67	+ 0	40.47	324 30 4.63
	u		26	32.58		28	26.15	+	0.76	— 40.68	+ 1	32.55	29 18.78

Gr. 750.

W	o	15	30	54.33	43	24	29.39	+	1.98	+ 53.84	+ 2	5.48	43 24 30.66
	u		32	57.40		22	32.54	+	3.65	+ 53.84	+ 1	48.45	25 18.42
O	o		36	54.13	316	37	8.59	+	7.83	— 53.82	— 1	19.19	316 35 3.41
	u		39	19.03		36	7.22	+	7.14	— 53.82	— 1	3.53	34 17.04

1885 Juni 19. α Ursae minoris (I).

O	o	14	41	25.31	320	7	37.11	+	1.76	— 47.08	— 5	13.17	320 1 44.67
	u		43	52.90		7	10.76	+	3.90	— 47.04	— 5	31.31	0 56.31
W	o		47	1.14	39	54	8.04	—	1.01	+ 47.05	+ 5	55.15	39 57 49.23
	u		49	5.71		54	37.05	+	0.08	+ 47.05	+ 6	11.38	58 35.40

1885 Juni 19. τ^1 Serpentis.

W	o	15h	13m	37.43	324°	29′	26.48	+ 0.86	— 40.32	+ 1′	18.41	324°	30′ 5.48
	u		15	53.69		29	26.28	+ 0.23	— 40.32	+ 0	34.37		29 17.56
O	o		22	4.37	35	28	54.85	+ 3.82	+ 40.32	— 0	10.28	35	29 28.71
	u		24	35.84		30	12.40	+ 6.04	+ 40.35	— 0	46.29		30 12.47

Gr. 750.

O	o	15	28	2.32	346	38	20.24	+ 6.63	— 53.40	— 2	34.74	346	35 1.76
	u		30	26.22		37	13.28	+ 4.60	— 53.42	— 2	9.88		34 14.58
W	o		33	33.84	43	24	49.39	+ 2.34	+ 53.44	+ 1	43.95	43	24 29.12
	u		35	37.42		22	52.36	+ 3.42	+ 53.46	+ 1	28.44		25 17.38

ε Serpentis.

W	o	15	38	29.86	343	29	30.07	+ 3.59	— 59.63	+ 0	59.80	343	29 33.83
	u		40	32.70		29	17.76	+ 2.18	— 59.61	+ 0	25.77		28 46.10
O	o		47	8.30	46	29	9.40	+ 2.10	+ 59.63	— 0	12.13	45	29 59.00
	u		49	36.10		30	28.80	+ 2.42	+ 59.66	— 0	44.61		30 46.27

Gr. 750.

O	o	15	56	50.73	346	35	50.56	+ 4.84	— 53.57	— 0	4.55	346	35 0.28
	u		58	55.80		35	3.77	+ 6.04	— 53.57	— 0	0.20		34 16.04
W	o	16	2	32.89	43	23	34.97	+ 4.24	+ 53.58	+ 0	0.90	43	24 30.66
	u		4	56.93		24	17.44	+ 4.24	+ 53.59	+ 0	3.48		25 18.72

γ Herculis.

W	o	16	9	55.62	328	4	38.09	+ 3.28	— 35.33	+ 1	26.60	328	5 32.64
	u		11	41.03		4	37.56	+ 1.87	— 35.34	+ 0	45.00		4 49.12
O	o		18	52.94	34	53	34.52	+ 3.59	+ 35.30	— 0	15.53	34	53 57.88
	u		21	30.64		55	7.47	+ 4.06	+ 35.33	— 1	4.27		54 45.59

Gr. 750.

O	o	16	25	53.57	316	37	28.44	+ 3.66	— 53.56	— 1	38.42	316	35 0.09
	u		27	54.48		36	58.38	+ 3.42	— 53.56	— 1	54.37		34 13.57
W	o		31	41.40	43	24	12.09	— 3.51	+ 53.54	+ 2	27.49	43	24 29.61
	u		34	15.60		24	33.02	— 1.64	+ 53.53	+ 2	52.48		25 17.39

49 Herculis.

W	o	16	40	42.95	323	49	53.74	— 0.70	— 44.47	+ 1	0.77	323	50 12.34
	u		42	32.00		49	39.09	+ 0.62	— 44.45	+ 0	27.27		49 25.53
O	o		49	0.07	36	8	48.21	+ 4.68	+ 44.45	— 0	15.52	36	9 48.82
	u		52	6.80		10	28.16	+ 2.58	+ 44.48	— 1	9.66		10 2.56

1885 Juni 19. ε Ursae minoris.

O	o	16h	55m	11s.60	329°	6′	59″.78	+3″.28	−33″.94	+0′	1″.34	329°	6′ 30″.43
	u		57	44.18		6	12.29	+4.68	−33.94	+0	0.09		5 43.12
W	o	17	1	35.77	80	52	29.50	+1.25	+33.94	−0	6.22	80	52 58.47
	u		3	40.30		53	20.86	+3.59	+33.95	−0	18.49		53 44.94

Stand II.

1885 Juni 24. Gr. 750.

W	o	15	31	5.22	163	22	47.28	+2.14	+52.82	+2	9.49	163	25 51.73
	u		32	48.78		23	47.13	+2.98	+52.84	+1	54.84		26 37.79
O	o		36	40.46	76	38	43.04	−0.15	−52.88	−1	25.25	76	36 24.76
	u		38	15.48		37	45.85	−0.31	−52.90	−1	14.38		35 38.26

ε Serpentis.

O	o	15	42	4.46	166	30	34.64	−3.06	+58.98	−0	14.83	166	31 15.73
	u		43	56.99		31	5.80	−0.15	+58.97	−0	2.04		32 2.64
W	o		48	0.28	73	31	45.26	−3.37	−58.99	+0	14.80	73	30 57.70
	u		50	28.33		30	26.79	−5.20	−59.02	+0	49.69		30 12.26

Gr. 750.

W	o	15	54	6.84	163	24	56.36	−6.12	+52.97	+0	6.40	163	25 49.64
	u		56	1.55		25	46.66	−6.12	+52.97	+0	3.22		26 36.73
O	o		58	33.49	76	37	25.26	−5.04	−52.98	−0	0.67	76	36 26.57
	u	16	0	15.91		36	38.34	−6.12	−52.98	−0	0.03		35 39.18

γ Herculis.

O	o	16	10	22.38	151	56	8.96	+1.53	+34.92	−1	30.66	151	55 14.75
	u		12	46.72		55	56.08	+3.67	+34.91	−0	35.53		55 58.13
W	o		21	31.78	88	6	41.04	+4.81	−34.94	+0	48.79	88	6 59.70
	u		23	55.86		4	52.90	+4.36	−34.95	+1	54.09		6 13.40

Gr. 750.

W	o	16	27	34.23	163	23	3.62	+6.27	+52.99	+1	46.78	163	25 49.66
	u		29	45.20		23	32.24	+7.03	+52.98	+2	4.81		26 37.06
O	o		33	3.09	76	39	47.36	+5.97	−52.97	−2	34.70	76	36 25.66
	u		34	46.60		39	17.45	+5.20	−52.96	−2	54.62		35 38.07

49 Herculis.

O	o	16	41	15.80	156	10	50.44	+2.75	+41.03	−1	4.74	156	10 32.54
	u		44	9.62		10	49.50	+3.21	+41.04	−0	14.08		11 19.64
W	o		50	12.68	83	51	57.03	+1.68	−41.04	+0	23.21	83	51 40.94
	u		53	14.08		50	19.68	+0.61	−41.05	+1	22.80		50 52.04

1885 Juni 24. ε Ursae minoris.

W	o	16h 57m	0s.84	150° 53′	43″.11	+ 0″.69	+ 33″.60	— 0′	0″.20	150° 54′	17″.20
	u	59	9.79	54	29.87	+ 2.98	+ 33.61	— 0	0.61	55	5.85
O	o	17 2	56.40	89	8 13.74	+ 5.97	— 33.63	+ 0	8.54	89	7 54.62
	u	4	55.60		7 16.74	+ 7.50	— 33.64	+ 0	16.44		7 7.04

α Ophiuchi (I).

O	o	17 24	12.20	158	42 6.63	+ 0.76	+ 45.03	— 0	55.00	158	41 57.42
	u	26	46.50		42 12.56	+ 0.84	+ 45.02	— 0	14.89		42 43.00
W	o	32	35.18	84	20 45.88	— 3.37	— 45.02	+ 0	17.50	84	20 14.99
	u	34	48.40		19 25.55	— 3.90	— 45.04	+ 0	52.53		19 29.14

δ Ursae minoris.

W	o	17 37	23.77	155	18 58.96	— 2.45	+ 39.84	— 2	9.64	155	17 26.74
	u	39	36.69		19 23.55	+ 0.61	+ 39.84	— 1	52.43		18 11.57
O	o	42	35.19	84	43 57.34	+ 0.61	— 39.83	+ 1	31.24	84	44 49.36
	u	Streifen hängen gebl.			43 24.19	+ 0.46	— 39.82				

1885 Juli 7. ε Serpentis.

W	o	15 42	48.38	73	31 47.88	+ 2.12	— 59.03	+ 0	9.07	73	31 0.04
	u	45	7.35		31 11.23	+ 2.52	— 59.03	0	0.00		30 14.72
O	o	48	45.07	166	30 43.47	— 6.76	+ 59.05	— 0	22.13	166	31 13.63
	u	51	30.00		32 13.17	— 4.73	+ 59.09	— 1	8.42		31 59.11

Gr. 750.

O	o	15 55	44.80	76	37 15.58	+ 3.02	— 53.04	— 0	3.84	76	36 21.75
	u	58	6.03		36 26.03	+ 2.36	— 53.04	— 0	4.09		35 34.26
W	o	16 1	17.83	163	24 53.35	+ 4.65	+ 53.05	+ 0	0.03	163	25 54.08
	u	3	32.87		25 38.98	+ 5.70	+ 53.05	+ 0	4.40		26 38.83

γ Herculis.

W	o	16 11	49.09	88	6 34.58	+ 4.73	— 34.97	+ 0	56.27	88	7 0.64
	u	14	46.90		6 36.34	+ 5.38	— 34.95	+ 0	9.72		6 46.46
O	o	20	17.70	154	55 5.11	— 3.02	+ 34.97	— 0	25.39	154	55 11.67
	u	23	44.86		57 7.18	— 1.22	+ 35.00	— 1	42.92		55 58.04

Gr. 750.

O	o	16 28	23.12	76	39 4.07	+ 1.47	— 53.05	— 1	52.32	76	36 20.17
	u	30	47.10		38 39.00	+ 0.65	— 53.05	— 2	12.74		35 33.89
W	o	34	3.70	163	22 42.51	+ 3.94	+ 53.04	+ 2	43.27	163	25 52.73
	u	36	22.40		22 36.37	+ 2.45	+ 53.03	+ 3	6.73		26 38.58

1885 Juli 7. 49 Herculis.

W	o	16h	43m	55s.23	83°	52′	0″.20	+ 8″.50	− 41″.06	+ 0′	47″.69	88°	54′ 40″.38
	u		46	5.48		51	31.84	+ 1.96	− 41.06	+ 0	1.04		50 53.78
O	o		49	17.85	156	10	7.12	− 4.65	+ 41.06	− 0	44.63	156	10 31.90
	u		51	33.74		11	23.24	− 3.42	+ 41.07	− 0	43.79		11 17.07

ε Ursae minoris. p

O	o	16	54	35.88	89	8	19.42	− 0.65	− 33.61	+ 0	3.43	89	7 48.59
	u		57	9.58		7	33.32	+ 2.77	− 33.61	+ 0	0.16		7 2.64
W	o	17	0	18.47	150	53	49.49	+ 1.79	+ 33.61	− 0	1.94	150	54 22.95
	u		2	32.70		54	40.27	+ 3.42	+ 33.61	− 0	7.11		55 10.19

1885 Juli 19. γ Herculis.

W	o	16	10	33.10	88	6	28.88	− 0.43	− 34.67	+ 1	20.65	88	7 14.43
	u		13	1.32		6	37.32	− 2.56	− 34.67	+ 0	28.38		6 28.47
O	o		21	39.04	151	55	40.21	− 2.13	+ 34.73	− 0	55.32	151	55 17.49
	u		24	19.40		57	44.42	− 2.48	+ 34.78	− 2	9.71		56 4.01

Gr. 750.

O	o	16	27	46.10	76	39	6.80	− 0.07	− 52.72	− 1	49.08	76	36 24.93
	u		30	7.38		38	41.98	− 1.85	− 52.74	− 2	8.78		35 38.64
W	o		33	42.47	163	22	23.63	+ 2.27	+ 52.75	+ 2	41.92	163	26 0.57
	u		35	58.32		22	49.07	+ 2.13	+ 52.76	+ 3	4.79		26 48.75

49 Herculis.

W	o	16	42	33.00	83	51	55.03	+ 4.19	− 40.90	+ 0	33.32	83	51 51.64
	u		44	52.55		51	38.87	+ 2.91	− 40.90	+ 0	6.14		51 6.52
O	o		54	3.05	156	11	40.64	+ 7.03	+ 40.98	− 1	50.59	156	10 38.06
	u		56	3.61		13	37.02	+ 6.60	+ 41.02	− 2	58.48		11 26.16

ε Ursae minoris.

O	o	16	58	54.80	89	8	20.73	+ 6.67	− 33.54	+ 0	0.58	89	7 54.44
	u	17	1	7.79		7	29.42	+ 7.17	− 33.55	+ 0	4.10		7 6.84
W	o		3	52.93	150	54	13.37	− 1.68	+ 33.57	− 0	12.87	150	54 32.44
	u		6	11.11		55	8.07	+ 0.28	+ 33.57	− 0	28.98		55 17.94

α Ophiuchi (I).

W	o	17	24	0.71	84	20	14.58	+ 5.68	− 44.97	+ 0	55.16	84	20 30.45
	u		26	19.43		20	7.21	+ 5.11	− 44.97	+ 0	17.88		19 45.23
O	o		32	45.16	158	41	37.76	+ 5.68	+ 44.99	− 0	21.79	158	42 6.64
	u		35	30.77		43	11.58	+ 4.97	+ 45.01	− 1	12.02		42 49.54

1885 Juli 21. 24 Vulpeculae.

W	o	20h	5m	50s.39	92°	59′	30″.68	+ 1″.38	— 29″.64	+ 1′ 29″.25	93°	0′	31″.70
	u		8	33.38		59	48.02	+ 0.90	— 29.59	+ 0 26.92	92	59	46.25
O	o		16	28.60	147	1	36.76	+ 1.10	+ 29.61	— 0 52.38	147	1	15.09
	u		18	24.80		3	15.63	+ 1.45	+ 29.63	— 1 47.99		1	58.72

λ Ursae minoris.

O	o	20	21	9.23	82	23	28.42	+ 2.62	— 44.76	+ 1 2.38	82	23	48.66
	u		23	3.04		22	34.94	+ 3.93	— 44.77	+ 1 8.21		23	2.34
W	o		26	3.00	157	38	37.70	— 6.90	+ 44.77	— 1 17.94	157	37	57.63
	u		28	36.10		39	30.88	— 6.28	+ 44.78	— 1 26.74		38	42.64

α Delphini.

W	o	20	31	3.60	84	12	19.86	— 4.35	— 41.92	+ 0 21.45	84	11	54.74
	u		32	58.19		11	51.39	— 4.00	— 41.91	+ 0 4.01		11	9.49
O	o		36	56.39	155	49	20.16	+ 2.83	+ 41.93	— 0 14.12	155	49	50.80
	u		39	21.91		50	46.06	+ 3.45	+ 41.95	— 0 51.89		50	39.57

76 Draconis.

O	o	20	46	4.20	89	15	19.22	+ 5.11	— 34.60	+ 0 7.91	89	14	57.64
	u		48	20.13		14	36.70	+ 6.35	— 34.59	+ 0 2.29		14	10.75
W	o		51	9.10	150	46	22.04	— 6.42	+ 34.59	— 0 0.01	150	46	50.17
	u		53	30.17		47	9.67	— 5.31	+ 34.59	— 0 2.11		47	36.84

1885 August 4. x Ophiuchi.

W	o	16	45	40.55	78	14	9.43	+ 0.89	— 49.53	+ 1 23.16	78	14	43.95
	u		47	46.79		14	8.32	— 0.15	— 49.51	+ 0 39.51		13	58.17
O	o		58	56.40	161	47	30.30	+ 5.62	+ 49.57	— 1 16.58	161	47	8.94
	u	17	0	56.33		49	8.60	+ 6.81	+ 49.60	— 2 10.95		47	54.06

ε Ursae minoris.

O	o	17	4	3.04	89	7	49.47	+ 2.07	— 33.22	+ 0 14.93	89	7	30.25
	u		5	57.24		6	54.81	+ 1.33	— 33.22	+ 0 20.57		6	43.49
W	o		8	46.18	150	54	12.73	+ 5.33	+ 33.24	— 0 37.63	150	54	13.67
	u		10	42.46		55	13.04	+ 6.96	+ 33.25	— 0 52.35		55	0.90

α Ophiuchi (I).

W	o	17	22	51.68	81	19	18.60	+ 2.07	— 44.54	+ 1 32.66	81	20	8.79
	u		24	44.00		19	18.90	+ 1.92	— 44.54	+ 0 49.51		19	25.79
O	o		32	14.48	158	41	8.09	— 2.81	+ 44.58	— 0 11.22	158	41	38.64
	u		34	33.58		42	27.48	— 4.87	+ 44.62	— 0 43.64		42	24.04

1885 August 4. δ Ursae minoris.

O	o	17h	37m	26s.62	84°	42′	52″.36	−1″.48	−39″.49	+2′	10″.15	84°	44′ 21″.54
	u		39	6.97		42	17.77	+0.74	−39.50	+1	57.02		43 36.03
W	o		42	5.34	155	18	14.40	+5.03	+39.51	−1	35.42	155	17 23.52
	u		43	55.64		18	47.96	+6.44	+39.52	−1	23.15		18 10.77

67 Ophiuchi.

W	o	17	49	52.29	71	38	0.00	+3.55	−62.84	+0	45.04	71	37 45.82
	u		51	54.85		37	41.70	+2.07	−62.84	+0	47.29		36 58.22
O	o		56	57.48	168	23	6.87	+0.74	+62.85	−0	5.57	168	24 4.89
	u		59	20.00		24	43.39	+2.37	+62.87	−0	29.42		24 49.24

54 Heph. Ceph.

O	o	18	1	46.40	78	38	12.33	+4.54	−49.25	−2	58.03	78	34 29.56
	u		4	4.06		37	44.36	+1.48	−49.26	−2	40.20		33 43.38
W	o		7	44.19	161	24	43.73	−2.66	+49.28	+2	17.42	161	27 17.47
	u		9	49.23		25	45.62	−2.66	+49.29	+2	2.92		28 5.44

1885 August 5. 54 Heph. Ceph.

W	o	19	20	37.46	161	24	40.46	+1.38	+49.67	+1	46.49	161	27 18.00
	u		23	1.93		25	42.02	+2.07	+49.67	+2	1.88		28 5.64
O	o		26	42.41	78	37	42.33	+4.55	−49.66	−2	27.35	78	34 29.87
	u		28	44.75		37	41.28	+4.55	−49.65	−2	42.54		33 43.67

γ Aquilae (I).

O	o	19	35	2.79	161	0	27.95	+0.55	+48.99	−1	2.66	161	0 13.93
	u		37	13.69		0	35.52	+1.10	+48.98	−0	24.58		1 1.02
W	o		43	55.60	79	2	6.56	−0.97	−48.99	+0	17.04	79	1 33.64
	u		46	18.70		0	44.88	−2.62	−49.01	+0	54.19		0 46.94

λ Ursae minoris.

W	o	19	50	0.58	157	37	21.61	−0.69	+43.46	−0	3.86	157	38 0.52
	u		52	38.64		38	9.45	+2.48	+43.47	−0	6.08		38 49.32
O	o		55	49.86	82	24	12.48	+6.07	−43.48	+0	9.45	82	23 44.47
	u		58	19.20		23	26.93	+1.52	−43.49	+0	42.60		22 57.56

24 Vulpeculae.

O	o	20	6	24.56	147	1	58.70	−0.55	+28.84	−1	15.74	147	1 14.25
	u		8	36.00		1	59.10	−1.10	+28.79	−0	28.00		1 58.79
W	o		14	29.00	93	0	49.85	−1.52	−28.79	+0	15.74	93	0 35.25
	u		17	19.50	92	59	9.78	−2.48	−28.83	+1	10.90	92	59 49.37

1885 August 5. λ Ursae minoris.

W	o	20h	19m	54.17	157°	38′	17.63	— 1.66	+ 43.56	— 0′	58.68	157°	38′ 0.85
	u		21	59.59		39	7.70	+ 1.31	+ 43.57	— 1	4.92		38 47.66
O	o		24	32.19	82	23	10.80	+ 3.31	— 43.58	+ 1	12.94	82	23 43.47
	u		27	27.85		22	15.21	+ 3.31	— 43.59	+ 1	22.75		22 57.68

α Delphini.

O	o	20	30	35.55	155	49	35.83	+ 1.66	+ 40.80	— 0	29.11	155	49 49.18
	u		32	44.80		49	57.50	+ 1.66	+ 40.80	— 0	5.45		50 34.51
W	o		36	50.86	84	12	29.86	— 1.69	— 40.82	+ 0	12.20	84	11 56.55
	u		38	43.70		11	19.64	— 5.17	— 40.83	+ 0	38.02		11 44.66

76 Draconis.

W	o	20	46	39.40	150	46	28.00	+ 0.97	+ 33.69	— 0	6.40	150	46 56.26
	u		49	6.27		47	7.39	+ 2.55	+ 33.69	— 0	1.26		47 42.37
O	o		52	57.60	89	15	23.18	+ 1.66	— 33.69	+ 0	1.19	89	14 52.84
	u		56	27.90		14	27.90	+ 1.52	— 33.69	+ 0	9.61		14 5.34

α Equulei.

O	o	21	4	42.23	166	33	42.40	— 0.83	+ 59.72	— 0	50.26	166	33 51.03
	u		7	42.50		33	52.43	— 1.10	+ 59.70	— 0	14.75		34 36.28
W	o		12	44.17	73	28	47.21	— 2.55	— 59.71	+ 0	14.11	73	27 56.06
	u		15	14.78		27	29.55	— 4.28	— 59.74	+ 0	43.41		27 8.94

1885 August 16. α Delphini (I).

W	o	20	30	3.40	84	12	3.23	— 5.62	— 44.59	+ 0	36.41	84	11 52.43
	u		32	10.34		11	44.57	— 5.62	— 44.59	+ 0	9.17		11 6.53
O	o		37	57.60	155	49	22.95	+ 3.34	+ 44.59	— 0	27.01	155	49 40.87
	u		40	26.12		50	57.95	+ 4.10	+ 44.61	— 1	15.93		50 27.73

76 Draconis.

O	o	20	44	4.33	89	14	56.73	+ 5.17	— 34.32	+ 0	15.64	89	14 43.22
	u		45	50.70		14	15.12	+ 8.06	— 34.32	+ 0	8.63		13 57.49
W	o		50	42.68	150	46	20.92	— 1.52	+ 34.32	— 0	0.02	150	46 53.70
	u		52	44.94		47	6.78	+ 2.13	+ 34.32	— 0	1.05		47 42.18

α Equulei.

W	o	21	4	33.80	73	28	4.29	+ 2.28	— 60.87	+ 0	51.27	73	27 56.97
	u		6	38.79		27	49.71	+ 0.68	— 60.87	+ 0	19.87		27 9.39
O	o		12	20.70	166	32	53.56	+ 0.76	+ 60.90	— 0	8.62	166	33 46.60
	u		14	29.79		34	4.91	+ 0.61	+ 60.92	— 0	32.81		34 33.63

1885 August 16. 1 Hev. Draconis.

O	o	21h	47m	38.15	73°	12′	4.58	+2.28	−64.50	−0′	1.88	73°	11′ 3.48
	u		49	17.62		11	17.77	+1.98	−64.54	−0	0.32		10 17.92
W	o		21	40.14	166	49	30.97	+0.99	+64.52	+0	0.26	166	50 33.84
	u		23	29.34		50	16.07	+1.85	+64.52	+0	2.24		51 21.65

ε Pegasi (I).

W	o	21	32	10.10	78	1	59.22	+3.12	−52.00	+1	13.58	78	2 23.92
	u		33	58.37		1	49.13	+2.58	−51.98	+0	37.84		1 37.57
O	o		44	48.53	161	58	41.58	+2.20	+51.97	−0	19.27	161	59 16.38
	u		45	0.48	162	0	22.41	+2.89	+51.97	−1	15.57	162	0 1.40

1885 September 2. 51 Heph. Ceph.

W	o	18	11	30.80	161	24	31.36	−0.42	+50.68	+1	45.76	161	27 7.33
	u		14	18.62		25	35.11	−0.35	+50.65	+1	29.24		27 54.65
O	o		17	43.40	78	36	3.72	+2.11	−50.67	−1	10.97	78	34 4.19
	u		20	14.80		35	6.85	+1.20	−50.69	−0	58.84		33 48.55

110 Herculis.

O	o	18	34	23.67	150	54	20.93	+0.14	+34.47	−1	16.41	150	53 39.13
	u		37	1.82		54	11.35	+0.63	+34.47	−0	28.03		54 23.42
W	o		43	21.30	89	7	41.42	−0.56	−34.50	+0	21.75	89	7 28.11
	u		45	14.05		6	22.92	−1.41	−34.52	+0	55.87		6 42.86

λ Ursae minoris.

W	o	18	49	38.78	157	38	35.18	−2.47	+44.50	−1	27.41	157	37 49.80
	u		51	39.60		39	12.92	−1.41	+44.50	−1	20.42		38 35.59
O	o		55	35.38	82	22	50.83	+3.52	−44.51	+1	7.61	82	23 17.45
	u		57	43.50		22	9.86	+4.51	−44.51	+1	1.40		22 30.96

ω Aquilae.

O	o	19	5	30.66	159	57	1.33	+1.41	+48.37	−1	17.60	159	56 33.51
	u		7	55.14		57	1.13	+1.06	+48.36	−0	30.41		57 20.14
W	o		14	27.10	80	5	10.56	+0.07	−48.38	+0	11.74	80	4 33.99
	u		17	20.34		3	43.06	−1.48	−48.41	+0	54.41		3 47.58

51 Heph. Ceph.

W	o	19	21	56.58	161	24	19.78	−2.96	+50.99	+1	57.23	161	27 5.04
	u		23	49.74		24	52.98	−2.82	+50.99	+2	9.76		27 50.91
O	o		26	56.30	78	37	24.72	+2.40	−50.99	−2	34.84	78	34 4.32
	u		29	31.59		36	57.45	+2.40	−50.99	−2	54.47		33 47.39

1885 September 2. γ Aquilae (I).

O	o	19h	36m	45.40	160°	59′	20.35	+ 0.49	+ 50.30	— 0′	23.42	160° 59′	47.62
	u		38	36.69		59	50.76	+ 0.49	+ 50.30	— 0	5.40	161 0	36.15
W	o		42	18.64	79	2	2.62	— 3.24	— 50.32	+ 0	7.26	79 1	16.32
	u		44	37.56		0	50.25	— 4.79	— 50.34	+ 0	34.04	0	29.46

λ Ursae minoris.

W	o	19	49	45.70	157	37	10.76	— 1.41	+ 44.66	— 0	4.39	157 37	49.62
	u		51	54.37		37	57.42	+ 1.27	+ 44.67	— 0	6.27	38	37.09
O	o		54	49.00	82	23	45.90	+ 7.47	— 44.68	+ 0	9.36	82 23	18.05
	u		57	48.30		23	2.22	+ 0.85	— 44.69	+ 0	13.17	22	31.55

24 Vulpeculae.

O	o	20	5	43.40	147	1	38.43	— 2.19	+ 29.61	— 1	19.22	147 0	46.63
	u		8	19.90		1	30.17	— 3.67	+ 29.60	— 0	23.14	1	32.96
W	o		13	32.80	93	0	46.37	— 7.76	— 29.60	+ 0	11.37	93 0	20.38
	u		15	59.56	92	59	22.28	— 9.31	— 29.62	+ 0	51.96	92 59	35.31

λ Ursae minoris.

W	o	20	19	33.37	157	38	1.78	+ 3.38	+ 44.78	— 1	0.32	157 37	49.62
	u		21	29.90		38	53.79	+ 5.43	+ 44.79	— 1	6.19	38	37.82
O	o		23	52.84	82	22	40.60	+ 1.13	— 44.81	+ 1	20.40	82 23	17.32
	u		28	27.00		21	44.87	+ 1.83	— 44.82	+ 1	29.37	22	31.25

α Delphini.

O	o	20	30	54.05	155	48	59.93	+ 0.42	+ 41.95	— 0	17.35	155 49	24.99
	u		32	53.08		49	29.42	— 0.44	+ 41.95	— 0	4.84	50	9.42
W	o		36	17.96	84	12	10.84	+ 0.28	— 41.96	+ 0	12.29	85 11	41.42
	u		38	29.00		10	54.90	— 0.44	— 41.98	+ 0	43.68	10	56.46

1885 September 5. λ Ursae minoris.

W	o	19	48	50.40	157	37	11.54	— 2.11	+ 43.59	— 0	3.48	157 37	49.84
	u		50	42.83		37	57.68	+ 0.60	+ 43.59	— 0	4.58	38	37.29
O	o		53	14.11	82	23	48.70	+ 5.51	— 43.60	+ 0	6.87	82 23	17.48
	u		55	20.20		22	58.41	+ 5.51	— 43.61	+ 0	9.43	22	29.44

24 Vulpeculae.

O	o	20	6	8.93	147	1	40.88	+ 5.66	+ 28.89	— 1	29.39	147 0	46.04
	u		8	50.41		1	25.30	+ 4.83	+ 28.87	— 0	27.39	1	34.61
W	o		13	55.92	93	0	44.78	— 2.57	— 28.86	+ 0	7.58	93 0	20.93
	u		16	8.00	92	59	32.17	— 4.68	— 28.87	+ 0	38.52	92 59	37.14

1885 September 5. λ Ursae minoris.

W	o	20h	20m	46.60	157°	38′	12.13	− 2.87	+ 43.64	− 1′	1.80	157°	37′ 54.40
	u		22	45.24		39	2.27	− 0.60	+ 43.64	− 1	7.87		38 37.44
O	o		25	23.70	82	22	40.73	+ 1.59	− 43.63	+ 1	16.84	82	23 15.03
	u		27	15.70		21	47.37	+ 3.17	− 43.63	+ 1	22.66		22 29.57

α Delphini (I).

O	o	20	30	32.22	155	49	14.61	+ 1.13	+ 40.82	− 0	33.52	155	49 23.04
	u		32	39.40		49	36.49	+ 1.43	+ 40.80	− 0	7.71		50 11.01
W	o		37	16.77	84	12	10.73	− 1.66	− 40.82	+ 0	14.38	84	11 42.63
	u		39	17.68		10	56.82	− 3.70	− 40.83	+ 0	44.32		10 56.61

76 Draconis.

W	o	20	43	27.10	150	46	35.81	− 2.79	+ 33.70	− 0	20.02	150	46 46.70
	u		45	30.77		47	11.59	− 1.51	+ 33.71	− 0	10.84		47 32.95
O	o		48	3.53	89	14	49.54	+ 1.66	− 33.71	+ 0	3.35	89	14 20.84
	u		50	2.79		14	5.46	+ 2.72	− 33.71	+ 0	0.48		13 34.95

α Equulei.

O	o	21	4	28.10	166	33	27.40	+ 2.72	+ 59.78	− 0	59.06	166	33 30.84
	u		6	35.90		33	37.50	+ 2.72	+ 59.77	− 0	24.23		34 15.76
W	o		13	8.70	73	28	27.39	− 1.96	− 59.79	+ 0	12.76	73	27 38.40
	u		15	14.70		27	16.02	− 3.47	− 59.81	+ 0	39.66		26 52.70

1 Hev. Draconis.

W	o	21	17	47.42	166	49	26.39	− 3.47	+ 60.39	+ 0	2.14	166	50 25.45
	u		20	1.50		50	16.06	− 3.02	+ 60.40	+ 0	0.14		51 13.58
O	o		22	42.10	73	11	41.01	+ 1.36	− 60.40	− 0	0.88	73	10 41.09
	u		24	48.35		10	58.66	+ 0.60	− 60.41	− 0	3.87		9 54.98

ε Pegasi (I).

O	o	21	32	44.78	161	59	14.06	− 1.28	+ 51.05	− 1	7.54	161	58 56.29
	u		35	35.74		59	14.87	− 0.15	+ 51.04	− 0	19.24		59 46.52
W	o		41	34.68	78	2	54.17	− 7.02	− 51.04	+ 0	13.41	78	2 9.52
	u		44	18.10		1	27.39	− 6.49	− 51.04	+ 0	53.65		1 23.54

1885 September 16. 54 Heph. Ceph.

O	o	19	21	29.39	78	36	20.38	+ 5.85	− 49.19	− 1	49.53	78	38 47.54
	u		23	24.28		35	47.20	+ 4.43	− 49.20	− 2	1.86		33 0.57
W	o		25	56.37	161	23	45.27	− 0.37	+ 49.20	+ 2	19.17	161	26 58.27
	u		28	22.08		24	14.06	− 1.43	+ 49.21	+ 2	36.84		27 38.68

1885 September 16. γ Aquilae (I).

W	o	19h	35m	24.50	79°	0′	54.″11	+ 0.″37	— 48.″56	+ 0′	56.″76	79°	1′ 2.″68
	u		37	18.10		0	41.14	+ 0.07	— 48.56	+ 0	24.67		0 17.32
O	o		43	35.92	160	58	58.71	+ 2.10	+ 48.58	— 0	12.77	160	59 36.62
	u		45	46.90	161	0	15.34	+ 1.43	+ 48.60	— 0	42.69	161	0 22.68

λ Ursae minoris.

O	o	19	54	49.40	82	23	33.66	+ 2.32	— 43.14	+ 0	5.84	82	22 58.74
	u		54	20.14		22	42.20	+ 4.20	— 43.44	+ 0	8.38		22 14.67
W	o		57	54.80	157	37	7.62	— 0.15	+ 43.10	— 0	12.79	157	37 37.78
	u		59	38.13		37	56.27	+ 1.05	+ 43.10	— 0	15.24		38 25.18

24 Vulpeculae.

W	o	20	6	45.53	92	59	28.37	+ 0.75	— 28.54	+ 1	8.54	93	0 9.12
	u		8	34.00		59	24.84	+ 0.90	— 28.52	+ 0	30.49	92	59 24.74
O	o		16	22.78	147	0	45.79	+ 1.35	+ 28.54	— 0	46.44	147	0 29.27
	u		18	44.00		2	33.55	+ 3.53	+ 28.56	— 1	50.30		1 15.34

λ Ursae minoris.

O	o	20	21	11.80	82	22	32.53	+ 5.17	— 44.36	+ 1	4.06	82	22 57.40
	u		22	43.19		22	10.94	+ 6.07	— 44.36	+ 1	8.76		22 11.38
W	o		25	7.90	157	38	12.45	— 0.97	+ 44.37	— 1	16.56	157	37 39.29
	u		27	3.11		39	4.10	+ 0.75	+ 44.37	— 1	23.07		38 26.15

α Delphini (I).

W	o	20	30	3.05	84	14	28.53	+ 2.32	— 40.42	+ 0	39.48	84	14 29.91
	u		32	4.96		14	13.17	— 0.30	— 40.40	+ 0	14.59		10 44.06
O	o		37	6.20	155	48	40.19	+ 2.55	+ 40.42	— 0	13.98	155	49 9.18
	u		39	4.10		49	55.83	+ 2.02	+ 40.44	— 0	42.66		49 55.63

76 Draconis.

O	o	20	48	17.89	89	14	12.03	+ 3.30	— 33.37	+ 0	20.00	89	14 1.96
	u		45	15.48		13	33.06	+ 4.95	— 33.37	+ 0	11.21		13 15.85
W	o		48	20.79	150	46	3.30	— 0.60	+ 33.37	— 0	2.49	150	46 34.58
	u		50	13.87		46	47.32	+ 0.90	+ 33.38	— 0	0.25		47 21.35

Stand III.

1885 October 14. 24 Vulpeculae.

O	o	20	6	18.27	267	1	59.76	+ 0.30	+ 29.89	— 1	18.34	267	1 11.64
	u		9	5.20		1	49.00	— 0.30	+ 29.87	— 0	20.14		1 58.43
W	o		14	39.30	213	1	4.07	— 1.49	— 29.88	+ 0	18.04	213	0 50.74
	u		16	34.97	212	59	42.32	— 1.49	— 29.89	+ 0	52.86		0 3.80

1885 October 14. λ Ursae minoris.

W	o	20h	49m	58.56	277°	38′	44.32	+ 0.74	+ 45.20	— 1′	2.42	277° 38′ 27.84
	u		21	56.42		39	35.31	+ 3.80	+ 45.21	— 1	8.43	39 15.89
O	o		24	55.21	292	23	0.76	+ 7.00	— 45.22	+ 1	18.10	292 23 40.64
	u		26	48.51		22	7.03	+ 7.45	— 45.22	+ 1	24.56	22 53.82

α Delphini (I).

O	o	20	32	12.04	275	49	17.21	+ 3.50	+ 42.33	— 0	9.63	275 49 53.41
	u		33	50.39		49	53.29	+ 3.13	+ 42.33	— 0	0.60	50 38.15
W	o		36	37.62	294	12	11.04	+ 2.94	— 42.34	+ 0	10.16	294 12 11.77
	u		38	20.94		11	35.16	+ 2.68	— 42.35	+ 0	31.75	11 27.24

76 Draconis.

W	o	20	42	11.50	270	47	15.19	+ 3.58	+ 34.97	— 0	25.22	270 47 28.52
	u		44	7.68		47	52.22	+ 5.74	+ 34.98	— 0	15.30	48 17.64
O	o		47	3.07	289	15	2.91	+ 7.30	— 34.98	+ 0	4.99	289 14 40.22
	u		48	53.20		14	21.24	+ 7.45	— 34.98	+ 0	1.40	13 55.11

1885 November 16. ε Pagasi.

O	o	21	32	17.09	284	59	14.55	+ 1.61	+ 54.98	— 1	16.69	284 58 54.45
	u		34	23.32		59	18.89	+ 2.01	+ 54.97	— 0	35.14	59 40.78
W	o		41	12.82	198	2	17.99	+ 3.18	— 54.98	+ 0	10.58	198 2 7.07
	u		43	12.37		1	38.09	+ 2.34	— 54.99	+ 0	35.20	1 20.64

1 Hev. Draconis.

W	o	21	45	43.50	286	47	7.93	+ 1.34	+ 65.03	+ 2	27.23	286 50 41.53
	u		47	41.60		47	29.74	+ 1.74	+ 65.02	+ 2	51.49	51 27.99
O	o		50	13.03	193	14	46.58	+ 4.22	— 65.01	— 3	25.30	193 10 20.49
	u		52	4.33		14	26.83	+ 3.82	— 65.00	— 3	52.07	9 33.58

ϑ Pegasi.

O	o	21	59	29.22	285	41	32.70	+ 1.88	+ 62.62	— 0	45.63	285 41 51.58
	u	22	1	49.34		41	46.54	+ 3.08	+ 62.62	— 0	13.74	42 38.50
W	o		6	51.31	194	20	0.65	+ 3.08	— 62.62	+ 0	8.22	194 19 9.33
	u		8	34.60		18	57.81	+ 3.22	— 62.64	+ 0	26.47	18 24.56

30 Hev. Cam.

W	o	22	12	40.32	285	30	59.08	+ 1.21	+ 62.26	+ 0	4.19	285 32 6.74
	u		14	33.78		31	48.03	+ 2.08	+ 62.26	+ 0	1.42	32 53.79
O	o		17	30.63	194	29	52.05	+ 4.32	— 62.25	— 0	0.02	194 28 54.60
	u		19	20.94		29	7.72	+ 4.49	— 62.25	— 0	0.96	28 9.00

1885 November 16. ζ Pegasi.

O	o	22h	30m	5s.19	284°	6′	4″.45	+1″.94	+53″.36	−1′	4″.04	284°	5′ 55″.74
	u		32	1.03		6	15.39	+2.64	+53.36	−0	29.00		6 42.36
W	o		37	34.33	198	55	52.49	+2.55	−53.37	+0	4.59	198	55 6.26
	u		39	32.30		54	48.87	+1.74	−53.39	+0	23.11		54 20.38

Br. 1508.

W	o	22	42	17.00	290	15	50.29	+0.60	+73.64	+0	24.02	290	17 28.52
	u		44	9.37		16	46.34	+1.67	+73.63	+0	14.74		18 16.35
O	o		46	55.33	189	44	43.37	+6.30	−73.66	−0	5.16	189	43 30.85
	u		48	47.18		43	55.50	+5.69	−73.68	−0	1.48		42 46.03

1885 November 17. α Equulei.

W	o	21	3	58.53	193	27	43.66	+1.96	−64.22	+0	55.26	193	27 36.66
	u		5	59.90		27	28.52	+0.75	−64.19	+0	23.13		26 48.21
O	o		11	39.47	286	32	30.46	−0.68	+64.18	−0	6.42	286	33 27.54
	u		13	36.90		33	36.36	−0.75	+64.20	−0	25.74		34 14.07

1 Hev. Draconis.

O	o	21	16	13.15	193	11	27.84	+0.75	−64.85	−0	3.95	193	10 19.7
	u		18	37.93		10	39.94	+0.53	−64.86	−0	0.65		9 34.9
W	o		21	13.90	286	49	37.74	−2.19	+64.88	+0	0.21	286	50 40.6
	u		23	12.93		50	22.57	−1.13	+64.89	+0	2.05		51 28.3

ε Pegasi (I).

W	o	21	32	46.29	198	2	8.63	+2.19	−54.85	+0	52.74	198	2 8.71
	u		34	33.08		1	52.25	+2.57	−54.84	+0	23.70		1 23.68
O	o		40	21.63	281	58	10.44	−0.15	+54.86	−0	8.68	281	58 56.47
	u		42	13.85		59	16.96	+0.60	+54.87	−0	29.83		59 42.60

1 Hev. Draconis.

O	o	21	46	27.42	193	14	7.67	+2.26	−64.87	−2	43.72	193	10 21.34
	u		48	20.28		13	45.78	+2.49	−64.85	−3	8.68		9 35.34
W	o		51	28.40	286	45	44.20	+0.30	+64.82	+3	52.42	286	50 41.74
	u		53	10.68		46	5.03	+1.36	+64.80	+4	18.50		51 29.69

ϑ Pegasi.

W	o	21	59	10.45	194	19	31.04	+3.85	−62.43	+0	40.30	194	19 12.76
	u	22	1	31.88		19	12.95	+2.72	−62.42	+0	10.76		18 24.04
O	o		5	20.49	285	40	54.45	−0.75	+62.42	−0	2.91	285	41 53.21
	u		7	43.30		42	0.30	−0.30	+62.43	−0	23.19		42 39.24

1885 November 17. 30 Hev. Cam.

O	o	22h 10m	25s.00	194°	30′	3″.11	+1″.36	−62″.06	−0′	7″.77	194°	28′ 54″.64
	u		12	42.07		29	10.48	+0.45	−62.07	−0	8.07	28 5.79
W	o		15	44.20	285	31	4.55	+0.15	+62.07	+0	0.16	285 32 6.93
	u		17	33.30		31	50.47	+0.83	+62.07	+0	0.20	32 58.57

1885 November 18. 76 Draconis.

W	o	20	51	39.80	270	46	22.90	+1.79	+35.77	−0	0.48	270 47 0.28
	u		53	34.00		47	10.83	+3.38	+35.78	−0	2.30	47 47.69
O	o		56	42.50	209	14	29.92	+2.76	−35.78	+0	14.02	209 14 7.92
	u		59	14.67		13	30.14	+2.21	−35.79	+0	22.52	13 19.08

α Equulei.

O	o	21	4	49.40	286	33	13.78	+0.97	+63.41	−0	49.17	286 33 28.99
	u		6	58.50		33	26.75	+1.38	+63.40	−0	17.82	34 13.74
W	o		12	16.80	193	28	27.66	+1.81	−63.40	+0	7.09	193 27 33.16
	u		14	8.70		27	23.20	+2.00	−63.41	+0	25.84	26 47.63

1 Hev. Draconis.

W	o	21	16	58.90	286	49	34.71	+0.83	+64.03	+0	3.51	286 50 43.08
	u		19	12.90		50	24.66	+2.21	+64.04	+0	0.61	51 31.52
O	o		22	37.38	193	11	23.84	+3.45	−64.04	−0	0.78	193 10 22.47
	u		24	43.29		10	39.09	+3.17	−64.04	−0	3.66	9 34.56

ε Pegasi (I).

O	o	21	31	12.95	284	59	43.40	+0.55	+54.12	−1	41.15	284 58 56.92
	u		33	4.58		59	44.93	+0.69	+54.10	−0	57.09	59 42.63
W	o		41	55.77	198	2	41.03	+2.21	+54.09	+0	18.95	198 2 8.10
	u		43	55.23		1	24.61	+1.93	+54.11	+0	49.43	1 24.86

1 Hev. Draconis.

W	o	21	48	4.52	286	46	39.74	+1.03	+63.96	+2	57.66	286 50 42.39
	u		49	50.40		47	3.54	+2.00	+63.95	+3	21.38	51 30.87
O	o		52	47.70	193	15	25.94	+3.31	−63.93	−4	4.43	193 10 20.86
	u		54	34.53		15	7.43	+2.48	−63.92	−4	32.36	9 33.63

ϑ Pegasi.

O	o	22	0	55.45	285	41	12.76	+0.83	+61.60	−0	22.52	285 41 52.67
	u		3	2.60		41	41.78	+1.93	+61.59	−0	3.91	42 41.39
W	o		7	10.60	194	19	55.94	+4.55	−61.60	+0	11.70	194 19 10.59
	u		8	58.43		18	49.62	+4.14	−61.62	+0	33.27	18 25.41

1885 November 18. 30 Hev. Cam.

W	o	22h	44m	34s.43	285°	30′	58″.95	+ 3″.31	+ 61″.25	+ 0′	6″.27	285°	32′ 9″.78
	u		43	23.42		31	49.31	+ 3.45	+ 61.26	+ 0	2.83		32 56.85
O	o		45	38.98	194	29	52.99	+ 4.55	− 61.26	− 0	0.43	194	28 55.85
	u		47	43.30		29	7.43	+ 3.59	− 61.26		0.00		28 9.46

ζ Pegasi.

O	o	22	30	24.61	281	5	55.48	+ 1.93	+ 52.49	− 0	55.11	281	5 54.79
	u		32	6.49		6	43.05	+ 2.90	+ 52.47	− 0	26.32		6 42.10
W	o		36	55.43	198	55	56.45	+ 0.14	− 52.45	+ 0	1.95	198	55 6.09
	u		39	9.60		54	52.62	+ 0.55	− 52.46	+ 0	19.65		54 20.36

Br. 1508.

W	o	22	42	22.08	290	15	55.97	− 0.48	+ 72.30	+ 0	23.02	290	17 30.81
	u		44	8.73		16	54.50	+ 0.41	+ 72.30	+ 0	14.37		18 48.58
O	o		50	3.12	189	44	42.70	+ 1.51	− 72.30	− 0	0.20	189	43 31.71
	u		51	34.20		43	55.76	+ 0.97	− 72.30	− 0	0.15		42 44.17

α Pegasi (I).

O	o	22	54	16.00	276	44	40.67	+ 0.14	+ 44.90	− 0	48.25	276	44 37.46
	u		56	9.83		44	55.32	− 0.97	+ 44.89	− 0	18.27		45 20.97
W	o	23	1	47.71	203	16	55.70	+ 0.41	− 44.88	+ 0	13.39	203	16 24.62
	u		4	4.50		15	37.01	+ 1.17	− 44.89	+ 0	47.22		15 40.51

1885 November 19. 76 Draconis.

O	o	20	53	2.62	209	14	38.59	− 0.50	− 35.78	+ 0	1.48	209	14 3.79
	u		54	34.84		13	49.73	− 0.07	− 35.79	+ 0	4.39		13 18.26
W	o		57	18.79	270	46	37.77	+ 1.28	+ 35.80	− 0	13.42	270	46 58.87
	u		48	58.06		47	29.33	+ 0.35	+ 35.80	− 0	21.27		47 44.21

α Equulei.

W	o	21	5	34.58	193	27	58.60	+ 3.34	− 63.41	+ 0	37.34	193	27 35.87
	u		7	30.82		27	36.48	+ 2.20	− 63.40	+ 0	12.48		26 47.76
O	o		12	57.64	286	32	36.94	+ 0.71	+ 63.40	− 0	12.50	286	33 28.52
	u		14	45.30		33	45.25	+ 1.28	+ 63.41	− 0	34.39		34 15.55

1 Hev. Draconis.

O	o	21	17	53.79	193	11	24.44	+ 3.41	− 64.02	− 0	2.05	193	10 21.78
	u		19	51.05		10	35.64	+ 3.55	− 64.02	− 0	0.23		9 34.91
W	o		22	24.22	286	49	37.87	+ 0.07	+ 64.02	+ 0	1.01	286	50 42.97
	u		24	3.82		50	22.01	+ 1.35	+ 64.02	+ 0	2.51		51 29.89

1885 November 19. ε Pegasi (I).

W	o	21h	34m	53s.10	198°	2′	33″.82	+2″.06	−54″.05	+0′	26″.36	198°	2′ 8″.19
	u		36	24.10		2	5.75	+2.06	−54.05	+0	9.57		1 23.33
O	o		41	20.44	284	58	14.46	+0.99	+54.06	−0	12.60	284	58 56.91
	u		43	10.60		59	23.89	+2.06	+54.07	−0	36.24		59 43.78

1 Hev. Draconis.

O	o	21	45	57.81	193	13	53.04	+3.34	−63.95	−2	34.08	193	10 21.35
	u		47	55.96		13	31.85	+2.84	−63.94	−2	55.67		9 35.07
W	o		50	27.00	286	46	7.80	+2.41	+63.92	+3	29.77	286	50 43.90
	u		52	12.30		46	28.77	+2.27	+63.91	+3	55.34		51 30.29

ϑ Pegasi.

W	o	22	0	34.50	194	19	42.57	+3.69	−61.60	+0	27.17	194	19 14.83
	u		2	37.27		19	18.82	+3.27	−61.60	+0	6.56		18 27.05
O	o		7	10.91	285	41	3.12	+1.28	+61.63	−0	14.68	285	41 54.35
	u		9	24.58		42	16.85	+2.13	+61.66	−0	40.02		42 40.62

30 Hev. Cam.

O	o	22	12	11.91	194	29	58.36	+2.91	−61.30	−0	4.95	194	28 55.02
	u		14	8.46		29	8.84	+2.91	−61.31	−0	1.80		28 8.64
W	o		16	54.64	285	31	5.08	+3.12	+61.33	+0	0.01	285	32 9.34
	u		18	48.50		31	50.99	+2.77	+61.34	+0	0.60		32 55.70
	u		23	54.04		31	40.24	+3.34	+61.35	+0	9.49		32 54.42

ζ Pegasi.

W	o	22	30	37.38	198	55	6.61	+4.12	−52.60	+0	51.07	198	55 9.20
	u		32	21.79		54	47.34	+3.98	−52.58	+0	22.93		54 21.67
O	o		38	22.70	284	5	13.93	+1.99	+52.59	−0	11.31	284	5 57.20
	u		40	12.97		6	24.24	+2.41	+52.61	−0	34.26		6 45.00

1885 November 20. 76 Draconis.

W	o	20	53	14.90	270	46	28.11	−0.30	+35.90	−0	1.79	270	47 1.92
	u		55	7.44		47	16.44	+1.06	+35.90	−0	5.83		47 47.57
O	o	20	57	58.35	209	14	21.21	+5.93	−35.92	+0	16.38	209	14 7.60
	u	21	0	11.77		13	23.28	+6.23	−35.93	+0	28.33		13 21.91

α Equulei.

O	o	21	4	57.21	286	33	7.27	+4.56	+63.65	−0	46.81	286	33 28.67
	u		7	11.60		33	23.21	+5.02	+63.64	−0	45.50		34 16.37
W	o		12	8.90	193	28	30.76	+0.68	−63.66	+0	6.22	193	27 34.00
	u		14	27.51		27	20.88	−0.46	−63.69	+0	30.15		26 46.88

1885 November 20. 1 Hev. Draconis.

W	o	24h	17m	43.68	286°	49′	37.35	— 1.98	+ 64.32	+	0′	2.28	286° 50′ 41.97
	u		20	13.75		50	26.22	— 0.53	+ 64.34	+	0	0.08	51 30.11
O	o		22	53.05	193	11	20.27	+ 5.93	— 64.35	—	0	4.02	193 10 20.83
	u		24	52.60		10	38.74	+ 5.32	— 64.36	—	0	3.94	9 35.76

1886 März 25. δ Cancri.

W	o	8	34	1.18	207	15	16.18	+ 4.03	— 37.89	+	0	45.52	207 15 27.84
	u		36	20.30		15	5.78	+ 2.36	— 37.86	+	0	11.22	14 44.50
O	o		42	11.86	272	46	18.57	+ 6.60	+ 37.87	—	0	27.46	272 46 35.58
	u		44	14.80		47	44.38	+ 6.74	+ 37.89	—	1	7.94	47 21.07

76 Draconis.

O	o	8	50	53.55	193	28	43.50	+ 6.25	— 62.06	—	0	0.01	193 27 47.68
	u		53	0.70		27	58.78	+ 5.42	— 62.06	—	0	0.87	27 1.27
W	o		56	26.43	286	33	0.62	+ 0.63	+ 62.07	+	0	6.94	286 34 10.23
	u		58	34.84		33	40.57	+ 0.90	+ 62.07	+	0	13.64	34 57.15

ϑ Hydrae.

W	o	9	5	29.55	191	29	31.72	— 1.95	— 66.60	+	0	18.46	191 28 41.63
	u		7	49.94		29	3.41	— 2.08	— 66.61	+	0	4.70	27 56.42
O	o		12	7.70	288	32	25.55	+ 2.99	+ 66.66	—	0	17.54	288 33 17.66
	u		13	7.21		33	39.64	+ 3.75	+ 66.69	—	0	45.35	34 4.73

1 Hev. Draconis.

O	o	9	17	49.05	209	32	5.55	+ 5.14	— 34.75	+	0	4.00	209 31 39.94
	u		20	11.10		31	22.65	+ 4.93	— 34.75	+	0	0.37	30 53.20
W	o		23	48.15	270	29	51.68	— 1.74	+ 34.77	—	0	2.28	270 30 22.43
	u		26	30.97		30	44.85	— 0.56	+ 34.78	—	0	9.60	31 9.47

1886 März 30. l Leonis.

W	o	10	39	43.49	199	50	19.80	+ 2.23	— 49.87	+	0	23.25	199 49 55.41
	u		41	40.64		49	51.15	+ 1.79	— 49.87	+	0	4.65	49 7.72
O	o		46	7.50	280	11	24.96	— 4.02	+ 49.88	—	0	15.35	280 11 55.47
	u		48	12.28		12	44.00	— 4.25	+ 49.90	—	0	45.66	12 43.99

α Ursae minoris (I).

O	o	10	57	23.20	200	17	50.92	+ 0.30	— 49.10	+	64	20.65	201 21 22.77
	u		59	32.54		16	40.43	— 0.82	— 49.11	+	64	45.00	20 35.00
W	o	11	1	44.20	279	44	50.92	— 3.28	+ 49.12	—	65	9.44	278 40 27.32
	u		3	25.75		45	56.53	— 2.53	+ 49.13	—	65	28.08	41 15.10

1886 März 30. ϑ Leonis.

W	o	11h	5m	35.47	204°	44′	40.13	— 0.89	— 44.80	+	0′	14.41	204° 44′ 14.85
	u		7	28.70		44	7.56	— 1.12	— 44.79	+	0	4.21	43 25.86
O	o		10	57.86	275	17	17.20	— 1.34	+ 44.80	—	0	15.05	275 17 42.64
	u		12	47.73		18	29.85	— 0.74	+ 44.82	—	0	42.18	18 28.75

α Ursae minoris (I).

O	o	11	15	37.40	200	14	35.83	+ 0.60	— 49.18	+	67	35.78	201 21 23.03
	u		17	41.39		13	27.80	+ 0.82	— 49.19	+	67	56.33	20 35.76
W	o		20	34.42	279	48	6.51	— 2.23	+ 49.20	—	68	23.97	278 40 29.51
	u		22	49.74		49	14.50	— 1.34	+ 49.20	—	68	46.00	41 16.36

v Leonis.

W	o	11	27	5.69	188	30	9.17	— 0.22	— 74.24	+	0	25.20	188 29 19.94
	u		28	58.75		29	42.12	— 0.74	— 74.19	+	0	7.08	28 34.27
O	o		33	59.60	291	31	34.77	— 0.82	+ 74.17	—	0	13.07	291 32 32.05
	u		36	57.70		32	58.62	— 1.12	+ 74.19	—	0	53.72	33 17.97

α Ursae minoris (I).

O	o	11	41	31.02	200	10	40.51	+ 1.64	— 49.23	—	6	25.23	200 3 27.69
	u		43	34.20		9	38.69	+ 0.60	— 49.23	—	6	8.96	2 44.10
W	o		46	42.99	279	51	51.20	— 1.64	+ 49.24	+	5	44.69	279 58 23.49
	u		49	0.70		52	55.00	— 1.04	+ 49.24	+	5	27.49	59 10.69

o Virginis.

W	o	11	54	6.92	198	3	3.54	— 0.89	— 53.03	+	0	50.44	198 3 0.06
	u		56	30.76		2	52.94	— 0.60	— 53.01	+	0	15.04	2 14.37
O	o	12	2	11.50	284	58	16.19	— 0.82	+ 53.01	—	0	14.15	284 58 54.23
	u		4	11.02		59	29.27	— 0.82	+ 53.02	—	0	41.49	59 39.98

α Ursae minoris.

O	o	12	6	37.56	200	7	46.40	+ 1.19	— 49.28	—	3	29.73	200 3 28.58
	u		8	22.29		6	48.86	+ 0.82	— 49.29	—	3	19.44	2 40.95
W	o		11	22.30	279	54	35.21	— 2.39	+ 49.30	+	3	2.38	279 58 24.50
	u		13	18.01		55	32.27	— 2.39	+ 49.30	+	2	51.80	59 10.98

1886 April 1. λ Ursae minoris.

W	o	7	53	44.60	279	42	17.20	— 2.80	+ 48.57	+	0	9.34	279 43 12.31
	u		55	40.08		43	0.42	— 1.75	+ 48.57	+	0	11.67	43 58.91
O	o		59	18.28	200	19	48.29	+ 0.07	— 48.57	—	0	16.78	200 18 43.04
	u	8	1	32.38		19	1.67	— 0.14	— 48.58	—	0	20.38	17 55.57

1886 April 1. β Cancri.

O	o	8h	5m	42.80	281°	48′	29.93	— 2.94	+ 52.34	— 0′	34.49	281°	48′	44.84
	u		7	46.37		48	50.38	— 2.94	+ 52.34	— 0	9.53		49	30.45
W	o		13	16.79	198	13	45.27	— 0.98	— 52.38	+ 0	18.76	198	13	10.67
	u		15	30.23		12	25.63	— 2.59	— 52.42	+ 0	53.69		12	24.84

λ Ursae minoris.

W	o	8	18	26.80	279	41	28.24	— 3.99	+ 48.66	+ 0	58.83	279	43	11.74
	u		20	5.80		42	9.79	— 3.01	+ 48.67	+ 1	8.65		43	59.10
O	o		22	59.41	200	20	43.79	+ 0.21	— 48.69	— 1	12.54	200	18	42.77
	u		23	9.11		20	3.51	+ 0.28	— 48.70	— 1	19.56		17	55.53

δ Cancri.

O	o	8	33	1.50	272	46	47.28	— 3.85	+ 37.87	— 0	54.88	272	46	29.42
	u		35	9.94		46	59.58	— 3.99	+ 37.87	— 0	16.53		47	16.93
W	o		39	59.80	207	15	53.81	0.00	— 37.91	+ 0	9.09	207	15	24.99
	u		42	0.20		14	41.55	— 0.42	— 37.95	+ 0	35.78		14	38.96

76 Draconis.

W	o	8	46	46.96	286	33	3.28	— 1.68	+ 62.22	+ 0	3.14	286	34	6.96
	u		49	7.27		33	54.47	— 1.68	+ 62.25	+ 0	0.42		34	55.46
O	o		51	45.30	193	28	47.31	+ 0.70	— 62.27	— 0	0.39	193	27	45.35
	u		53	54.24		28	3.92	— 0.07	— 62.29	— 0	2.75		26	58.84

ϑ Hydrae.

O	o	9	8	39.14	288	32	45.56	— 4.13	+ 66.90	— 0	33.36	288	33	14.97
	u		5	59.79		33	4.17	— 2.80	+ 66.94	— 0	7.72		34	0.56
W	o		11	22.82	191	29	28.26	— 2.10	— 66.99	+ 0	16.85	191	28	36.02
	u		13	38.09		28	12.59	— 2.31	— 67.03	+ 0	48.82		27	52.07

1 Hev. Draconis.

W	o	9	16	31.70	270	29	53.07	— 3.64	+ 34.93	— 0	5.52	270	30	18.84
	u		18	24.44		30	34.06	— 0.84	+ 34.94	— 0	1.56		31	6.60
O	o		20	58.51	209	32	10.77	+ 0.28	— 34.94	+ 0	0.07	209	31	36.18
	u		23	6.62										

l Leonis.

O	o	10	38	49.60	280	11	47.33	— 0.63	+ 50.28	— 0	36.61	280	12	0.37
	u		41	0.40		12	5.52	— 0.56	+ 50.27	— 0	9.45		12	45.78
W	o		45	48.70	199	50	34.78	— 0.91	— 50.29	+ 0	12.17	199	49	52.75
	u		47	58.70		49	18.59	— 0.21	— 50.32	+ 0	40.11		49	8.17

1886 April 1. α Ursae minoris (I).

W	o	10h	52m	26.61	279°	43′	6.39	−2.03	+49.48	−63′	24.47	278° 40′ 29.67
	u		54	53.19		44	20.29	−1.68	+49.51	−63	52.60	44 15.52
O	o		57	37.57	200	17	46.83	+3.08	−49.53	+64	23.99	201 21 24.37
	u		59	44.30		16	37.61	+2.80	−49.55	+64	47.84	20 38.67

ϑ Leonis (I).

O	o	11	3	15.21	275	17	52.89	−0.77	+42.22	−0	50.95	275 17 43.39
	u		5	14.65		18	6.08	−0.42	+42.21	−0	18.44	18 29.43
W	o		10	28.26	204	44	44.28	+0.28	−42.23	+0	10.06	204 44 12.39
	u		12	32.70		43	32.15	−0.84	−42.26	+0	37.64	43 26.69

α^2 Ursae minoris (I).

W	o	11	15	24.04	279	47	16.95	−2.66	+49.72	+10	21.08	279 58 25.09
	u		17	28.14		48	22.90	−2.38	+49.73	+10	0.49	59 10.74
O	o		20	31.60	200	13	46.72	+2.17	−49.76	−9	30.64	200 3 28.49
	u		23	1.50		12	37.38	+0.98	−49.79	−9	6.77	2 41.80

ν Leonis.

O	o	11	26	32.45	291	31	51.33	−1.33	+75.13	−0	32.67	291 32 32.46
	u		29	0.88		32	11.56	−1.40	+75.08	−0	6.86	33 18.38
W	o		33	16.88	188	30	26.67	+0.84	−75.03	+0	7.41	188 29 19.89
	u		35	27.39		29	19.16	−0.84	−75.03	+0	29.64	28 32.93

1886 April 2. β Cancri.

W	o	8	5	50.67	198	13	25.34	+1.92	−51.66	+0	35.14	198 13 10.74
	u		7	47.60		13	5.48	+0.54	−51.65	+0	10.94	12 25.28
O	o		12	50.00	281	48	6.29	−0.92	+51.66	−0	12.16	281 48 44.87
	u		14	44.00		49	16.69	0.00	+51.68	−0	36.56	49 31.81

λ Ursae minoris.

O	o	8	18	7.70	200	20	26.04	+0.38	−47.97	−0	57.36	200 18 41.09
	u		20	9.25		19	47.90	−1.54	−47.97	−1	3.22	17 55.17
W	o		22	48.47	279	41	13.68	−1.62	+47.97	+1	11.33	279 43 11.36
	u		24	42.92		41	55.41	−2.00	+47.97	+1	17.46	43 58.84

δ Cancri.

W	o	8	33	40.48	207	15	19.28	−0.54	−37.24	+0	42.45	207 15 23.95
	u		36	6.30		15	8.35	−0.23	−37.22	+0	8.72	14 39.62
O	o		40	32.74	272	46	6.82	−1.08	+37.22	−0	12.64	272 46 30.32
	u		42	29.12		47	20.70	+0.38	+37.24	−0	40.93	47 17.39

1886 April 2. 76 Draconis.

O	o	8h	46m	34.83	193°	28′	48.48	+1.69	−61.03	−	0′	3.92	193° 27′ 45.22
	u		48	26.72		27	58.98	−0.31	−61.03	−	0	1.12	26 56.52
W	o		51	2.60	286	33	8.36	−2.23	+61.04	+	0	0.04	286 34 7.24
	u		52	55.10		33	54.69	−2.16	+61.05	+	0	1.20	34 54.78

ϑ Hydrae.

W	o	9	4	10.32	191	29	14.80	+0.46	−65.50	+	0	28.54	191 28 38.30
	u		6	9.31		28	49.78	−0.62	−65.49	+	0	7.88	27 54.55
O	o		10	55.64	288	32	22.47	−1.62	+65.51	−	0	10.86	288 33 15.50
	u		12	46.60		33	30.84	−2.31	+65.53	−	0	32.03	34 2.03

1 Hev. Draconis.

O	o	9	15	12.22	209	31	58.28	+0.08	−34.13	+	0	10.43	209 31 34.66
	u		17	16.71		31	16.48	+0.62	−34.13	+	0	4.06	30 47.03
W	o		20	55.39	270	29	49.00	−2.85	+34.13	−	0	0.02	270 30 20.26
	u		22	39.40		30	35.25	−0.46	+34.13	−	0	1.30	31 7.62

l Leonis.

O	o	10	39	27.07	280	11	29.80	−0.08	+49.34	−	0	21.37	280 11 57.69
	u		41	39.51		11	56.97	−0.08	+49.34	−	0	2.59	12 43.61
W	o		45	15.57	199	50	31.62	+1.08	−49.29	+	0	10.95	199 49 54.36
	u		47	0.35		49	23.57	+0.77	−49.28	+	0	32.42	49 7.48

α Ursae minoris (I).

W	o	10	50	43.76	279	42	50.65	−1.46	+48.43	−	63	9.27	279 40 28.35
	u		52	29.40		43	57.83	0.00	+48.45	−	63	29.94	41 16.37
O	o		55	42.77	200	18	0.61	+3.85	−48.50	+	64	7.28	200 21 23.24
	u		57	34.69		16	52.67	+3.62	−48.51	+	64	28.53	20 36.31

ϑ Leonis (I).

O	o	11	4	12.64	275	17	24.99	+1.54	+41.36	−	0	26.70	275 17 41.19
	u		6	21.70		17	49.26	+1.39	+41.35	−	0	4.40	18 27.60
W	o		10	52.15	204	44	34.34	−1.00	−41.38	+	0	18.86	204 44 10.82
	u		12	34.68		43	22.72	−2.00	−41.41	+	0	46.04	43 25.32

α Ursae minoris (I).

W	o	11	15	47.89	279	47	26.09	−1.39	+48.71	+	10	12.92	279 58 26.33
	u		17	31.61		48	29.06	−0.62	+48.73	+	9	55.84	59 12.98
O	o		20	39.43	200	13	37.10	+3.77	−48.76	−	9	25.34	200 3 26.77
	u		22	48.98		12	32.05	+3.23	−48.78	−	9	4.79	2 44.74

1886 April 2. v Leonis.

O	o	11h 26m	54s.87	291° 31′	39″.44	+ 0″.46	+ 73″.60	— 0′	22″.29	291° 32′	31″.21
	u		28 59.19		32 8.22	+ 0.92	+ 73.60	— 0	4.53		33 18.21
W	o		32 56.40	188	30 22.58	+ 2.46	— 73.61	+ 0	7.96	188	29 19.09
	u		34 28.53		29 21.13	+ 2.31	— 73.63	+ 0	22.50		28 32.31

α Ursae minoris.

W	o	11	37 41.50	279	50 42.98	+ 0.46	+ 48.88	+ 6	52.97	279	58 25.29
	u		40 5.90		51 48.90	+ 1.00	+ 48.90	+ 6	33.28		59 12.08
O	o		42 38.31	200	10 26.12	+ 4.54	— 48.90	— 6	12.99	200	3 28.77
	u		44 52.40		9 21.08	+ 3.85	— 48.94	— 5	55.57		2 40.45

Weiter folgt jetzt die Zusammenstellung der Zenithpunkte und Polhöhen. Es enthält

Columne 1) die Angabe des Sternes,

Columne 2) und 3) den Zenithpunkt für den oberen resp. unteren Faden,

Columne 4) die Polhöhe.

Columne 5) und 6) werden später erläutert.

Die Theilungsfehler sind, wie weiterhin immer, in der oben angegebenen Weise berücksichtigt.

Stand I.

1885 April 16.

	359° 58′	359° 58′	51° 20′	51° 20′
α Ursae minoris .	8″.52	54″.51	2″.82	39° 35′ 3″.63
l Leonis	6.18	52.17	6.03	40 12 5.21
χ Leonis	10.15	53.36	5.08	43 24 4.21
α Ursae minoris .	6.35	52.80	2.84	39 48 3.65

April 19.

	359° 58′	359° 58′		
30 Hev. Cam. . .	8″.18	55″.01	4″.48	31° 48′ 5″.15
l Leonis	5.96	50.26	4.87	40 13 4.05
l Leonis	5.11	49.72		
χ Leonis	4.91	52.77	5.04	43 22 4.17
α Ursae minoris .	7.47	55.43	4.27	39 48 5.08
v Leonis	5.92	53.02	6.27	51 31 5.27
β Virginis . . .	6.20	52.31	6.14	48 55 5.18
α Ursae minoris .	6.48	53.32	4.80	39 53 5.61

1885 Mai 19.

	359° 58′	359° 58′	51° 20′		51° 20′
ε Virginis . . .	2.″86	51.″37	5.″84	39° 45′	5.″03
43 Hev. Ceph. .	7.28	54.18	6.26	43 0	7.12

Mai 23.

	359° 59′	0° 0′			
α Serpentis . .	26.″58	11.″61	7.″08	44° 33′	6.″19
Gr. 750	28.81	15.42	4.75	43 24	5.62
γ Herculis . . .	23.73	11.53	5.38	31 55	4.71
Gr. 750	27.70	13.72	6.99	43 21	7.86
κ Ophiuchi . . .	27.51	14.82	7.02	41 47	6.17
ε Ursae minoris ,	28.33	14.30	4.34	30 53	4.99
α Ophiuchi . . .	27.72	13.46	6.67	38 42	5.88
δ Ursae minoris .	28.99	14.46	4.00	35 17	4.73
72 Ophiuchi . .	27.15	13.66	6.31	41 47	5.46

Mai 24.

	359° 59′	0° 0′			
π Bootis pr. . .	29.″91	15.″00	6.″50	34° 26′	5.″78
α Ursae minoris .	31.44	17.24	4.59	39 51	5.40
τ¹ Serpentis . .	29.98	15.88	6.22	35 30	5.48
α Ursae minoris .	30.17	16.05	4.49	39 44	5.30
Gr. 750	28.15	14.53	5.07	43 24	5.94
γ Herculis . . .	29.02	16.96	7.25	31 54	6.58
Gr. 750	28.29	16.63	5.23	43 22	6.10
49 Herculis. . .	30.15	16.30	5.71	36 10	4.96
ε Ursae minoris .	28.76	14.00	3.72	30 53	4.37

Mai 28.

	359° 59′	0° 0′			
α Ursae minoris .	25.″37	11.″14	3.″83	39° 57′	4.″65
τ Virginis . . .	21.75	5.14	6.16	49 14	5.20
α Ursae minoris .	22.04	10.81	4.89	39 56	5.71
π Bootis pr. . .	21.42	6.97	5.18	34 25	4.46
α Ursae minoris .	22.56	9.23	4.96	39 51	5.77
τ¹ Serpentis . .	23.06	8.63	6.33	35 31	5.59
Gr. 750	21.67	8.79	5.15	43 22	6.02
ε Serpentis . . .	20.33	7.94	7.82	46 30	6.90
Gr. 750	22.31	7.85	4.65	43 24	5.52
γ Herculis . . .	24.21	10.06	7.83	31 55	7.16

1885 Mai 29.

	359°59′	0°0′	51°20′		51°20′
α Ursae minoris .	21.″88	9.″03	4.″88	39°57′	5.″70
τ Virginis . . .	21.13	7.50	7.10	49 14	6.14
α Ursae minoris .	21.62	9.73	4.10	39 55	4.92
π Bootis pr. . .	22.87	7.75	6.73	34 25	6.01

Juni 3.

	359°59′	0°0′			
ε Serpentis . . .	21.″30	8.″11	6.″84	46°30′	5.″92
Gr. 750	21.04	8.27	4.91	43 24	5.78
γ Herculis . . .	21.70	5.72	6.79	31 55	6.12
Gr. 750	21.53	8.46	6.40	43 22	7.27
49 Herculis. . .	20.22	7.13	6.35	36 10	5.60
ε Ursae minoris .	21.18	8.10	4.05	30 53	4.70

Juni 5.

	359°59′	0°0′			
α Ursae minoris .	20.″01	7.″84	5.″16	39°57′	5.″98
τ Virginis . . .	21.75	6.86	6.54	49 14	5.58
α Ursae minoris .	21.27	7.73	4.13	39 56	4.95
π Bootis pr. . .	20.40	5.54	6.29	34 26	5.57
α Ursae minoris .	20.07	7.40	4.79	39 52	5.60
τ¹ Serpentis . .	21.53	7.44	6.82	35 30	6.08
Gr. 750	19.44	6.11	5.04	43 22	5.91
ε Serpentis . . .	22.06	6.45	7.99	46 30	7.07
Gr. 750	19.92	7.12	4.35	43 24	5.22
γ Herculis . . .	21.91	8.07	7.62	31 55	6.95
Gr. 750	21.77	7.60	5.39	43 22	6.26
49 Herculis. . .	22.29	8.44	6.27	36 10	5.52
ε Ursae minoris .	20.62	7.66	4.30	30 53	4.95

Juni 16.

	359°59′	0°0′			
π Bootis pr. . .	20.″48	6.″22	4.″17	34°25′	3.″45
α Ursae minoris .	22.34	10.10	5.38	39 51	6.19
τ¹ Serpentis . .	21.33	6.95	4.74	35 30	4.00
Gr. 750	23.87	10.96	6.22	43 23	7.09

Juni 19.

	359°59′	0°0′			
α Ursae minoris .	22.″89	8.″65	4.″38	39°52′	5.″19
τ¹ Serpentis . .	23.36	9.03	7.62	35 30	6.88
Gr. 750	21.89	9.61	6.51	43 22	7.38

	359° 59′	0° 0′	51° 20′		51° 20′
ε Serpentis . . .	22.″51	10.″01	7.″01	46° 30′	6.″09
Gr. 750	23.37	9.54	5.78	43 24	6.65
γ Herculis . . .	23.81	9.42	7.45	31 55	6.78
Gr. 750	21.63	8.78	5.71	43 22	6.58
49 Herculis. . .	22.39	7.67	6.82	36 10	6.07
ε Ursae minoris .	21.13	8.00	4.99	30 53	5.64

Stand II.

1885 Juni 24.	120° 0′	120° 1′			
Gr. 750	45.″05	31.″33	5.″95	43° 23′	5.″93
ε Serpentis . . .	43.95	30.11	6.13	46 30	6.15
Gr. 750	44.45	31.70	7.43	43 24	7.41
γ Herculis . . .	44.46	29.30	5.42	31 55	5.44
Gr. 750	43.91	31.41	6.83	43 22	6.81
49 Herculis . . .	42.54	30.54	4.32	36 10	4.34
ε Ursae minoris .	42.51	30.64	6.39	30 53	6.37
α Ophiuchi . . .	43.47	29.19	5.31	38 41	5.33
δ Ursae minoris .	—	30.75	5.12	35 18	5.10
Juli 7.	**120° 0′**	**120° 1′**			
ε Serpentis . . .	44.″13	29.″53	5.″00	46° 30′	5.″02
Gr. 750	42.71	30.33	6.58	43 24	6.56
γ Herculis . . .	44.45	29.71	5.94	31 54	5.96
Gr. 750	43.36	29.42	5.73	43 22	5.71
49 Herculis. . .	43.10	28.96	5.51	36 9	5.53
ε Ursae minoris .	43.21	29.80	4.81	30 53	4.79
Juli 19.	**120° 0′**	**120° 1′**			
γ Herculis . . .	53.″37	39.″61	4.″24	31° 55′	4.″26
Gr. 750	49.64	36.89	5.17	43 22	5.15
49 Herculis. . .	52.56	39.17	5.18	36 10	5.20
ε Ursae minoris .	50.05	36.60	5.66	30 53	5.64
α Ophiuchi . . .	56.13	40.19	5.62	38 41	5.64
Juli 21.	**120° 0′**	**120° 1′**			
24 Vulpeculae .	31.″18	15.″72	4.″03	27° 1′	4.″05
λ Ursae minoris .	30.19	15.87	5.26	37 38	5.24
α Delphini . . .	30.42	17.43	5.39	35 49	5.41
76 Draconis . .	30.87	17.65	5.18	30 46	5.16

1885 August 4.

	120° 0′	120° 0′	51° 20′		51° 20′
x Ophiuchi . . .	33.″64	19.″10	6.″79	41° 47′	6.″81
ε Ursae minoris .	28.99	15.98	5.67	30 54	5.65
α Ophiuchi . . .	32.40	16.60	4.66	38 41	4.68
δ Ursae minoris .	30.06	16.44	4.60	35 18	4.58
67 Ophiuchi . .	31.45	17.41	5.99	48 23	6.01
51 Hev. Ceph.. .	30.52	17.45	5.99	41 23	5.97

August 5.

	120° 0′	120° 1′			
51 Hev. Ceph.. .	30.″94	17.″86	6.″18	41° 24′	6.″16
γ Aquilae . . .	30.55	17.45	6.35	41 0	6.37
λ Ursae minoris .	29.26	17.12	5.47	37 37	5.45
24 Vulpeculae .	30.32	17.03	5.12	27 1	5.14
λ Ursae minoris .	29.48	15.78	5.59	37 38	5.57
α Delphini . . .	30.70	15.81	5.45	35 49	5.47
76 Draconis . .	31.21	17.76	4.98	30 46	4.96
α Equulei . . .	29.94	16.13	4.97	46 44	4.99

August 16.

	120° 0′	120° 1′			
α Delphini . . .	23.″97	10.″35	6.″02	35° 49′	6.″04
76 Draconis . .	26.00	13.11	5.21	30 46	5.19
α Equulei . . .	27.95	15.25	4.36	46 33	4.38
1 Hev. Draconis .	25.83	12.51	6.04	46 49	6.02
ε Pegasi	27.06	12.75	5.79	41 59	5.81

September 2.

	120° 0′	120° 0′			
51 Heph. Ceph. .	13.″05	59.″53	4.″83	41° 25′	4.″81
110 Herculis . .	11.41	56.18	5.34	30 54	5.36
λ Ursae minoris .	10.60	56.74	5.95	37 38	5.93
ω Aquilae . . .	10.70	57.22	6.81	39 56	6.83
51 Hev. Ceph.. .	11.32	57.72	6.08	41 24	6.06
γ Aquilae . . .	8.51	56.35	5.76	40 59	5.78
λ Ursae minoris .	10.80	57.79	5.92	37 37	5.90
24 Vulpeculae .	11.48	57.18	5.29	27 1	5.31
λ Ursae minoris .	10.65	57.79	5.49	37 38	5.47
α Delphini . . .	10.99	55.69	5.36	35 49	5.38

1885 September 5.

	120° 0′	120° 0′	51° 20′		51° 20′
λ Ursae minoris .	9.″86	57.″60	5.″86	37° 37′	5.″84
24 Vulpeculae .	12.10	56.78	4.67	27 1	4.69
λ Ursae minoris .	10.55	56.45	4.93	37 38	4.91
α Delphini . . .	10.09	57.08	5.31	35 49	5.33
76 Draconis . .	11.23	57.30	4.75	30 46	4.73
α Equulei . . .	11.73	57.04	6.83	46 33	6.85
1 Hev. Draconis .	10.17	57.29	5.45	46 49	5.43
ε Pegasi	9.99	58.11	6.84	41 59	6.86

September 16.

	119° 59′	120° 0′			
51 Hev. Ceph.. .	57.″03	43.″20	5.″54	41° 24′	5.″52
γ Aquilae . . .	57.09	42.80	7.08	40 59	7.10
λ Ursae minoris .	54.94	42.16	5.03	37 37	5.01
24 Vulpeculae .	57.50	42.74	3.95	27 1	3.97
λ Ursae minoris .	55.55	41.99	4.03	37 38	4.01
α Delphini . . .	56.89	43.04	5.56	35 49	5.58
76 Draconis . .	55.62	42.06	4.41	30 46	4.39

Stand III.

October 14.

	240° 0′	240° 1′			
24 Vulpeculae. .	36.″76	23.″64	5.″90	27° 1′	4.″83
λ Ursae minoris .	40.42	27.85	5.44	37 38	6.88
α Delphini . . .	39.82	24.46	6.29	35 49	4.91
76 Draconis . .	41.07	28.18	3.61	30 46	4.82

November 16.

	240° 0′	240° 0′			
ε Pegasi	7.″37	53.″73	6.″87	41° 59′	5.″29
1 Hev. Draconis .	7.66	54.35	4.29	46 46	6.81
ϑ Pegasi	8.11	53.95	6.25	45 41	4.56
30 Hev. Cam. . .	7.90	54.22	4.02	45 31	5.70
ζ Pegasi	7.82	54.10	6.77	41 5	5.22
Br. 1508	7.56	53.89	4.53	50 16	6.34

1885 November 17.					
	240° 0′	240° 0′	51° 20′		51° 20′
α Equulei . . .	7.″96	55.″45	6.″22	46° 33′	4.″51
1 Hev. Draconis .	7.89	54.19	4.51	46 49	6.23
ε Pegasi	9.90	55.48	6.61	41 58	5.03
1 Hev. Draconis .	8.65	55.62	4.38	46 46	6.10
ϑ Pegasi	8.65	56.04	6.07	45 41	4.38
30 Hev. Cam. . .	6.39	54.13	3.33	45 31	5.01
November 18.					
	240° 0′	240° 0′			
76 Draconis . .	8.″93	57.″05	3.″18	30° 46′	4.″39
α Equulei . . .	8.40	53.52	7.43	46 33	5.72
1 Hev. Draconis .	8.93	57.10	3.69	46 49	5.41
ε Pegasi	9.22	55.19	7.27	41 59	5.69
1 Hev. Draconis .	8.11	55.96	3.39	46 46	5.11
ϑ Pegasi	9.08	56.03	6.61	45 41	4.92
30 Hev. Cam. . .	9.65	56.38	3.16	45 31	4.84
ζ Pegasi	7.36	53.88	6.42	41 5	4.87
Br. 1508	7.78	55.43	3.47	50 16	5.28
α Pegasi . . .	8.53	52.34	7.78	36 44	6.37
November 19.					
	240° 0′	240° 0′			
76 Draconis . .	7.″81	53.″25	3.″11	30° 46′	4.″32
α Equulei . . .	8.23	55.80	6.98	46 33	5.26
1 Hev. Draconis .	9.05	55.94	4.11	46 49	5.83
ε Pegasi	9.95	55.81	7.10	41 58	5.52
1 Hev. Draconis .	9.59	55.93	3.71	46 46	5.43
ϑ Pegasi . . .	10.74	56.24	6.06	45 41	4.37
30 Hev. Cam. . .	9.12	55.07	3.35	45 31	5.03
ζ Pegasi	9.22	56.89	6.59	41 5	5.04
November 20.					
	240° 0′	240° 0′			
76 Draconis . .	11.″16	56.″83	3.″33	30° 46′	4.″54
α Equulei . . .	7.86	55.27	7.84	46 33	6.12
1 Hev. Draconis .	8.97	55.58	4.31	46 49	6.03
1886 März 25.					
	240° 0′	240° 1′	51° 20′		
δ Cancri	37.″88	23.″79	7.″22	32° 46′	5.″94
76 Draconis . .	35.84	22.50	3.48	46 32	5.20
ϑ Hydrae . . .	37.24	23.38	6.54	48 32	4.77
1 Hev. Draconis .	37.06	23.95	3.39	30 29	4.59

1886 März 30.

	240° 0′	240° 1′	51° 20′		51° 20′
l Leonis	31.″32	19.″43	5.″72	40° 11′	4.″20
α Ursae minoris .	30.87	18.64	3.74	39 44	5.25
ϑ Leonis	33.71	19.78	7.32	35 17	5.96
α Ursae minoris .	32.34	19.40	3.13	39 47	4.64
v Leonis	33.52	19.31	7.14	51 31	5.19
α Ursae minoris .	32.00	18.90	3.19	39 51	4.70
o Virginis . . .	34.13	19.85	7.56	41 58	5.98
α Ursae minoris .	32.43	19.49	3.05	39 54	4.56

April 1.

	240° 0′	240° 1′			
λ Ursae minoris .	33.″65	20.″67	3.″57	39° 42′	5.″08
β Cancri	34.39	20.38	6.31	41 48	4.73
λ Ursae minoris .	33.34	20.64	3.60	39 44	5.11
δ Cancri	33.53	20.30	6.35	32 46	5.07
76 Draconis. . .	32.97	20.49	4.84	46 32	6.56
ϑ Hydrae . . .	33.72	18.49	7.27	48 32	5.50
1 Hev. Draconis .	—	20.62	4.40	30 29	5.60
l Leonis	34.00	18.99	8.07	40 11	6.55
α Ursae minoris .	33.88	19.65	4.36	39 43	5.87
ϑ Leonis	34.52	20.39	7.51	35 17	6.15
α Ursae minoris .	33.15	19.32	3.81	39 47	5.32
v Leonis	33.05	19.49	7.59	51 31	5.74

April 2.

	240° 0′	240° 1′			
β Cancri	34.″89	21.″09	6.″42	41° 48′	4.″84
λ Ursae minoris .	32.97	19.67	3.33	39 44	4.84
δ Cancri	34.31	20.01	6.85	32 46	5.57
76 Draconis . .	31.95	20.09	4.44	46 32	6.16
ϑ Hydrae . . .	33.72	20.36	7.34	48 32	5.57
1 Hev. Draconis .	32.87	20.37	3.27	30 29	4.47
l Leonis	32.31	18.71	6.67	40 11	5.15
α Ursae minoris .	32.04	19.51	3.61	39 43	5.12
ϑ Leonis	32.73	18.69	7.32	35 17	5.96
α Ursae minoris .	33.73	19.58	2.83	39 47	4.34
v Leonis	32.12	19.01	7.59	51 31	5.74
α Ursae minoris .	32.58	20.13	3.51	39 51	5.02

Jede der resultirenden Polhöhen beruht, wie schon früher erwähnt, auf 4 Einstellungen; Ausnahmen hiervon finden statt bie α Urs. min. 1885 April 16, *l* Leonis April 19 und α Serpentis

Mai 23, von denen je 8, bei δ Urs. min. 1885 Juni 24 und 1 Hev. Drac. 1886 April 1, von denen nur 3 Einstellungen vorhanden sind; bei α Urs. min. und α Serpentis hat Herr SCHNAUDER die Beobachtungen an demselben Faden derselben Kreislage zusammengenommen, bei l Leonis dagegen auseinandergehalten, da im ersten Falle nur ein, im letzteren zwei Lagenwechsel stattfanden; indessen sind vom Verfasser auch in letzterem Falle die beiden resultirenden Breiten zu einem Werthe zusammengezogen worden. Vor der 4. Einstellung von δ Urs. min. blieb der Registrirstreifen hängen und bei 1 Hev. Drac. fehlt aus unbekanntem Grunde die Ablesung der 4. Einstellung.

Obwohl in den ersten drei Fällen den Polhöhen grösseres, in den letzten beiden kleineres Gewicht zukommt, sind doch zur Ableitung des Endwerthes sämmtliche 218 (bei der definitiven Ausgleichung 214) Sternbreiten als gleichwerthig angesehen worden, theils weil einige Pointirungen mehr oder weniger die absolute Genauigkeit der Resultate nur wenig erhöhen oder erniedrigen können, theils wegen der geringen Anzahl der abweichenden Fälle. —

Bei den Zenithpunkten hat der Verfasser kein auffälliges Verhalten entdecken können. —

Die bei der SCHNAUDER'schen Reduction, also ohne Rücksicht auf Theilungsfehler, erhaltenen einzelnen Sternbreiten zeigten auffällige Unterschiede in den 3 Ständen, derart, dass in Stand I und III alle Südsternbreiten grösser werden als alle Nordsternbreiten, während in II (mit einer Ausnahme 1885 Sept. 16) das Umgekehrte der Fall war.

Herr SCHNAUDER hatte jede einzelne Polhöhe in der Form: $\varphi_0 + b \cdot \sin z$, worin φ_0 den von Biegung befreiten Werth der Polhöhe und b die Biegungsconstante bedeutet, angesetzt, und für jeden Abend durch eine einfache Ausgleichung ein φ_0 und ein b erhalten; seine 31 Werthe der b sind:

Stand I.	II.	III.
— 4.″25	+ 2.″89	— 1.″29
— 2.83	+ 2.21	— 1.52
— 1.83	+ 2.45	— 1.42
— 3.36	+ 2.69	— 2.60
— 3.77	+ 1.71	— 2.14
— 3.82	+ 2.14	— 2.86
— 3.99	+ 2.17	— 2.58

Stand	I.	II.	III.
	— 3.″42	+ 2.″05	— 2.″63
	— 3.89	+ 1.50	— 2.25
	— 1.14	+ 1.46	— 2.59
	— 3.60		

Die Beobachtungen desselben Abends wurden mit dem zugehörigen b reducirt und als Endresultat das Mittel aus allen 219 so corrigirten Sternbreiten angesehen, nämlich: $\varphi = 51°\,20'\,5.''48$; da der Pfeiler des Südhäuschens $13.^{m}1$ südlich vom Parallel des Sternwartencentrums liegt, so würde für dieses selbst hieraus hervorgehen: $\Phi = 51°\,20'\,5.''91$. —

Die beiden vom Verfasser ausgeführten Ableitungen eines Endresultates unterscheiden sich untereinander nur dadurch, dass bei der zweiten die erst nach Beendigung der ersten ermittelten Kreistheilungsfehler in Rechnung gezogen wurden, von der Schnauder'schen dagegen in folgenden Punkten: mit Rücksicht auf die verschiedene Anzahl der Sterne (2 bis 13) an den verschiedenen Abenden, auf die Verschiedenheit ihrer Declinationen und auf den Einfluss der Kreistheilungsfehler wurden die Breiten desselben Standes mit Hülfe von Mittelwerthen der Biegungsconstanten reducirt; ferner galt als Tagesresultat nicht das Mittel aus den einzelnen Breiten, sondern es wurden, um nach Möglichkeit constante Unterschiede zwischen den Zenithdistanzen von Nord- und Südsternen zu eliminiren, die beiden Arten von Polhöhen zunächst unter sich gemittelt und dann diese beiden Mittelwerthe wieder zu einem vereinigt; endlich geschah die Ableitung des Endwerthes mit Rücksicht auf die Möglichkeit einer Polhöhenschwankung.

Die eben erwähnten mittleren Biegungsconstanten der einzelnen Stände sind (ohne Rücksicht auf Theilungsfehler):

$$\text{I. } b_1 = -3.''46 \pm 0.''18$$
$$\text{II. } b_1 = +2.11 \pm 0.16$$
$$\text{III. } b_1 = -2.25 \pm 0.13;$$

bei der Mittelbildung erhielt die Constante eines Abends ein Gewicht gleich der Anzahl der an demselben beobachteten Sterne.

Wenn die Zenithdistanzen z in der That durch die Biegung nach der Formel: $b_1 \sin z$ verändert würden, so müsste sich z. B. das z der Mire ($z = 91°5$) um mehr als 5″ beim Uebergange von

Stand I zu II, und um mehr als 4″ beim Uebergange von II zu III ändern. Aus den SCHNAUDER'schen Mirenmessungen ist dies nicht zu ersehen, da zwischen der letzten Beobachtung in II und der ersten in III ein Zeitraum von 11 Tagen liegt und für diese Zeit die Mirenzenithdistanz nicht wohl als constant anzusehen ist.

Die Aenderung der Grösse b_1 von Stand zu Stand könnte vielleicht ihren Grund haben in einer Abhängigkeit der Biegung von der Ablesung etwa infolge inhomogener Beschaffenheit des Metalls, aus dem der Kreis besteht; oder es könnten in ihm selbst Veränderungen dann entstehen, wenn die zum Drehen des Kreises auf der Axe nöthigen Operationen Verspannungen in ihm hervorbrächten; dem näher zu treten, war der Hauptzweck der Controlmessungen, die der Verfasser im Sommer 1890 unternahm; ihre Ergebnisse seien nachstehend mitgetheilt.

Vor Beginn dieser Messungen war der Kreis auf kurze Zeit abgenommen worden, um, wie das ganze Instrument, gereinigt zu werden; sonstige Aenderungen fanden nicht statt.

Die Controlmessungen bestanden aus Mireneinstellungen vor und nach der Vornahme gewisser Manipulationen am Kreise; um etwaige elastische Nachwirkungen sich ausgleichen zu lassen, wurden die nachfolgenden Messungen immer erst am nächsten Tage vorgenommen; dabei wurde die Annahme gemacht, dass die Marke für diese Zwischenzeit genügende Stabilität besitze, um die erwarteten Zenithdistanzdifferenzen von 4″ oder 5″ zeigen zu können. Die Messungen geschahen nach dem Schema:

Marke von unten auf den unteren Horizontalfaden,
» » » » » oberen »
» » oben » » » »
» » » » » unteren »

dies wurde dann in der anderen Kreislage, und hierauf die ganze Beobachtung bei anderem Kreislagenwechsel wiederholt; vor und nach jeder Mikroskopablesung wurde die Stellung der Niveaublase notirt.

Die resultirenden z sind die folgenden, wenn man noch unter z_{mn} versteht, dass z im Sinne m (Marke von oben oder von unten) am Faden n (1 oder 2; bei Fernrohr rechts ist 1 unten) gemessen wurde:

1890	z_{u1}	z_{u2}	z_{o2}	z_{o1}	Mittel
August 8	91° 30′ 35.″10	36.″09	37.″10	37.″41	36.″42
16	37.33	37.03	37.86	37.37	37.40
Sept. 7	36.46	36.73	38.46	38.19	37.46
10	36.36	36.62	37.65	37.73	37.09
11	36.41	36.97	38.08	37.55	37.25
12	36.83	37.26	38.74	38.12	37.99

Hierbei waren die 6 Schrauben des Kreises in gleicher Weise mässig angezogen; nach der letzten Messung nun wurden 3 benachbarte fest angezogen und dann folgende z gemessen:

	z_{u1}	z_{u2}	z_{o2}	z_{o1}	Mittel
Sept. 13	91° 30′ 36.″71	37.″27	37.″80	37.″54	37.″33
15	36.47	37.73	37.63	37.57	37.35

Danach wurden sämmtliche Schrauben gelockert, der Kreis nach einigem Hin- und Herdrehen wieder auf denselben Zenithpunkt gebracht (Stand I) und alle Schrauben gleichmässig angezogen:

	z_{u1}	z_{u2}	z_{o2}	z_{o1}	Mittel
Sept. 16	91° 30′ 37.″45	37.″53	38.″80	38.″55	38.″08
17	37.35	37.72	38.46	38.67	38.05
18	36.88	36.72	38.52	38.19	37.58

Endlich wurde noch der Zenithpunkt um 120° geändert (Stand II):

	z_{u1}	z_{u2}	z_{o2}	z_{o1}	Mittel
Sept. 19	91° 30′ 36.″98	36.″55	38.″26	37.″82	37.″40
20	37.17	37.57	38.08	38.25	37.77

Aus allen diesen Zahlen geht zunächst eine bemerkenswerthe Constanz der Mirenzenithdistanz während der ganzen Zeit hervor; dass die gesuchten Veränderungen durch reelle entsprechende Aenderungen in der Höhe der Mire über dem Boden, wie allerdings denkbar ist, compensirt worden sein sollten, ist unwahrscheinlich; die Messungen sind bei Tageslicht an-

gestellt worden, theils Vor-, theils Nachmittags, theils bei Sonnenschein, theils bei bedecktem Himmel; in Bezug hierauf verrathen sie keine Abhängigkeit; jedenfalls verrathen sich keine Schwankungen, wie sie nach den 3 Constanten b_4 zu erwarten waren. Aus den Messungen von Sept. 17 und 18 würde folgen: $z_I = 91^\circ\ 30'\ 37''.81$, aus Sept. 19 und 20: $z_{II} = 91^\circ\ 30'\ 37''.58$, während den ersten beiden Standbiegungen gemäss ein um mehr als 5″ kleineres z_{II} folgen müsste.

Gerade die beiden ersten Constanten b_4 sind durch die Berücksichtigung der systematischen Theilungsfehler wesentlich verändert worden; man findet auf demselben Wege wie früher:

$$\begin{aligned} \text{Stand I. } b_2 &= -\ 1''.27 \pm 0''.17 \\ \text{II. } b_2 &= +\ 0.03 \pm 0.15 \\ \text{III. } b_2 &= -\ 2.36 \pm 0.12. \end{aligned}$$

Ein Unterschied zwischen den Mirenzenithdistanzen in Stand I und II ist auch hiernach noch vorhanden, es würde sein müssen: $z_I - z_{II} = +\ 1''.30 \pm 0''.23$, während oben folgte: $z_I - z_{II} = +\ 0''.23$, oder bei Mitnahme von Sept. 16, $= +\ 0''.32$. Diese Differenz ist mit einer grösseren Ungenauigkeit behaftet, als die Rechnung ergiebt, und zwar aus dem Grunde, weil die dazu verwendeten Messungssätze in Zwischenzeiten von 12 bis 24 Stunden aufeinander folgen.

Durch diese Verminderung des Biegungsunterschiedes zwischen Stand I und II ist die Bedeutung der Controlmessungen in Bezug auf die Biegung verringert worden; es hat aber, besonders beim Ueberblicken der Messungen zwischen Sept. 5 und 20 den Anschein, als ob das Instrument trotz jener Veränderungen am Kreise, auch bei Standwechsel dieselbe Zenithdistanz liefere. —

Eben diese Verminderung des Biegungsunterschiedes führt zu dem Versuche, durch passend gewählte Coëfficienten a und b einer Formel: $a \cdot \sin 2u + b \cdot \cos 2u$ für Kreistheilungsfehler die Biegungsunterschiede zwischen den 3 Ständen zum Verschwinden zu bringen. Setzt man die gemeinsame Biegung dann in der Form: $\alpha \cdot \sin z$ an, so würde man als Correction einer Ablesung haben: $\alpha \cdot \sin z + a \cdot \sin 2u + b \cdot \cos 2u$ und als Correction einer Zenithdistanz:

$$\delta z = \alpha \cdot \sin z + \{a \cdot \cos(u_0 + u_w) - b \cdot \sin(u_0 + u_w)\} \cdot \sin 2z,$$

wenn u_0 und u_w die Ablesungen für Kreis Ost und Kreis West bezeichnen. Im vorliegenden Falle giebt es bei gleichem z drei

beobachtete δz, die zur Berechnung von α, a und b eben hinreichen; die Coëfficientendeterminante des Systems hat den Werth: $-3 \cdot \sin z \cdot \sin^2 2z \cdot \sin 60^\circ$; daraus ergiebt sich, dass Beobachtungen von Zenithdistanzen, die ganzzahlige Vielfache von 90° sind, keine Werthe für die Unbekannten liefern können, wie umgekehrt aus dem Ausdrucke für δz folgt, dass, wenn keine anderen Ursachen hinzukommen, die Mirenzenithdistanz ($z = 91°5$) bei einem Standwechsel nahezu unverändert bleiben muss. Demnach sind die 3 Biegungsconstanten b_i selbst zur Bestimmung von α, a und b nicht verwendbar, sondern es muss auf Sternbeobachtungen zurückgegangen werden; eine einfache Rechnung für einen Stern mittlerer Zenithdistanz lehrt, dass: $\alpha = -1''20$, $a = -1''44$, $b = +1''61$ sein würde, so dass die Correction einer Ablesung wäre:

$$\delta u = -1''20 \cdot \sin z - 1''44 \cdot \sin 2u + 1''61 \cdot \cos 2u.$$

Eine Aehnlichkeit der von u abhängigen Glieder mit denen der mit Hülfe der Kreistheilungsmaschine gefundenen Interpolationsformel für Durchmessercorrection:

$$-1''425 \cdot \sin 2u + 0''707 \cdot \cos 2u$$

ist nicht zu verkennen; nimmt man dazu noch den Umstand, dass die Controlmessungen nur einen geringen Unterschied zwischen dem z_I und z_{II} der Mire aufgewiesen hatten, und bedenkt, dass jene Theilungsfehleruntersuchung des Verticalkreises 5 Jahre nach Schluss der Schnauder'schen Reihe geschah und zwar in horizontaler Lage desselben, dass endlich von anderer Seite ein Entstehen von Theilungsfehlern bei vorher fehlerfreien Kreisen beobachtet worden ist, so ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Standunterschiede der Schnauder'schen Polhöhen lediglich durch solche Theilungsfehler entstanden sind. Von einer Durchführung dieser Hypothese ist aber abgesehen worden, da die Controlbeobachtungen des Jahres 1890 nicht hinreichen, die Unabhängigkeit der Mirenzenithdistanz vom Standwechsel zu beweisen. Wollte man aus Zenithdistanzmessungen systematische Kreistheilungsfehler bestimmen, so wäre es, jener Coëfficientendeterminante nach, vortheilhaft, noch eine Mire etwa in 45° Zenithdistanz zu beobachten.

Die Reduction einiger, stark abweichender, Abendresultate nach der obigen Formel δu zeigte, dass dieselben sich nur um

wenige Hundertel Bogensecunden änderten, wie zu erwarten war.

Die Schnauder'schen Polhöhen sind demgemäss mit den Standbiegungen b_2 reducirt worden, wie sie nach Anbringung der früher angegebenen Theilungsfehler übrig bleiben; die dazu nöthigen Zenithdistanzen, sowie die corrigirten Polhöhen findet man in der 5. und 6. Columne der Tafel auf Seite 254. —

Die Controlmessungen haben, wenn auch nicht in der eingeschlagenen, so doch in anderer Richtung ein positives Resultat gegeben; bildet man tageweise die Beträge:

$$\tfrac{1}{2}(z_{u1} + z_{u2}) - \tfrac{1}{2}(z_{o1} + z_{o2}) = z_{(u-o)},$$

so findet man:

	$z_{(u-o)}$		$z_{(u-o)}$
Aug. 8	— 1.″66	Sept. 15	— 0.″50
16	— 0.43	16	— 1.18
Sept. 7	— 1.73	17	— 1.09
10	— 1.20	18	— 1.55
11	— 1.12	19	— 1.28
12	— 1.39	20	— 0.79
13	— 0.68		

Bisher wurde stets zuerst bei Kreis rechts, dann bei Kreis links beobachtet und die Mire zuerst von unten, dann von oben auf die Fäden geschraubt. Ein Wechsel in der Kreislagenfolge brachte keine Aenderung:

		z_{u1}	z_{u2}	z_{o2}	z_{o1}	Mittel
Oct. 17	F. r/l	91° 30′ 35.″84	35.″79	36.″87	37.″32	36.″45
	F. l/r	36.51	35.49	37.59	37.42	36.75

wohl aber ein Wechsel in der Drehsinnfolge der Höhenschraube:

		z_{o2}	z_{o1}	z_{u1}	z_{u2}	Mittel
Oct. 21	F. r/l	91° 30′ 35.″41	35.″57	34.″56	34.″12	34.″91
	F. l/r	35.10	34.97	33.90	33.37	34.33

Die $z_{(u-o)}$ dieser beiden Tage sind:

	$z_{(u-o)}$
Oct. 17	— 1.″28
	— 1.50
21	— 1.15
	— 1.40

Hiernach lieferte das Wanschaff'sche Instrument eine im Mittel um 1.″17 grössere Zenithdistanz, falls die letzte Drehung der Höhenschraube derart geschah, dass die Fäden von oben her (im Fernrohr gesehen) mit dem Object zur Deckung gebracht wurden, als bei dem entgegengesetzten Drehsinne. Wahrscheinlich gilt dies auch von Sternbeobachtungen; Herr Schnauder hat nach seiner Erinnerung den dem Ocular zugewandten Schraubenkopf stets so bewegt, dass die letzte Drehung im Uhrzeigersinne geschah; dadurch würden seine Zenithdistanzen von Nord- und Südsternen in gleicher Weise gefälscht sein; bei seiner Breitenbestimmung ist nur in einem Ausnahmefall eine Controle möglich: während er sonst immer, auch an der Marke, nur z_{u_1} und z_{u_2} gemessen hat, finden sich 1885 April 16 bei α Urs. min. alle 4 Zenithdistanzen z_{mn} vor:

$$z_{u_2} = 38^\circ\,39'\,58.''02$$
$$z_{u_1} = \quad\quad 57.92$$
$$z_{o_1} = \quad\quad 59.70$$
$$z_{o_2} = \quad\quad 58.71\ ;$$

man erhält daraus im Mittel, nahe übereinstimmend mit dem obigen:

$$z_{(u-o)} = -1.''23;$$

dieser Umstand begründet mit das oben eingeschlagene Verfahren zur Bildung von Abendmitteln aus den beobachteten Polhöhen. —

Neben dieser Erscheinung seien noch einige andere erwähnt, die den Verdacht aufkommen liessen, dass die Befestigung gewisser Theile des Instrumentes untereinander nicht vollständig einwurfsfrei gewesen sein müsse; so geschah die Bewegung des Mirenbildes nicht ausschliesslich in verticalem Sinne, wenn man begann, die Höhenschraube zu drehen; es war vielmehr auch eine horizontale Componente im Betrage von etwa 2″ vorhanden. Um denselben Winkel oscillirte das Bild, wenn man die Fein-

schraube des auf der Axe reitenden Mikroskopträgers hin und her drehte; weiter kann man nachweisen, dass der Drehsinn der Höhenschraube Einfluss hatte auf die Neigung der Mikroskopenebene: ging man bei demselben Sinne von einem Faden zum anderen über, so blieb die Neigung unverändert; kehrte man aber den Drehsinn um, so zeigten sich Differenzen, und zwar liefern die Messungen des Jahres 1890 folgende Neigungsunterschiede im Sinne: »von unten« minus »von oben«:

F. r.	F. l.
$+1.^{p}77$	$-1.^{p}29$
+1.51	−0.46
+1.74	−0.83
+1.37	−0.77
+1.71	−0.71
+1.55	−0.84
+1.57	−0.52
+1.23	−0.69
+1.58	−0.54
+1.07	−0.85
+1.40	−0.81
+1.51	−0.98
+1.36	−0.89
+1.14	−1.17
+1.56	−1.34
+1.41	−1.11
+2.15	−1.00

Endlich ist noch bemerkenswerth das Verhalten der Vorzeichen der Reste, die man erhält, wenn man mit Hülfe eines mittleren Zenithpunktes und der bekannten Fadendistanz rückwärts einzelne Beobachtungssätze darstellt; den Vorzeichen und Grössen nach fällt sowohl bei den Schnauder'schen Messungen als bei denen des Verfassers eine gewisse Gruppirung auf, die nicht regelmässig wiederkehrt und in nicht ganz durchsichtiger Weise mit der Neigung zusammenzuhängen scheint; der mittlere Betrag dieser Reste ist etwa 1″.

Im Zusammenhang hiermit seien, bevor in der Reduction der Beobachtung weitergegangen wird, noch einige Untersuchungen über die Genauigkeit der Schnauder'schen Beobachtungen mitgetheilt.

Um Aufschluss über die Genauigkeit einer Einstellung zu bekommen, wurde unter Benutzung aller vorhandenen Beobachtungen an der Mire und an Sternen die Distanz der Horizontalfäden ermittelt. Da die Einstellung auf die beiden Fäden in gleichem Sinne geschah, so durfte man erwarten, dass hierbei der Einfluss der oben angeführten, vermutheten Schlotterungen ein verschwindender sei; zu befürchten war noch die Ungenauigkeit des Pointirens auf das Object, des Ablesens der Mikroskope und des Niveaus, eventuell auch der Strichfehler der Kreistheilung.

Die beiden Horizontalfäden selbst sind, wie schon im Anfange dieses Abschnittes erwähnt wurde, nicht gleich stark (bei vorangehendem Fernrohr ist der stärkere Faden unten); ein etwaiger Auffassungsunterschied ist für die Schnauder'schen Breitenbestimmungen selbst ohne Bedeutung, da jeder Stern in beiden Kreislagen, und eine nahezu gleich grosse Zahl von Sternen in jeder der beiden Kreislagenfolgen beobachtet worden ist. Ebenso fällt auch aus den Bestimmungen der Fadendistanz, die Herr Schnauder 1885 April 15/16 ausgeführt hat, der Einfluss eines solchen Fehlers heraus, da am ersten Tage, bei unbeweglichem Instrumente, Durchgänge von α Urs. min. während der westlichen Digression in der einen, am zweiten in der anderen Kreislage registrirt wurden. Zusammengestellt mit sämmtlichen, auf ein unendlich fernes Object reducirten Mirenmessungen, ist das Resultat dieser Durchgangsbeobachtungen das folgende:

α Urs. min. Digr.	1885 April 15/16	45″.41 ± 0″.14	44	± 0″.89
Mire	1885 Sept. 20 — Nov. 29	45.73 ± 0.08	90	± 0.74
»	1886 Febr. 3 — April 12	46.12 ± 0.06	104	± 0.66
Mire	1890 Aug. Sept. Oct.	46.31 ± 0.08	68	± 0.65

dabei enthält die 3. Reihe die nach Zeit geordneten Mittelwerthe für die Fadendistanz nebst deren mittlerem Fehler, die 4. die Anzahl der Messungen, die 5. den mittleren Fehler einer einzelnen Distanzmessung.

Die aus den Sternbeobachtungen hervorgehenden Fadendistanzen ergeben, getrennt je nachdem die Sterne südlich oder nördlich vom Zenith lagen und geordnet nach dem jeweiligen Kreisstande:

	Stand	Süd			Nord		
1885 Apr. 16 — Juni 19	I	45″.94 ± 0″.18	77	± 1″.56	46″.77 ± 0″.15	76	± 1″.32
α Urs. min. Juni 28	II				46.81 ± 0.18	16	± 0.70
1885 Juni 24 — Sept. 16	II	45.92 ± 0.17	68	± 1.37	46.74 ± 0.14	67	± 0.90
1885 Oct. 14 — 1886 Apr. 2	III	46.20 ± 0.[illegible]	72	± 1.49	46.94 ± 0.12	73	± 1.03

Die Bedeutung der Zahlen der 3., 4. und 5., resp. 6., 7. und 8. Reihe ist dieselbe wie oben.

Diese Zahlen verdienen, abgesehen von der aus der Bewegung des Objectes folgenden grösseren Unsicherheit, wegen des grossen sonderbaren Unterschiedes, der sich zwischen Nord- und Südsternen zeigt, weniger Vertrauen; nach der vorhergehenden Tabelle verhalten sich dabei die Nordsterne abweichend. Die Versuche, durch Anordnung der Distanzen nach deren Grösse eine Beziehung zu Declination oder Zenithdistanz, Grösse, Stundenwinkel der Sterne oder nach Kreislagenwechsel u. s. w. und damit eine Begründung der Verschiedenheit beider Mittelwerthe zu finden, blieben ohne Erfolg.

Mit Sicherheit scheint aber aus der ersten Tafel hervorzugehen, dass die Fadendistanz veränderlich gewesen ist und bestätigt wird dieser Verdacht durch das Verhalten der aus den beiden Kreislagen sich ergebenden Werthe; man erhält nämlich aus den SCHNAUDER'schen Beobachtungen folgende Fadendistanzdifferenzen im Sinne: Fernrohr folgend minus Fernrohr voran:

Stand	Südsterne		Nordsterne	
I	+ 0″.15	± 0″.24	+ 0″.73	± 0″.20
II			+ 0.73	± 0.20
II	+ 0.30	± 0.24	+ 0.45	± 0.20
III	+ 0.40	± 0.24	+ 0.49	± 0.20

Mire (Stand III).

1885	+ 0″.24	± 0″.15
1886	+ 0.36	± 0.15

dagegen folgt für dieselbe Differenz im Jahre 1890: — 0″.28 ± 0″.11; dies schliesst aber die Möglichkeit einer Verschiedenheit im entgegengesetzten Sinne während der Zeit der älteren Beobachtungen nicht aus.

Auch hier zeigen die Nordsterne ein abweichendes Verhalten.

Dem Einflusse der Durchbiegung eines nicht straffen Horizontalfadens Rechnung tragen zu wollen, erscheint zwecklos, wenn man die Möglichkeit eines Gleitens oder Haftens an einem der Verticalfäden berücksichtigt. —

Diese mehrfachen zu Tage getretenen Fehlerquellen können, bei der Umfänglichkeit und der Symmetrie in der Anlage der Beobachtungen, indessen kaum eine systematische Fälschung des Endresultates der Breitenbestimmung bewirken; ihre hauptsächliche Wirkung ist die einer Vergrösserung der mittleren Fehler und diese erreichen trotz alledem keine grösseren Beträge als bei anderen, analogen Reihen. Nebenbei sei bemerkt, dass diese Fehler Ursache zur Unterlassung einer Untersuchung der Schnauder'schen Beobachtungen in Bezug auf Verschiedenheit der Auffassung von Durchgängen steigender oder fallender Sterne waren; eine derartige persönliche Gleichung könnte hier schon durch irgend einen Rhythmus in der Aufeinanderfolge der Beobachtungsoperationen hervorgebracht werden.

Den beiden letzten Tabellen gemäss ergiebt sich die mittlere Ungenauigkeit einer Einstellung auf die Mire zu 0″.53, auf Polsterne zu 0″.70, auf Südsterne zu 0″.96, also auf Sterne, bei denen der Fehler wegen persönlicher Auffassung der Fadendurchgänge hinzukommt, überhaupt zu 0″.83. Danach wäre bei einer einzelnen Sternbreite, die ja mit wenigen Ausnahmen auf 4 Einstellungen beruht, ein Fehler von 0″.4 bis 0″.5 zu erwarten und dies lässt sich leicht verificiren, da Herr Schnauder bei der Berechnung der einzelnen Sternbreiten für jeden der beiden Fäden je eine Breite abgeleitet hat; man erhält nun aus den 3 Kreisständen als mittlere Unsicherheit einer Breite aus je einer Einstellung in den beiden Kreislagen:

1) aus Südsternen: ± 0″.44, aus Nordsternen: ± 0″.42.

Bildet man für alle Sterne, die mindestens 7mal beobachtet worden sind, erst die Abweichungen vom jedesmaligen Abendmittel, dann wieder die Differenzen dieser Abweichungen gegen ihr Mittel und zwar getrennt für jeden Stern, so findet man als mittleren Fehler einer Bestimmung:

2) aus 9 Südsternen: ± 0″.64, aus 6 Nordsternen ± 0″.59.

Dieselben Grössen, nach Herrn Schnauder's Reduction vermittels abendlicher Biegungsconstanten gebildet, sind kleiner;

indessen schienen die früher angegebenen Gegengründe doch zu überwiegen.

Endlich folgt aus den Abweichungen sämmtlicher Sternbreiten vom jedesmaligen Abendmittel:

		N.	S.
	I	± 0″.80	± 0″.74
3)	II	± 0.62	± 0.80
	III	± 0.62	± 0.58

Die Differenz der Fehler 3) gegen 2) wird mit hervorgebracht durch das Hinzutreten systematischer Abweichungen einzelner Sterne; solche Abweichungen waren erhalten worden bei Ableitung der mittleren Fehler 2); die sichersten unter ihnen überschreiten eben 0″.5 und es sind fast gleichviel positive wie negative vorhanden; ihre Mittheilung ist mit Rücksicht auf ihre Ungenauigkeit unterblieben, ebenso wie diejenige einer geringen Abhängigkeit derselben Art von Abweichungen vom Stundenwinkel, wie sie sich bei den beiden am häufigsten beobachteten Nordsternen α Urs. min. und Groombridge 750 zeigt.

Einen wesentlichen Widerspruch dürften die eben angeführten Fehlerarten nicht enthalten. —

In der Reduction der Breitenbeobachtungen war bei der Ermittelung von Abendwerthen abgebrochen worden; vergleicht man die Beobachtungen derselben Sterne an zeitlich einander naheliegenden Abenden, so sind, wenigstens in den vom Verfasser untersuchten Fällen, keine auffälligen systematischen Abweichungen mit Sicherheit zu erkennen. Eine Ausnahme hiervon bilden die Beobachtungen vom 16. April 1885; an diesem Tage begannen die Beobachtungen am Wanschaff'schen Universalinstrument und da Herr Schnauder sie ausdrücklich als Vorbereitungsbeobachtungen bezeichnet hat, sind sie bei Ableitung des Endresultates unterdrückt worden.

Eine graphische Darstellung der Abendmittel, bei welcher diese zu Ordinaten, die Epochen zu Abscissen genommen wurden, verrieth jedoch eine Abhängigkeit von der Jahreszeit in gleichem Sinne und Betrage wie bei den in den Jahren 1889/90 zur Bestimmung von Polhöhenschwankungen in Potsdam, Berlin und Prag angestellten Beobachtungen nach der Methode von Horrebow-Talcott.

Die mittlere Unsicherheit eines Abendresultates, berechnet

nach den oben mitgetheilten Werthen der Unsicherheit einer Sternbreite, ist etwa: $\pm$ 0.″3, wenn man bedenkt, dass im Mittel 7 Sterne an einem Abende beobachtet wurden; da die Anzahl der Beobachtungstage 30 betrug und diese sich nahezu, wenn auch nicht mit wünschenswerther Gleichmässigkeit, über 1 Jahr vertheilten, so wurde der Versuch gemacht, durch eine Ausgleichung die Grösse einer vorausgesetzten Polhöhenschwankung, sowie die Zeiten des Maximums und des Minimums derselben zu ermitteln.

Jedes Tagesresultat wurde angesetzt in der Form:

$$\varphi = \varphi_0 + a \cdot \sin \odot + b \cdot \cos \odot,$$

worin φ_0 den gesuchten Mittelwerth der Polhöhe, a und b zu ermittelnde Constanten und $\odot$ die Sonnenlänge für die Mitte der Epoche bedeuten; jede Gleichung erhielt ein Gewicht gleich der Anzahl der an dem zugehörigen Tage beobachteten Sterne, oder, was bis auf irrelevante Unterschiede zu denselben Gewichten führt, gleich der Anzahl der Paare, die sich aus den abwechselnd beobachteten Nord- und Südsternen bilden liessen.

Bei Anwendung obiger Formel wird allerdings vollkommene Periodicität der Schwankung gefordert, während eine solche nach den Messungen des Herrn Professor Küstner aus den Jahren 1884/85 allein schon nicht vorhanden zu sein braucht; diese einfache Formel erschien jedoch jener graphischen Darstellung nach ausreichend und verträglich mit der Ungenauigkeit der Beobachtung.

Die Bedingungsgleichungen sind in Columne 2 der folgenden Tabelle nebst Datum (Columne 1) und Gewichten (Columne 5) enthalten:

1885			
April 19	$\varphi_0 + 9.6976 \cdot a + 9.9380 \cdot b = 4.''97$	7	$+ 0.''50$
Mai 19	$\varphi_0 + 9.9328 \cdot a + 9.7125 \cdot b = 6.07$	2	$- 0.47$
23	$\varphi_0 + 9.9496 \cdot a + 9.6583 \cdot b = 5.74$	9	$- 0.14$
24	$\varphi_0 + 9.9530 \cdot a + 9.6447 \cdot b = 5.56$	9	$+ 0.06$
28	$\varphi_0 + 9.9661 \cdot a + 9.5801 \cdot b = 5.69$	10	$- 0.06$
29	$\varphi_0 + 9.9689 \cdot a + 9.5628 \cdot b = 5.69$	4	$- 0.06$
Juni 3	$\varphi_0 + 9.9816 \cdot a + 9.4550 \cdot b = 5.90$	6	$- 0.25$
5	$\varphi_0 + 9.9855 \cdot a + 9.4044 \cdot b = 5.84$	13	$- 0.18$
16	$\varphi_0 + 9.9988 \cdot a + 8.8664 \cdot b = 5.18$	4	$+ 0.49$
19	$\varphi_0 + 9.9999 \cdot a + 8.3613 \cdot b = 6.37$	9	$- 0.69$

1885			
Juni 24	$\varphi_0 + 9.9992 \cdot a - 8.7794 \cdot b = 5''.81$	9	$-0''.13$
Juli 7	$\varphi_0 + 9.9833 \cdot a - 9.4346 \cdot b = 5.59$	6	$+0.10$
19	$\varphi_0 + 9.9490 \cdot a - 9.6605 \cdot b = 5.21$	5	$+0.47$
21	$\varphi_0 + 9.9408 \cdot a - 9.6890 \cdot b = 4.97$	4	$+0.72$
Aug. 4	$\varphi_0 + 9.8676 \cdot a - 9.8297 \cdot b = 5.61$	6	$+0.05$
5	$\varphi_0 + 9.8601 \cdot a - 9.8383 \cdot b = 5.51$	8	$+0.15$
16	$\varphi_0 + 9.7676 \cdot a - 9.9088 \cdot b = 5.50$	5	$+0.12$
Sept. 2	$\varphi_0 + 9.5249 \cdot a - 9.9742 \cdot b = 5.68$	10	-0.12
5	$\varphi_0 + 9.4563 \cdot a - 9.9815 \cdot b = 5.58$	8	-0.04
16	$\varphi_0 + 9.0156 \cdot a - 9.9976 \cdot b = 5.14$	7	$+0.36$
Oct. 14	$\varphi_0 - 9.5650 \cdot a - 9.9685 \cdot b = 5.36$	4	-0.01
Nov. 16	$\varphi_0 - 9.9110 \cdot a - 9.7632 \cdot b = 5.52$	6	-0.33
17	$\varphi_0 - 9.9162 \cdot a - 9.7526 \cdot b = 5.13$	6	$+0.06$
18	$\varphi_0 - 9.9215 \cdot a - 9.7409 \cdot b = 5.26$	10	-0.08
19	$\varphi_0 - 9.9263 \cdot a - 9.7294 \cdot b = 5.10$	8	$+0.08$
20	$\varphi_0 - 9.9310 \cdot a - 9.7175 \cdot b = 5.70$	3	-0.52
1886			
März 25	$\varphi_0 + 8.9489 \cdot a + 9.9983 \cdot b = 5.12$	4	$+0.22$
30	$\varphi_0 + 9.2454 \cdot a + 9.9932 \cdot b = 5.06$	8	$+0.30$
April 1	$\varphi_0 + 9.3197 \cdot a + 9.9903 \cdot b = 5.60$	12	-0.23
2	$\varphi_0 + 9.3532 \cdot a + 9.9887 \cdot b = 5.23$	12	$+0.15$

Die Coefficienten von a und b sind logarithmisch angesetzt worden.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich folgende Normalgleichungen:

$$+214.000 \cdot \varphi_0 + 85.779 \cdot a - 4.810 \cdot b = -1178''.73$$
$$+85.779 \cdot \varphi_0 + 117.658 \cdot a + 23.433 \cdot b = -495.09$$
$$-4.810 \cdot \varphi_0 + 23.433 \cdot a + 95.323 \cdot b = +26.47$$

und aus ihnen folgt:

$$\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.338 + 0''.295 \cdot \sin \odot - 0''.077 \cdot \cos \odot$$
$$\pm 0.065 \quad \pm 0.090 \quad \pm 0.083$$

oder, wenn man die beiden trigonometrischen Glieder zusammenzieht:

$$\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.388 + 0''.305 \cdot \sin (\odot - 14^\circ.7).$$

Darnach fand ein Maximum statt: 1885 Anfang Juli: $\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.69$, ein Minimum 1885 Ende Dec.: $\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.08$.

Bei Mitnahme von 1885 April 16 würde man erhalten haben:

$$\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.360 + 0''.338 \cdot \sin(\odot - 23^\circ.3)$$

Maximum Mitte Juli 1885: $\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.70$,

Minimum Anfang Januar 1886: $\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.02$,

und mit Ausschluss dieses Tages und ohne Rücksicht auf die Theilungsfehler:

$$\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.389 + 0''.309 \cdot \sin(\odot - 15^\circ.6),$$

also fast genau das obige Resultat.

Die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler geht bei der Reduction der Tagesresultate mittels obiger Formel von 3''.33 auf 2''.85, (ohne Theilungsfehler von 3''.57 auf 2''.87); der mittlere Fehler einer Messung mit dem Gewichte 1 ergiebt sich zu: $\pm 0''.78$ und befindet sich in naher Uebereinstimmung mit dem früher dafür abgeleiteten Werthe (vergleiche Seite 273). Die übrig bleibenden Fehler selbst findet man in der 4. Reihe der letzten Tafel. Mittelt man dieselben standweise, so erhält man die in Columne 2 der nachstehenden Tabelle enthaltenen kleinen und unsicheren Werthe:

Stand	nach Anbringung der Theilungsfehler	b_2	vor Anbringung der Theilungsfehler	b_1
I	$-0''.08 \pm 0''.11$	$-1''.27$	$-0''.08 \pm 0''.12$	$-3''.46$
II	$+0.17 \pm 0.09$	$+0.03$	$+0.18 \pm 0.09$	$+2.11$
III	-0.04 ± 0.08	-2.36	-0.04 ± 0.08	-2.25

In der 3. resp. 5. Columne sind zum Vergleich die Werthe der Standbiegungen nochmals hingesetzt worden wegen der Uebereinstimmung der Vorzeichen; will man diesen Resten überhaupt Realität zugestehen, so würde aus der Zusammenstellung folgen, dass Biegung oder Theilungsfehler durch das früher eingeschlagene Verfahren zur Bildung von Abendmitteln noch nicht vollständig eliminirt worden seien; indessen könnten, da stets während mehrerer Monate in demselben Kreisstande beobachtet wurde, diese Standunterschiede sich auch erklären lassen als hervorgerufen durch die Abweichungen einer wirklichen Polhöhenänderung von der hier angenommenen.

Die Hypothese einer Polhöhenschwankung für die Zeit der SCHNAUDER'schen Beobachtungen bedarf aus naheliegenden Gründen noch der Bestätigung von anderer Seite; aus Mangel an Zeit sind darauf bezügliche Untersuchungen gleichzeitiger Messungsreihen unterblieben.

Aus dem Werthe von φ_0, welchen die letzte Ausgleichung ergab, folgt endlich nach der Centrirung:

$$\Phi = 51^\circ\,20'\,5''.82.$$

Zusammenstellung der Endwerthe.

In der folgenden Zusammenstellung sind der Uebersichtlichkeit wegen die Endwerthe der besprochenen neun Reihen nochmals aufgeführt:

		Beobachter	Merid.-Kr.	Zen.-Dist.	I. Vertical
			51° 20′	51° 20′	51° 20′
1	1863/4/5	Bruhns	—	6″.00	—
2	1864	Bruhns	—	—	5″.67
3	1866/7	Engelmann	5″.94	—	—
4	1866	Bruhns	—	—	5.67
5	1867	Helmert	—	—	6.34
6	1867	Helmert	—	—	5.89
7	1868	Helmert	—	(5.10)	—
8	1869/70	Leppig	—	—	6.15
9	1885/6	Schnauder	—	5.91	—
		Φ = 51° 20′ 5″.94		5″.95	5″.94

Dabei ist unter Nr. 9 der vom Beobachter selbst abgeleitete Werth für Φ angegeben, eine jährliche Schwankung also nicht in Betracht gezogen worden; es geschah dies der Gleichmässigkeit wegen. Die unter der Tabelle angegebenen Grössen sind einfache Mittelwerthe, gebildet ohne Rücksicht auf die Qualität der einzelnen Reihen, sondern mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Beobachter, Methoden und Epochen, und mit Ausschluss der auf der Pleissenburg beobachteten Reihe Nr. 7; ihre nahe Uebereinstimmung ist, im Verhältnis zu ihrer Ungenauigkeit, wohl nur eine zufällige; sie zeigen, dass der bis jetzt angenommene, nach BRUHNS aus Reihe 1 und 2 hervorgegangene Werth der Polhöhe des Sternwartencentrums, nämlich: 51° 20′ 6″.3, etwa 0″.3 bis 0″.4 zu gross ist.

Dieser Unterschied wird noch grösser, wenn man die Hypothese einer jährlichen Schwankung macht; die Mehrzahl der zu Grunde liegenden Beobachtungen ist in den Monaten April bis October angestellt worden, also in den Monaten, die nach den neuesten Messungen die Zeit des Maximums umfassen würden. Berechnet man, nur um einen Ueberschlag über die Grösse des Einflusses dieser Hypothese zu haben, mit der gelegentlich der modificirten Ableitung des Endwerthes der Reihe Nr. 9 erhaltenen Formel Polhöhenvariationen für die betreffenden Jahre, so erhält man die in Rubrik 2 der folgenden Tafel angegebenen Reductionen:

		Merid.-Kr.	Zen.-Dist.	I. Vertical
1	+ 0″.03	—	6″.03	—
2	— 0.31	—	—	5″.36
3	— 0.05	5″.89	—	—
4	— 0.28	—	—	5.39
5	— 0.04	—	—	6.30
6	— 0.28	—	—	5.61
7	+ 0.07	—	(5.17)	—
8	— 0.02	—	—	6.13
9	—	—	5.82	—
	$\Phi = 51^\circ\,20'\,5''.89$		5″.92	5″.76

Die Grössen der 3., 4. und 5. Rubrik ergeben sich nach Anbringung dieser Reductionen an die entsprechenden der früheren Tabelle; bei Reihe Nr. 9 ist direct der frühere Endwerth aufgeführt.

Der blosse Augenschein lehrt schon, dass die Anbringung dieser Reductionen die Uebereinstimmung unter den am zahlreichsten vorhandenen Verticalbeobachtungen verschlechtert hat und dies bleibt bestehen, wenn man aus den Reihen Nr. 5 und 8, um deren Resultate mit denen der übrigen drei derselben Columne besser vergleichbar zu machen, die Beobachtungen des gemeinsam benutzten Sternes η Urs. maj. auszieht; man findet als mittlere Abweichung vorher $\pm$ 0″.20, nachher $\pm$ 0″.31.

Den unter der zweiten Tabelle stehenden Mittelwerthen gemäss würde die Verminderung des aus der ersten Tabelle folgenden Mittelwerthes der Polhöhe 0″.08 betragen. Bei der in früheren Abschnitten nachgewiesenen zweifelhaften Natur der

fünf im 1. Vertical beobachteten Reihen muss davon abgesehen werden, aus diesem Versuche Schlüsse auf das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer jährlichen Polhöhenschwankung früherer Jahre zu ziehen. —

Die SCHNAUDER'sche Reihe war in der bestimmten Absicht unternommen worden, aus ihr einen besseren Werth der Polhöhe abzuleiten; der Beschaffenheit und Ausdehnung nach steht sie unzweifelhaft über den anderen Reihen, und es erscheint aus diesem Grunde nicht angemessen, sie mit diesen zu vereinigen; die nahe Uebereinstimmung ihres Endwerthes mit dem Mittelwerthe der übrigen Reihen, wie sie aus den beiden Tabellen dieses Abschnittes hervorgeht, erweist dies ausserdem als unnöthig.

Als Endergebniss der SCHNAUDER'schen Reihe, unter Berücksichtigung periodischer Glieder, betrachte ich demnach den Ausdruck:

$$\Phi = +\,51^\circ\,20'\,5''.82 - 0''.305 \cdot \sin\,(\odot - 14^\circ.7)$$

gültig für 1885 April — 1886 April; die durch das constante Glied geforderte Verkleinerung des bisher angenommenen Werthes von Φ ist in Einklang mit der Neureduction der älteren Reihen.

SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1893.

Fr. Hayn, *Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte.*

Die in den folgenden Blättern veröffentlichte Beobachtungsreihe wurde auf Veranlassung von Herrn Prof. Bruns im Herbste 1890 in der Absicht begonnen, die in den Jahren 1885—86 am Universalinstrument von Wanschaff ausgeführte Polhöhenbestimmung [1]) einer Controle zu unterwerfen. Sie sollte Aufschluss geben über den Grund der beträchtlichen Standunterschiede, andererseits aber auch einen Beitrag zur Kenntniss der mittleren Polhöhe und womöglich auch deren periodischen Schwankungen liefern. Demgemäss wurde das Programm der früher mit demselben Instrument erhaltenen Reihe etwas geändert. Es sollten in der Nähe des Meridians, möglichst symmetrisch zu demselben, sowohl von Pol- als auch von Südsternen Zenithdistanzen gemessen werden in einer Zone von etwa 29° bis 49° Zenithdistanz. Ferner wurde beschlossen behufs Elimination der Theilungsfehler dieselben Sterne in drei Ständen zu beobachten. Derselbe Stand sollte für zwei aufeinander folgende Beobachtungsabende beibehalten werden. Eine vollständige Durchführung dieses Programms, demzufolge jeder Stern an sechs Abenden zu beobachten war, ist nicht möglich gewesen; einerseits verhinderte dies die Ungunst der Witterung, andererseits gingen mehrere Beobachtungen durch schlechtes Functioniren des Chronographen verloren.

Die Sterne wurden möglichst so ausgewählt, dass Nord- und Südsterne abwechselten; da aber zwischen den Culmina-

1) Siehe die Abhandlung »R. Schumann: Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte« in diesen Berichten Jhg. 1893.

tionen der Polsterne grössere Pausen zuweilen eintraten, so wurde an solchen Stellen noch ein südlicher Stern eingeschaltet, so dass im Allgemeinen mehr Südsterne als Polsterne beobachtet wurden. Bei der Art, wie das Resultat abgeleitet wurde, ist dieser Mangel an Symmetrie ohne Einfluss.

Eine Beschreibung des Instrumentes ist in der Bearbeitung der oben genannten Beobachtungsreihe enthalten; es wird deshalb im Folgenden auf selbige Bezug genommen.

Die Beobachtung wurde in der Weise ausgeführt, dass in der einen Kreislage der betreffende Stern zuerst an dem oberen der beiden horizontalen Fäden, sodann am unteren beobachtet wurde. Bei Südsternen wurde mit Hülfe der Feinbewegung der Sterne nahe an den Faden gebracht, so dass er möglichst in der Mitte des Gesichtsfeldes vermöge seiner Bewegung zur Bisection gelangte. Die Azimuthalfeinbewegung wurde hierzu äusserst selten benutzt, es wurde vielmehr das Azimuth vorher aus freier Hand so eingestellt, dass sich der Stern vielleicht 30^s vor den Fäden befand. Dann wurde das Instrument in die andere Kreislage gebracht und dasselbe Verfahren wiederholt; nach jeder Einstellung wurden die beiden Mikroskope des Höhenkreises und der Stand der Libelle abgelesen.

Messungen an der in der früheren Arbeit erwähnten Mire, bei denen die verschiedenen Drehrichtungen der Feinbewegungsschrauben — der des Fernrohrs und der des Mikroskopträgers — mit einander combinirt wurden, zeigten, dass systematische Unterschiede zwischen den daraus erhaltenen Zenithdistanzen existirten. Deshalb wurde für immer festgesetzt, dass die letzte Bewegung so zu geschehen habe, dass die Schrauben hineingedreht, also die ihnen gegenüberstehenden Federn zusammengedrückt werden.

Die Beobachtungszeiten wurden registrirt. Als Registriruhr diente Tiede 336, welche sowohl zu Beginn als auch am Ende der Beobachtung, oft aber auch in der Zwischenzeit mit der Hauptuhr Dencker XII verglichen wurde. Die Stände dieser Uhr wurden nach den von Dr. Schumann am Meridiankreis erhaltenen Zeitbestimmungen interpolirt, und die Längendifferenz zwischen Universalinstrument und Meridiankreis (+ 0^{s}09) berücksichtigt. Im April 1891 fungirte die ältere Pendeluhr Fraunhofer als Normaluhr, da Dencker XII einer Reinigung unterzogen wurde. Es war anfangs beabsichtigt am Universalinstrument selbst aus

Azimuthmessungen von Zeitsternen den Stand der Normaluhr abzuleiten; ich habe jedoch davon abgesehen, da das eigenthümliche, in den Astr. Nachr. Nr. 3098 besprochene Verhalten des Horizontalkreises Bedenken gegen diese Methode erweckt. Auch von einer Berücksichtigung der persönlichen Gleichung Hayn—Schumann wurde abgesehen, da ihre Bestimmung aus Durchgangsbeobachtungen keinen sicheren Schluss auf den Werth solcher bei Zenithdistanzmessungen zulässt. Von 1894 Juli 1 an sind die Zeitbestimmungen vom Verfasser selbst am Meridiankreis ausgeführt worden.

Die meteorologischen Reductionselemente wurden dadurch erhalten, dass ein am nördlichen Ende des Spaltes angebrachtes Thermometer bei jedem Stern mindestens einmal abgelesen wurde. Die zugehörigen Barometerstände wurden aus den Aufzeichnungen eines Feder-Barographen entnommen, dessen Angaben mittelst der täglichen Terminbeobachtungen des Stationsbarometers corrigirt wurden. Die Temperaturen wurden für die Mitte jeder Sternbeobachtung interpolirt und für dieselbe constant angenommen. Die Refraction ist die Bessel'sche.

Das Niveau, welches die Stellung des Mikroskopträgers controlirt, war dasselbe wie bei der früheren Reihe. Es wurde von Beginn dieser neuen Breitenbestimmung auf dem Niveauprüfer einer Untersuchung unterworfen, wobei sich zeigte, dass es sehr gut functionirt. Bei dieser Parsbestimmung ist es völlig in seiner Fassung gelassen worden; ausserdem sind späterhin die Schrauben, welche es an den Mikroskopträger befestigen, immer nur soweit angezogen worden, dass ein Schlottern ausgeschlossen blieb. Es ist daher wohl kaum zu vermuthen, dass infolge von Verspannungen der Werth eines Niveautheiles am Instrument selbst ein so beträchtlich anderer gewesen sein sollte als auf dem Niveauprüfer, wie es die Schnauder'sche Breitenbestimmung ergiebt. Schliesslich sind die Bestimmungen mit Hülfe des Kreises so abhängig von den systematischen Fehlern, welche durch das Reiten des Mikroskopträgers auf der Axe erzeugt werden, dass ich mich entschloss den Werth, welchen der Niveauprüfer gab, vorzuziehen. Danach ist

$$1 \text{ pars} = 1''.96.$$

Die äussersten Enden, welche einen etwas grösseren Werth ergeben, sind zum Theil schon früher gedeckt worden, ausser-

dem wurde die Blase der Libelle immer nach Möglichkeit in der Mitte gehalten, auf welche sämmtliche Mikroskopablesungen reducirt sind.

Die beiden Mikroskope des Höhenkreises, mit I und II bezeichnet, waren bei Uebernahme des Instrumentes noch in gutem Zustande, so dass an ihnen keinerlei Aenderung vorgenommen wurde. Die Ebene des Kreises zeigte sich bei einer Untersuchung so nahe senkrecht zur Axe, dass der Run eines Mikroskops für die in Betracht kommenden Zonen constant angenommen werden konnte. Der Run wurde aus den Beobachtungen eines jeden Abends direct abgeleitet mit Hülfe der bekannten Distanz der beiden Doppelfäden in jedem Mikroskop. Messungen der betreffenden Fadendistanzen ergaben:

	Mikr. I	Mikr. II
1890 October	3^R 14?2	3^R 13?4
1891 August	3 14.1	3 13.6

Mit den ersten Werthen ist der Run während der Wintermonate, mit den letzten in den Sommermonaten berechnet worden.

Es sei hier nochmals erwähnt, dass der Kreis von 5′ zu 5′ getheilt ist, dass $5' = 2^R5$ und $1^R = 60^P$. Ein Pars ist demnach 2″. Der Run hat sich sehr gut gehalten, ist immer sehr klein gewesen und dürfte ohne Schaden für längere Zeit constant angenommen werden; denn eine Bestimmung eines Abends ist infolge der zufälligen Theilungsfehler mit einer Unsicherheit von etwa 0?1 bis 0?2 behaftet. Die folgende Tafel giebt eine Zusammenstellung.

		Mikr. I.	Mikr. II.
1890 December	1	+ 0?7	0?0
	7	+ 0.8	+ 0.7
	11	+ 0.6	0.0
	14	+ 0.7	+ 0.8
	15	+ 0.7	— 0.1
	17	+ 0.6	+ 0.5
1891 Januar	3	+ 0.2	— 0.1
	29	+ 0.1	+ 0.4
Februar	9	+ 0.2	+ 0.3
	10	+ 0.3	+ 0.2
	12	+ 0.4	+ 0.3

		Mikr. I.	Mikr. II.
1891 Februar	24	+ 0.1	+ 0.3
	25	+ 0.4	+ 0.4
	26	+ 0.3	+ 0.3
März	12	+ 0.5	+ 0.4
	20	+ 0.4	+ 0.1
April	6	+ 0.5	+ 0.7
	19	+ 0.2	+ 0.6
Juli	9	— 0.1	+ 0.4
	13	+ 0.3	+ 0.9
	16	+ 0.3	+ 0.6
	21	+ 0.3	+ 1.0
	23	+ 0.4	+ 0.7
	28	+ 0.5	+ 0.7
	30	+ 0.1	+ 0.7
August	5	+ 0.4	+ 0.6

Die beträchtlichen Schwankungen in den Werthen für Mikr. II. in der ersten Zeit dürften zum Theil auf die in dieser Zeit sehr mangelhafte Beleuchtung des genannten Mikroskops zurückzuführen sein, deren Verbesserung erst nach einiger Zeit gelang.

Die Schrauben der beiden Mikroskope sind auf fortschreitende wie auf periodische Fehler untersucht worden. Fortschreitende Fehler konnten mit Bestimmtheit nicht nachgewiesen werden, sie sind auch ziemlich belanglos, da höchstens 3 Gänge der Schraube zur Verwendung gelangen. Untersuchungen über periodische Ungleichheiten sind im Sommer und Winter angestellt worden. Ein Urtheil über die Grösse erhält man aus der folgenden Zusammenstellung.

Die Correctionen, mit welchen die Beobachtungen bis April 1891 reducirt wurden, sind aus den Messungen des Winters, die weiteren aus allen Schraubenuntersuchungen abgeleitet.

	1890 Dec.—1891 April		1891 Juli	
Ablesung	Mikr. I.	Mikr. II.	Mikr. I.	Mikr. II.
0°	— 0.2	+ 0.2	— 0.1	+ 0.1
10	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1
20	+ 0.2	— 0.1	+ 0.2	0.0
30	+ 0.1	— 0.1	0.0	+ 0.1
40	0.0	— 0.1	— 0.1	0.0
50	— 0.2	— 0.1	— 0.2	— 0.1

Es ist ersichtlich, dass die Correctionen für Schraubenfehler und Run so geringfügig sind, dass durch dieselben die innere Uebereinstimmung nur wenig erhöht wird.

Die vorliegende Reihe sollte, wie schon gesagt, Aufklärung bringen über die Ursache der grossen Standunterschiede bei den Zenithpunkten 0°, 120°, 240°. Während nämlich die Differenz: Breiten aus Südsternen minus solchen aus Nordsternen in Stand I +5″ und in Stand III +3″ war, betrug sie in Stand II etwa −2″.

Als die vorläufige Reduction der Beobachtungen der Wintermonate vollendet war, fand sich auch hier dasselbe Resultat. Da die Zenithdistanzmessungen der Mire wegen der ganz anderen Bedingungen, unter denen sie angestellt wurden, wenig geeignet schienen, dieser Frage näher zu treten, beschloss ich von Polaris in dessen Digression an einem Abende Zenithdistanzen bei den Zenithpunkten 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300° zu beobachten, vor allem aus dem Grunde, weil hierbei dieselben Stellen des Kreises verwendet wurden wie bei den übrigen Breitenbestimmungen. Das Resultat war folgendes:

Zenithpunkt	1891 Juli 9	Juli 13
0°	51° 20′ 2″.5	51° 20′ 2″.4
60	4.4	4.4
120	6.8	6.7
180	2.5	3.2
240	4.2	3.8
300	6.1	5.5

Die Vermuthung, dass systematische Theilungsfehler diese Differenzen verursachen könnten, wurde hiernach fast zur Gewissheit; denn war dies der Fall, so mussten allerdings die Werthe bei den Zenithpunkten 0° und 180°, 120° und 300°, 240° und 60° dieselben sein, denn diese Kreisstände unterscheiden sich durch nichts, als dass Mikroskop I in dem einen Stand die Stelle des Kreises abliest, der im anderen Stande Mikroskop II gegenüber steht.

Die Untersuchung der Theilung wurde von mir, mit Unterstützung des Herrn Dr. Hartmann, im December 1891 und Januar 1892 nach dem von Herrn Prof. Bruns entworfenen Programm durchgeführt. Eine Mittheilung hierüber ist in den Astr. Nachr. Bd. 130 Nr. 3098 veröffentlicht worden, aus der hier der Bequemlichkeit halber die in Betracht kommenden Zahlen in der

weiterhin folgenden Tafel wiederholt sind. Columne I dieser Tafel enthält die direct bestimmten Durchmessercorrectionen.

Zur Reduction der Beobachtungen machte sich das Bedürfniss geltend, Correctionen zu haben, zwischen denen man interpoliren kann. Eine nach dem Sinus und Cosinus des doppelten Argumentes entwickelte Formel (II) schloss sich den beobachteten Werthen noch nicht genügend an, es wurde deshalb eine Art graphischen Verfahrens angewendet, welches den individuellen Theilungsfehler eines Durchmessers zum grossen Theil eliminirt und doch den verschiedenen, deutlichen Einbiegungen der Theilungsfehlercurve etwas Rechnung trägt. Durch Mittelung von drei benachbarten Werthen wurde eine neue Correctionstabelle hergestellt und dieses Verfahren dreimal wiederholt. Auf diese Weise wurde die definitive Tabelle III erhalten. Es bleibt natürlich willkürlich, wie oft man diese Operation fortsetzt, aber es schien doch die dreimalige Wiederholung in diesem Falle das brauchbarste Resultat zu geben, da bei dieser Correctionstabelle einerseits die verschiedenen Einbiegungen erhalten bleiben, andererseits aber doch ein Interpoliren möglich geworden ist.

Tafel der Durchmesser-Correctionen.

		I	II	III
0°	180°	+ 1″.98	+ 0″.71	+ 1″.38
4	184	+ 0.37	+ 0.50	+ 0.80
8	188	— 0.23	+ 0.29	+ 0.26
12	192	— 0.54	+ 0.07	— 0.07
16	196	+ 0.27	— 0.16	— 0.30
20	200	+ 0.03	— 0.38	— 0.60
24	204	— 1.58	— 0.59	— 0.96
28	208	— 1.82	— 0.78	— 1.22
32	212	— 1.25	— 0.98	— 1.33
36	216	— 0.73	— 1.14	— 1.41
40	220	— 1.53	— 1.29	— 1.52
44	224	— 2.53	— 1.40	— 1.54
48	228	— 1.50	— 1.49	— 1.42
52	232	— 0.54	— 1.56	— 1.24
56	236	— 0.57	— 1.60	— 1.20
60	240	— 2.47	— 1.59	— 1.21
64	244	— 0.80	— 1.57	— 1.22

		I	II	III
68°	248°	— 1.″14	— 1.″50	— 1.″11
72	252	— 0.68	— 1.41	— 1.09
76	256	— 1.37	— 1.30	— 1.11
80	260	— 1.18	— 1.16	— 1.16
84	264	— 1.38	— 0.99	— 1.10
88	268	— 0.80	— 0.81	— 1.00
92	272	— 0.92	— 0.61	— 0.88
96	276	— 0.69	— 0.39	— 0.80
100	280	— 0.75	— 0.18	— 0.64
104	284	— 0.94	+ 0.04	— 0.31
108	288	+ 0.35	+ 0.27	+ 0.19
112	292	+ 1.50	+ 0.48	+ 0.58
116	296	+ 1.22	+ 0.69	+ 0.66
120	300	— 0.04	+ 0.89	+ 0.57
124	304	+ 0.08	+ 1.06	+ 0.57
128	308	+ 0.15	+ 1.22	+ 0.88
132	312	+ 2.49	+ 1.35	+ 1.24
136	316	+ 1.47	+ 1.44	+ 1.52
140	320	+ 1.75	+ 1.53	+ 1.57
144	324	+ 0.97	+ 1.58	+ 1.66
148	328	+ 1.77	+ 1.60	+ 1.77
152	332	+ 2.53	+ 1.58	+ 1.83
156	336	+ 2.37	+ 1.53	+ 1.65
160	340	+ 0.53	+ 1.46	+ 1.37
164	344	+ 0.71	+ 1.36	+ 1.22
168	348	+ 1.33	+ 1.23	+ 1.35
172	352	+ 1.43	+ 1.07	+ 1.62
176	356	+ 2.79	+ 0.90	+ 1.69
180	360	+ 1.98	+ 0.71	+ 1.38

Die Beobachtungsreihe begann im November 1890 und wurde geschlossen 1891 August 5. Hierauf wurde das Instrument Dr. Hartmann zur Fortsetzung dieser Beobachtungen übergeben. Nach Vollendung der Reduction wurden die Bestimmungen vom November 1890 gestrichen, da die innere Uebereinstimmung wenig gut war, wahrscheinlich infolge von Ablesefehlern, die man an diesem Instrumente erst nach einiger Uebung vermeidet. Während der Monate Mai und Juni 1891 verursachte eine achtwöchentliche militärische Uebung eine grössere Pause. Im Ganzen wurden 166 einzelne Breitenbestimmungen erhalten, die sich auf 28 Abende vertheilen. Davon

wurden aber alle solche, bei denen Ablesefehler vermuthet wurden, gestrichen (11 Beob.). 3 Beobachtungen erhielten nur halbes Gewicht, weil bei ihnen nicht 4 Einstellungen vorhanden waren, sondern eine oder zwei als verdächtig verworfen wurden. Die Breite aus Beobachtungen von ε Urs. min. 1891 Febr. 12 wurde nicht berücksichtigt, da an diesem Abende kein Südstern beobachtet worden war, desgleichen die 13 Polhöhen von α Urs. min. 1891 Juli 9 und 13.

Zur Ableitung des definitiven Resultates verbleiben demnach 141 einzelne Breitenbestimmungen, die sich auf die Declinationen von 9 Polsternen und 19 südlichen Sternen gründen. Die scheinbaren Oerter sind die des Berliner Jahrbuches und enthalten nicht die kleinen Mondglieder kurzer Periode. Die Helligkeit von Sternen 2. Grösse wirkte nicht störend, nur bei α Leonis wurde regelmässig eines der vorhandenen Gazegitter angewandt.

Zu der nun folgenden Zusammenstellung der Beobachtungen ist wenig hinzuzufügen. Die Bedeutung der Columnen ist: 1. Datum, 2. Name des Sterns, 3. δ app., 4. und 5. Meteorologische Daten (das Barometer bereits auf 0° reducirt), 6. Kreislage, 7. oberer oder unterer Horizontalfaden (im Fernrohr gesehen, also Kr. W. o. = Kr. O. u. etc.), 8. Kreisablesung corrigirt für Reduction auf den Meridian und Refraction.

Tafel A.

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1890 Dec. 1	α Equulei	+ 4°47′47″.5	762.1	— 2°.1	O	o	73°33′56″.0
					O	u	73 33 9.8
					W	o	166 37 48.4
					W	u	166 38 33.1
	1 H. Drac.	+ 98 11 43.9	762.1	— 2.3	W	o	73 13 48.4
					W	u	73 14 36.3
					O	o	166 57 7.2
					O	u	166 57 56.5
	9 Pegasi	+ 5 39 38.6	762.0	— 2.4	O	o	74 25 48.5
					O	u	74 25 3.5
					W	o	165 46 0.9
					W	u	165 46 43.9
	30 H. Cam.	+ 96 53 25.1	762.0	— 2.4	W	o	74 32 56.3
					W	u	74 32 8.6
					O	o	165 38 52.3
					O	u	165 39 38.2

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung.
			mm				
1890 Dec. 1.	ζ Pegasi	+ 10° 15′ 42″.1	764.9	— 2°.4	O	o	79° 1′ 54″.0
					O	u	79 1 5 2
					W	o	161 9 54.3
					W	u	161 10 37.7
Dec. 7.	1 H. Drac.	+ 98 11 43.6	757.0	— 4.1	O	o	286 54 35.3
					O	u	286 55 21.7
					W	o	193 12 3.6
					W	u	193 11 48.5
	30 H. Cam.	+ 96 53 25.2	757.0	— 5.1	O	o	285 36 16.9
					O	u	285 37 4 2
					W	o	194 30 22 8
					W	u	194 29 37 2
	δ Piscium	+ 6 59 26.5	757.2	— 6.6	O	o	195 43 4 7
					O	u	195 42 18 5
					W	o	284 23 39 2
					W	u	284 24 27 7
	43 H. Cephei	+ 85 40 30.3	757.2	— 6.7	W	o	205 43 19 2
					W	u	205 42 33 8
					O	o	274 23 25 5
					O	u	274 24 11 2
	ε Piscium	+ 7 18 8.5	757.2	— 7.0	O	o	196 1 46 4
					O	u	196 1 0 1
					W	o	284 5 1 0
					W	u	284 5 45 7
	α Urs. min.	+ 88 43 47.4	757.2	— 8.6	W	o	202 40 3.0
					W	u	202 39 16.8
					O	o	277 26 43.3
					O	u	277 27 29.5
Dec. 11	δ Piscium	+ 6 59 26.8	759.0	— 3.8	W	o	284 23 41.2
					W	u	284 24 25.6
					O	o	———
					O	u	———
	ε Piscium	+ 7 18 8.4	759.0	— 4.0	W	o	284 4 59.7
					W	u	284 5 47.4
					O	o	196 1 46.0
					O	u	196 1 0.0
	α Urs. min.	+ 88 43 48.3	759.0	— 4.1	O	o	277 26 41.5
					O	u	277 27 30.0
					W	o	202 40 3.4
					W	u	202 39 16.7
Dec. 14	1 H. Drac.	+ 98 11 43.1	754.5	— 5.8	W	o	193 12 6.5
					W	u	193 11 20.8
					O	o	286 54 38.4
					O	u	286 55 25.4
	ε Pegasi	+ 9 22 28.2	754.5	— 6.1	O	o	198 6 10.0
					O	u	198 5 23.9
					W	o	282 0 40.3
					W	u	282 1 27.7
	ϑ Pegasi	+ 5 39 37.5	754.4	— 6.4	W	o	285 43 30.2
					W	u	285 44 15.8
					O	o	194 23 16.8
					O	u	194 22 30.4

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1890 Dec. 14.	30 H. Cam.	+96° 53′ 25″.3	754.8	— 6°.9	O	o	285° 36′ 22″.0
					O	u	285 37 8.3
					W	o	194 30 25.7
					W	u	194 29 40.4
	ζ Pegasi	+10 15 41.2	754.3	— 7.3	W	o	281 7 27.5
					W	u	281 8 12.4
					O	o	198 59 23.1
					O	u	198 58 35.7
Dec. 15.	δ Piscium	+ 6 59 26.2	749.6	— 10.0	O	o	325 43 20.6
					O	u	325 42 34.9
					W	o	44 23 55.2
					W	u	44 24 42.2
	43 H. Cephei	+85 40 32.0	749.6	— 10.0	W	o	325 43 32.9
					W	u	325 42 44.6
					O	o	34 23 39.6
					O	u	34 24 26.7
	ε Piscium	+ 7 18 8.1	749.6	— 10.0	O	o	316 2 2.8
					O	u	316 1 17.3
					W	o	44 5 12.7
					W	u	44 5 59.6
	α Urs. min.	+88 43 49.4	749.6	— 10.1	W	o	322 40 15.1
					W	u	322 39 28.2
					O	o	37 26 57.5
					O	u	37 27 43.5
18 Jan. 3	δ Piscium	+ 6 59 24.9	757.9	— 8.1	W	o	44 23 53.7
					W	u	44 24 39.2
					O	o	315 43 17.1
					O	u	315 42 32.1
	43 H. Cephei	+85 40 34.2	757.9	— 8.4	O	o	34 23 40.9
					O	u	34 24 26.8
					W	o	325 43 31.6
					W	u	325 42 44.7
	ε Piscium	+ 7 18 7.0	757.9	— 8.6	W	o	44 5 14.8
					W	u	44 5 57.1
					O	o	316 1 59.4
					O	u	316 1 12.9
	α Urs. min.	+88 43 52.3	757.8	— 8.9	O	o	37 26 59.4
					O	u	37 27 47.1
					W	o	322 40 12.1
					W	u	322 39 27.1
Jan. 29	ε Urs. min.	+97 47 21.0	758.9	+ 1.1	O	o	166 34 35.4
					O	u	166 32 23.4
					W	o	73 37 52.2
					W	u	73 37 6.7
	γ Orionis	+ 6 14 59.6	758.9	+ 1.5	W	o	165 9 25.7
					W	u	165 10 12.8
					O	o	75 0 2.6
					O	u	74 59 18.0
	α Orionis	+ 7 23 9.4	758.9	+ 0.9	O	o	76 8 10.6
					O	u	76 7 23.9
					W	o	164 1 19.0
					W	u	164 2 5.6

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1894 Jan. 29	δ Urs. min.	+ 93° 23′ 32″.4	758.9	+ 0°.9	W	o	78° 1′ 40″.4
					W	u	78 0 55.0
					O	o	162 7 48.1
					O	u	162 8 35.8
	γ Gemin.	+ 16 29 34.3	758.9	+ 0.9	O	o	85 14 34.9
					O	u	85 13 48.6
					W	o	154 54 56.1
					W	u	154 55 43.9
	54 H. Cephei	+ 87 13 12.7	758.9	+ 0.9	W	o	84 11 59.6
					W	u	84 11 13.9
					O	o	155 57 29.1
					O	u	155 58 15.1
	λ Gemin.	+ 16 44 12.4	758.9	+ 0.9	O	o	85 29 15.3
					O	u	85 28 29.1
					W	o	154 40 16.2
					W	u	154 41 1.9
	β Can. min.	+ 8 30 30.5	758.9	+ 0.8	W	o	162 53 54.8
					W	u	162 54 43.7
					O	o	77 15 32.4
					O	u	77 14 45.2
	λ Urs. min.	+ 94 2 1.9	758.9	+ 0.5	O	o	159 46 17.7
					O	u	159 47 4.4
					W	o	80 23 14.8
					W	u	80 22 26.8
Febr. 9	ε Urs. min.	+ 97 47 23.3	761.7	— 4.1	W	o	73 37 7.6
					W	u	73 36 21.9
					O	o	166 30 55.7
					O	u	166 34 43.2
	γ Orionis	+ 6 14 59.1	761.7	— 4.3	O	o	74 59 20.7
					O	u	74 58 33.8
					W	o	165 8 44.0
					W	u	165 9 31.1
	α Orionis	+ 7 23 9.0	761.7	— 4.7	W	o	164 0 35.4
					W	u	164 1 21.5
					O	o	76 7 27.5
					O	u	76 6 41.7
	δ Urs. min.	+ 93 23 35.4	761.7	— 4.9	O	o	162 7 8.3
					O	u	162 7 56.6
					W	o	78 0 57.3
					W	u	78 0 8.5
	γ Gemin.	+ 16 29 34.3	761.7	— 5.1	W	o	154 54 13.4
					W	u	154 54 58.0
					O	o	85 13 50.3
					O	u	85 13 5.1
	54 H. Cephei	+ 87 13 15.9	761.7	— 5.1	O	o	155 56 50.1
					O	u	155 57 36.7
					W	o	84 11 14.2
					W	u	84 10 28.7
	λ Gemin.	+ 16 44 12.4	761.7	— 5.1	W	o	154 39 31.0
					W	u	154 40 18.4
					O	o	85 28 31.7
					O	u	85 27 46.9

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1891 Febr. 9	β Can. min.	+ 8° 30′ 29″.9	764.7	— 5.1	O	o	77° 44′ 45″.1
					O	u	77 44 2.7
					W	o	162 53 46.4
					W	u	162 54 2.6
	λ Urs. min.	+ 91 2 4.6	764.7	— 5.1	W	o	80 22 26.2
					W	u	80 21 39.3
					O	o	159 45 38.9
					O	u	159 46 24.8
Febr. 10	ε Urs. min.	+ 97 47 23.5	760.4	— 2.8	O	o	286 30 22.7
					O	u	286 31 8.2
					W	o	193 36 32.1
					W	u	193 35 45.1
	γ Orionis	+ 6 14 59.1	760.4	— 2.9	W	o	285 8 10.1
					W	u	285 8 56.3
					O	o	194 58 42.9
					O	u	194 57 55.6
	α Orionis	+ 7 23 9.0	760.4	— 3.9	O	o	196 6 54.2
					O	u	196 6 6.0
					W	o	284 0 4.5
					W	u	284 0 47.4
	δ Urs. min.	+ 93 23 35.6	760.4	— 3.8	W	o	198 0 18.2
					W	u	197 59 32.5
					O	o	282 6 35.1
					O	u	282 7 22.6
	γ Gemin.	+ 16 29 34.3	760.4	— 4.6	O	o	205 13 16.3
					O	u	205 12 29.8
					W	o	274 53 40.7
					W	u	274 54 25.9
	54 H. Cephei	+ 87 13 16.2	760.4	— 4.9	W	o	204 10 37.6
					W	u	204 9 54.5
					O	o	275 56 14.6
					O	u	275 57 8.2
	λ Gemin.	+ 16 44 12.4	760.4	— 5.2	O	o	205 27 55.5
					O	u	205 27 10.2
					W	o	274 39 0.2
					W	u	274 39 45.7
	β Can. min.	+ 8 30 29.9	760.4	— 5.0	W	o	282 52 40.9
					W	u	282 53 28.2
					O	o	197 14 13.2
					O	u	197 13 28.0
	α Urs. min.	+ 91 2 4.9	760.4	— 5.2	O	o	279 45 4.7
					O	u	279 45 51.2
					W	o	200 21 49.1
					W	u	200 21 3.4
Febr. 12	ε Urs. min.	+ 97 47 23.8	757.6	+ 0.2	W	o	193 36 26.6
					W	u	193 35 40.0
					O	o	286 30 20.0
					O	u	286 31 4.1
Febr. 24	ε Urs. min.	+ 97 47 25.3	765.0	+ 0.1	O	o	286 30 19.9
					O	u	286 31 6.5
					W	o	193 36 26.7
					W	u	193 35 36.7

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1894 Febr. 24	γ Orionis	+ 6° 14′ 58″.7	765.0	+ 0°.1	W	o	285° 8′ 4″.3
					W	u	285 8 52.4
					O	o	194 58 37.2
					O	u	194 57 50.5
	α Orionis	+ 7 23 8.6	765.0	— 0.7	O	o	196 6 47.4
					O	u	196 6 0.5
					W	o	283 59 57.8
					W	u	284 0 42.7
	δ Urs. min.	+ 93 23 38.5	765.0	— 0.9	W	o	198 0 10.7
					W	u	197 59 23.6
					O	o	282 6 34.7
					O	u	282 7 21.6
	γ Gemin.	+ 16 29 34.3	765.0	— 1.0	O	o	205 13 14.4
					O	u	205 12 24.4
					W	o	274 53 36.8
					W	u	274 54 20.7
	51 H. Cephei	+ 87 13 19.6	765.0	— 1.1	W	o	204 10 28.5
					W	u	204 9 45.3
					O	o	275 56 14.8
					O	u	275 57 2.4
	λ Gemin.	+ 16 44 12.5	765.0	— 1.5	O	o	205 27 52.2
					O	u	205 27 5.3
					W	o	274 38 59.4
					W	u	274 39 41.1
	β Can. min.	+ 8 30 29.5	765.0	— 1.5	W	o	282 52 37.2
					W	u	282 53 23.2
					O	o	197 14 9.2
					O	u	197 13 24.0
	λ Urs. min.	+ 91 2 8.9	765.0	— 1.6	O	o	279 45 3.6
					O	u	279 45 49.7
					W	o	200 21 40.5
					W	u	200 20 53.4
Febr. 25	ε Urs. min.	+ 97 47 25.3	759.0	+ 0.9	W	o	313 33 27.2
					W	u	313 32 38.9
					O	o	46 27 20.1
					O	u	46 28 9.2
	γ Orionis	+ 6 14 58.7	759.0	+ 1.2	O	o	314 55 40.3
					O	u	314 54 56.4
					W	o	45 5 9.8
					W	u	45 5 55.6
	α Orionis	+ 7 23 8.6	759.0	+ 0.4	W	o	43 56 58.6
					W	u	43 57 44.6
					O	o	316 3 47.8
					O	u	316 3 3.2
	δ Urs. min.	+ 93 23 38.7	759.0	— 0.1	O	o	42 3 35.4
					O	u	42 4 22.9
					W	o	317 57 12.9
					W	u	317 56 26.2
	γ Gemin.	+ 16 29 34.3	759.0	— 0.2	W	o	34 50 34.1
					W	u	34 51 21.7
					O	o	325 10 12.6
					O	u	325 9 26.7

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1894 Febr. 25	51 H. Cephei	+ 87° 43′ 19″.8	759.0	— 0°.2	O	o	35° 53′ 16″.3
					O	u	35 54 3.2
					W	o	324 7 30.3
					W	u	324 6 45.1
	λ Gemin.	+ 16 44 12.5	759.0	— 0.3	W	o	34 35 53.4
					W	u	34 36 38.5
					O	o	325 24 54.0
					O	u	325 24 7.2
	β Can. min.	+ 8 30 29.5	759.0	— 0.1	O	o	347 11 11.0
					O	u	347 10 25.0
					W	o	12 49 36.5
					W	u	12 50 23.2
	λ Urs. min.	+ 94 2 9.4	759.0	— 0.6	W	o	320 18 12.1
					W	u	320 17 55.2
					O	o	39 12 4.1
					O	u	39 12 50.7
Febr. 26	ε Urs. min.	+ 97 47 25.4	757.7	+ 5.0	O	o	46 27 21.6
					O	u	46 28 9.6
					W	o	313 33 27.5
					W	u	313 32 11.1
	γ Orionis	+ 6 14 58.7	757.7	+ 4.9	W	o	15 5 7.2
					W	u	15 5 54.9
					O	o	314 55 10.2
					O	u	314 54 54.3
	α Orionis	+ 7 23 8.6	757.7	+ 4.2	O	o	316 3 19.6
					O	u	316 3 3.1
					W	o	13 56 57.9
					W	u	13 57 15.7
	δ Urs. min.	+ 93 23 38.9	757.7	+ 3.9	W	o	317 57 11.5
					W	u	317 56 25.2
					O	o	12 3 33.8
					O	u	12 4 51.5
	γ Gemin.	+ 16 29 31.1	757.7	+ 3.1	O	o	325 10 12.6
					O	u	325 9 25.3
					W	o	34 50 35.0
					W	u	34 51 21.5
	51 H. Cephei	+ 87 13 20.0	757.7	+ 3.3	W	o	324 7 30.9
					W	u	324 6 11.2
					O	o	35 53 16.8
					O	u	35 54 2.1
	λ Gemin.	+ 16 44 12.6	757.7	+ 3.2	O	o	325 24 53.2
					O	u	325 24 6.9
					W	o	34 35 52.6
					W	u	34 36 39.8
	β Can. min.	+ 8 30 29.5	757.7	+ 3.0	W	o	12 49 36.3
					W	u	12 50 21.0
					O	o	317 11 9.6
					O	u	317 11 22.9
	λ Urs. min.	+ 94 2 9.1	757.7	+ 2.9	O	o	39 12 6.2
					O	u	39 12 52.3
					W	o	320 18 13.8
					W	u	320 17 55.0

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1891 März 12	δ Cancri	+ 18° 33′ 17″.0	748.4	+ 0°.1	O	o	327° 14′ 0′.0
					O	u	327 13 13.2
					W	o	32 46 52.0
					W	u	32 47 39.5
	76 Drac.	+ 97 52 39.5	748.4	+ 0.1	W	o	313 28 13.2
					W	u	313 27 27.0
					O	o	46 32 35.8
					O	u	46 33 23.9
	ϑ Hydrae	+ 2 46 22.2	748.4	+ 0.4	O	o	311 27 5.5
					O	u	311 26 17.9
					W	o	48 33 46.4
					W	u	48 34 33.3
	1 H. Drac.	+ 81 48 38.9	748.4	0.0	W	o	329 32 12.9
					W	u	329 31 28.4
					O	o	30 28 36.4
					O	u	30 29 23.7
	π Leonis	+ 8 33 58.0	748.4	— 0.6	O	o	317 14 40.7
					O	u	317 13 55.8
					W	o	42 46 12.1
					W	u	42 46 58.7
	α Leonis	+ 12 29 56.4	748.4	— 0.1	W	o	38 50 14.4
					W	u	38 50 59.2
					O	o	321 10 38.0
					O	u	321 9 53.9
	30 H. Cam.	+ 83 6 54.2	748.4	— 0.1	O	o	31 46 53.0
					O	u	31 47 40.6
					W	o	328 14 0.3
					W	u	328 13 14.5
März 20	δ Cancri	+ 18 33 17.5	743.5	— 0.6	W	o	32 46 53.8
					W	u	32 47 41.4
					O	o	327 14 1.5
					O	u	327 13 15.5
	76 Drac.	+ 95 52 41.4	743.5	— 0.6	O	o	46 32 42.6
					O	u	46 33 29.4
					W	o	——
					W	u	——
	ϑ Hydrae	+ 2 46 22.0	743.5	— 0.7	W	o	48 33 48.6
					W	u	48 34 34.8
					O	o	311 27 7.2
					O	u	311 26 22.3
	1 H. Drac.	+ 81 48 41.3	743.5	— 0.9	O	o	30 28 41.9
					O	u	30 29 28.6
					W	o	329 32 15.7
					W	u	329 31 28.6
	π Leonis	+ 8 33 58.1	743.5	— 0.9	W	o	42 46 12.8
					W	u	42 46 59.7
					O	o	317 14 42.1
					O	u	317 13 55.4
	α Leonis	+ 12 29 56.7	743.5	— 0.9	O	o	321 10 40.2
					O	u	321 9 54.9
					W	o	38 50 14.4
					W	u	38 51 1.2

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1891 März 20	30 H. Cam.	+ 83° 6′ 56″.4	743.5	— 1°.0	W	o	328° 13′ 59″.8
					W	u	328 13 43.7
					O	o	31 46 55.5
					O	u	31 47 43.3
April 6	76 Drac.	+ 97 52 44.3	747.8	+ 6.3	O	o	166 32 1.6
					O	u	166 32 48.9
					W	o	73 27 33.3
					W	u	73 26 47.2
	1 H. Drac.	+ 81 48 44.6	747.8	+ 5.3	O	o	150 28 2.1
					O	u	150 28 49.7
					W	o	89 31 30.1
					W	u	89 30 43.4
	π Leonis	+ 8 33 58.5	747.8	+ 4.9	W	o	——
					W	u	——
					O	o	77 14 1.6
					O	u	77 13 14.1
	α Leonis	+ 12 29 57.4	747.8	+ 4.7	O	o	81 10 3.8
					O	u	81 9 16.1
					W	o	158 49 31.2
					W	u	158 50 18.4
April 19	ϑ Hydrae	+ 2 46 22.4	755.0	+ 6.2	W	o	168 32 47.1
					W	u	168 33 32.9
					O	o	71 26 7.1
					O	u	71 25 21.7
	1 H. Drac.	+ 81 48 46.5	755.0	+ 5.9	O	o	150 27 46.1
					O	u	150 28 33.3
					W	o	89 31 9.3
					W	u	89 30 24.6
	π Leonis	+ 8 33 59.1	755.0	+ 5.4	W	o	162 45 12.9
					W	u	162 45 55.7
					O	o	77 13 42.2
					O	u	77 12 57.7
	α Leonis	+ 12 29 58.2	755.0	+ 5.2	O	o	81 9 44.0
					O	u	81 8 57.4
					W	o	158 49 44.4
					W	u	158 49 57.1
	30 H. Cam.	+ 83 7 3.4	755.0	+ 4.9	W	o	88 12 52.6
					W	u	88 12 6.4
					O	o	151 46 4.3
					O	u	151 46 51.1
Juli 16	ε Urs. min.	+ 82 13 4.4	748.5	+ 17.3	W	o	329 7 51.4
					W	u	329 7 5.0
					O	o	30 53 7.0
					O	u	30 53 52.8
	α Ophiuchi	+ 12 38 23.8	748.5	+ 17.0	O	o	321 19 8.6
					O	u	321 18 23.0
					W	o	38 41 51.6
					W	u	38 42 35.1
	β Ophiuchi	+ 4 36 47.7	748.5	+ 16.9	W	o	46 43 26.2
					W	u	46 44 11.9
					O	o	313 17 31.7
					O	u	313 16 45.0

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1894 Juli 16	δ Urs. min.	+ 86° 36′ 45″.9	748.5	+ 16°.9	O	o	35° 46′ 46″.7
					O	u	35 47 33.8
					W	o	324 44 10.4
					W	u	324 43 25.3
	109 Herculis	+ 21 43 15.1	748.5	+ 16.5	W	o	29 36 56.0
					W	u	29 37 41.6
					O	o	330 24 0.7
					O	u	330 23 15.2
	51 H. Cephei	+ 92 46 59.8	748.5	+ 16.1	O	o	41 27 1.1
					O	u	41 27 49.1
					W	o	318 33 57.3
					W	u	318 33 10.6
Juli 21	ε Urs. min.	+ 82 43 5.5	752.9	+ 16.4	O	o	30 53 8.4
					O	u	30 53 53.9
					W	o	329 7 47.5
					W	u	329 7 1.7
	α Ophiuchi	+ 12 38 24.6	752.9	+ 15.8	W	o	38 41 46.8
					W	u	38 42 33.4
					O	o	321 19 9.9
					O	u	321 18 21.7
	β Ophiuchi	+ 4 36 48.2	752.9	+ 15.4	O	o	313 17 34.4
					O	u	313 16 47.0
					W	o	46 43 26.6
					W	u	46 44 14.5
	δ Urs. min.	+ 86 36 47.3	752.9	+ 15.0	W	o	324 44 9.5
					W	u	324 43 22.0
					O	o	35 46 49.0
					O	u	35 47 35.5
	109 Herculis	+ 21 43 16.1	752.9	+ 14.9	O	o	330 24 2.6
					O	u	330 23 16.0
					W	o	29 36 54.9
					W	u	29 37 42.6
	51 H. Cephei	+ 92 47 1.3	752.9	+ 14.8	W	o	318 33 56.1
					W	u	318 33 8.1
					O	o	41 27 1.7
					O	u	41 27 49.1
	ζ Aquilae	+ 13 42 8.6	752.9	+ 14.3	O	o	322 22 52.2
					O	u	322 22 6.7
					W	o	37 38 5.0
					W	u	37 38 51.8
	λ Urs. min.	+ 88 58 8.1	752.9	+ 14.1	W	o	322 22 46.9
					W	u	322 22 0.1
					O	o	37 38 10.9
					O	u	37 38 56.9
Juli 23	ε Urs. min.	+ 82 43 5.8	750.9	+ 15.2	O	o	150 53 19.4
					O	u	150 54 6.5
					W	o	89 8 3.5
					W	u	89 7 17.7
	α Ophiuchi	+ 12 38 24.9	750.9	+ 14.8	W	o	158 41 57.5
					W	u	158 42 44.3
					O	o	81 19 23.2
					O	u	81 18 36.1

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1891 Juli 23	β Ophiuchi	+ 4°36′48″.4	750.9	+ 14°6	O	o	73°17′47″.3
					O	u	73 17 0.3
					W	o	166 43 35.4
					W	u	166 44 20.9
	δ Urs. min.	+ 86 36 47.7	750.9	+ 14.1	W	o	84 44 19.0
					W	u	84 43 34.6
					O	o	155 16 59.2
					O	u	155 17 45.4
	109 Herculis	+ 21 43 16.5	750.9	+ 13.9	O	o	90 24 13.5
					O	u	90 23 29.5
					W	o	149 37 6.4
					W	u	149 37 53.8
	54 H. Cephei	+ 92 47 1.8	750.9	+ 13.4	W	o	78 34 6.3
					W	u	78 33 19.3
					O	o	161 27 13.0
					O	u	161 28 1.0
	ζ Aquilae	+ 13 42 8.9	750.9	+ 13.0	O	o	82 23 7.4
					O	u	82 22 19.5
					W	o	157 38 14.6
					W	u	157 39 0.0
	λ Urs. min.	+ 88 58 8.7	750.9	+ 12.9	W	o	82 22 58.6
					W	u	82 22 13.2
					O	o	157 38 18.7
					O	u	157 39 6.5
Juli 28	ε Urs. min.	+ 82 13 6.7	746.4	+ 15.0	W	o	89 7 59.4
					W	u	89 7 15.9
					O	o	150 53 17.9
					O	u	150 54 3.6
	α Ophiuchi	+ 12 38 25.6	746.4	+ 14.8	O	o	84 19 21.0
					O	u	84 18 34.9
					W	o	158 41 54.7
					W	u	158 42 42.8
	β Ophiuchi	+ 4 36 48.9	746.4	+ 14.9	W	o	166 43 32.8
					W	u	166 44 18.6
					O	o	73 17 44.8
					O	u	73 16 57.6
	δ Urs. min.	+ 86 36 49.0	746.4	+ 13.9	O	o	155 17 1.0
					O	u	155 17 46.5
					W	o	84 44 17.1
					W	u	84 43 32.8
Juli 30	ε Urs. min.	+ 82 13 7.0	745.7	+ 16.0	O	o	270 53 14.7
					O	u	270 54 2.4
					W	o	209 7 55.7
					W	u	209 7 8.1
	α Ophiuchi	+ 12 38 25.8	745.7	+ 15.5	W	o	278 41 53.1
					W	u	278 42 38.1
					O	o	204 19 16.5
					O	u	204 18 30.1
	β Ophiuchi	+ 4 36 49.1	745.7	+ 15.8	O	o	193 17 39.5
					O	u	193 16 52.8
					W	o	286 43 27.6
					W	u	286 44 14.4

	Name	δ app.	Bar.	Th.	Kr.	F.	Ablesung
			mm				
1891 Juli 30	109 Herculis	+ 21° 43′ 17.″9	745.7	+ 15.°1	W	o	269° 37′ 0.″0
					W	u	269 37 46.0
					O	o	210 24 7.7
					O	u	210 23 23.7
	51 H. Cephei	+ 92 47 3.8	745.7	+ 14.8	O	o	281 27 10.5
					O	u	284 27 56.7
					W	o	198 33 58.5
					W	u	198 33 10.3
August 5	α Ophiuchi	+ 12 38 26.5	747.9	+ 13.9	W	o	278 41 52.6
					W	u	278 42 38.3
					O	o	204 19 18.3
					O	u	204 18 31.2
	β Ophiuchi	+ 4 36 49.6	747.9	+ 13.9	O	o	193 17 41.1
					O	u	193 16 54.7
					W	o	286 43 27.8
					W	u	286 44 16.2
	δ Urs. min.	+ 86 36 50.9	747.9	+ 13.6	W	o	204 44 11.0
					W	u	204 43 24.3
					O	o	275 16 58.0
					O	u	275 17 44.8
	109 Herculis	+ 21 43 18.9	747.9	+ 13.0	O	o	210 24 8.2
					O	u	210 23 23.9
					W	o	269 37 2.5
					W	u	269 37 46.0
	51 H. Cephei	+ 92 47 5.3	747.9	+ 12.6	W	o	198 33 55.6
					W	u	198 33 10.0
					O	o	281 27 11.0
					O	u	281 27 58.6
	ζ Aquilae	+ 13 42 11.2	747.9	+ 12.2	O	o	202 23 1.1
					O	u	202 22 14.1
					W	o	277 38 6.5
					W	u	277 38 53.6
	λ Urs. min.	+ 88 58 12.8	747.9	+ 12.1	W	o	202 22 47.1
					W	u	202 22 0.9
					O	o	277 38 21.0
					O	u	277 39 7.2

Zur Ableitung der Zenithpunkte wurden nur diejenigen Beobachtungen herangezogen, welche vollkommen einwurfsfrei sind. Nach der unten zusammengestellten Uebersicht sind Veränderungen im Laufe eines Abends nirgends zu constatiren, wofür auch die vorzügliche Constanz von Abend zu Abend spricht. Für 1890 December 7 sind 2 Zenithpunkte berechnet, da nach 30 H. Cam. eine grössere Pause stattgefunden hat, in der wahrscheinlich die Befestigungsschrauben des Niveaus angezogen worden sind, wie dies öfters zu Beginn eines Beobachtungsabends geschehen ist, ohne dass dies besonders notirt wurde; daraus erklären sich denn auch einige Sprünge, wie von Jan. 29

zu Febr. 9, Febr. 10 zu Febr. 12 etc. Einige Abende schienen darauf hinzuweisen, dass zwischen Zenithpunkten aus Nord- resp. Südsternen ein Unterschied bestände; eine Untersuchung darüber hat aber nichts derartiges nachzuweisen vermocht.

Die Einführung der Zenithpunkte bei der Reduction dieser Beobachtungen kann natürlich an den Endresultaten ebenso wenig ändern, wie Biegung, Standcorrectionen etc., aber sie ermöglicht erst ein sicheres Urtheil über die Güte des Instrumentes und den Werth der Beobachtungen.

Da stets mit dem rechten Auge beobachtet wurde, war man gezwungen, bei Südsternen in Fernrohr West, bei Polsternen Fernrohr Ost, dem Kopfe eine etwas gezwungene Lage zu geben. Infolge dessen war es sehr wahrscheinlich, dass die veränderte Lage des Auges einen systematischen Unterschied zwischen den beiden Kreislagen hervorbringen würde, der, ohne Einfluss auf den Zenithpunkt, bei Polsternen entgegengesetzten Sinn haben musste als bei Südsternen. Zu einem Versuche, diesen Unterschied aufzufinden, wurden die beiden grösseren, innerlich gut übereinstimmenden Reihen des Februar und Juli verwendet. Sie gaben aus 42 Differenzen (Polsterne) und 49 Differenzen (Südsterne) die Differenz Kr. O. — Kr. W.

$$+ 0''.11 \text{ bezw. } - 0''.12$$

mit einem mittleren Fehler von je $\pm 0''.14$. Obwohl die Unsicherheit grösser ist als die gesuchte Grösse, lässt doch vielleicht das entgegengesetzte Vorzeichen einen kleinen Unterschied vermuthen. Nachstehend sind die Zenithpunkte zusammengestellt.

Tafel B.

	Sterne	Zenithpunkte	Abendmittel
1890 Dec. 11	S	120° 5′ 51″.8	120° 5′ 52″.7
	N	52.0	
	S	54.2	
	N	53.8	
	S	52.0	
Dec. 7	N	240 3 19.7	240 3 19.9
	N	20.2	
	S	22.0	3 22.7
	N	22.4	
	S	23.2	
	N	23.1	

	Sterne	Zenithpunkte			Abendmittel		
1890 Dec. 11	S	240°	3′	″	240°	3′	23.″0
	S			23.2			
	N			22.8			
Dec. 14	N	240	3	22.7	240	3	24.0
	S			25.4			
	S			23.3			
	N			24.0			
	S			24.4			
Dec. 15	S	0	3	38.2	0	3	37.0
	N			35.9			
	S			38.0			
	N			36.0			
1891 Jan. 3	S	0	3	35.5	0	3	35.9
	N			35.9			
	S			36.0			
	N			36.4			
Jan. 29	N	120	4	44.2	120	4	44.9
	S			44.7			
	S			44.7			
	N			44.7			
	S			45.8			
	N			44.4			
	S			45.6			
	S			44.0			
	N			45.9			
Febr. 9	N	120	4	2.0	120	4	2.0
	S			2.3			
	S			1.5			
	N			2.6			
	S			1.7			
	N			2.4			
	S			2.0			
	S			1.7			
	N			2.2			
Febr. 10	N	240	3	27.0	240	3	27.2
	S			26.2			
	S			27.2			
	N			27.0			
	S			28.1			
	N			26.7			
	S			27.8			
	S			27.5			
	N			27.0			

	Sterne	Zenithpunkte	Abendmittel
1891 Febr.12	N	240° 3′ 22″6	240° 3′ 22″6
Febr.24	N	240 3 22.4	240 3 22.5
	S	21.0	
	S	22.0	
	N	22.6	
	S	23.2	
	N	22.7	
	S	23.3	
	S	23.4	
	N	21.7	
Febr.25	N	0 0 23.8	0 0 23.7
	S	25.4	
	S	23.5	
	N	24.3	
	S	23.7	
	N	23.7	
	S	23.2	
	S	23.9	
	N	23.0	
Febr.26	N	0 0 24.9	0 0 23.7
	S	24.1	
	S	24.1	
	N	22.9	
	S	23.5	
	N	23.5	
	S	23.1	
	S	23.1	
	N	24.3	
März 12	S	0 0 26.1	0 0 25.9
	N	24.9	
	S	25.7	
	N	25.2	
	S	26.8	
	S	25.6	
	N	27.4	
März 20	S	0 0 28.0	0 0 28.0
	N		
	S	28.2	
	N	28.6	
	S	27.4	
	S	27.6	
	N	28.0	

	Sterne	Zenithpunkte	Abendmittel
1891 April 6	N	119° 59′ 47″.7	119° 59′ 47″.1
	N	46.3	
	S		
	S	47.3	
April 19	S	119 59 27.2	119 59 27.7
	N	28.3	
	S	27.1	
	S	27.4	
	N	28.6	
Juli 16	N	0 0 29.0	0 0 28.9
	S	29.5	
	S	28.6	
	N	29.0	
	S	27.8	
	N	29.5	
Juli 21	N	0 0 27.8	0 0 28.7
	S	27.9	
	S	29.8	
	N	28.9	
	S	29.0	
	N	28.7	
	S	28.9	
	N	28.7	
Juli 23	N	120 0 41.7	120 0 40.3
	S	40.2	
	S	40.9	
	N	39.5	
	S	40.8	
	N	39.9	
	S	40.3	
	N	39.2	
Juli 28	N	120 0 39.1	120 0 38.8
	S	38.3	
	S	38.4	
	N	39.3	
Juli 30	N	240 0 35.2	240 0 34.3
	S	34.4	
	S	33.5	
	S	34.3	
	N	34.2	

	Sterne	Zenithpunkte	Abendmittel
1891 Aug. 5	S	240° 0′ 35″0	240° 0′ 34″4
	S	34.9	
	N	34.5	
	S	35.1	
	N	33.8	
	S	33.8	
	N	34.0	

Die folgende Tafel giebt die einzelnen Breiten. Die Columnen sind ohne weiteres verständlich: Datum, Name des Sterns, Culmination, endlich φ. Die Columnen I und II werden weiter unten besprochen. Die in eckige Klammern geschlossenen Zahlen haben nur halbes Gewicht. Am Schluss der Tafel sind die Resultate der Beobachtung von α Urs. min. 1891 Juli 9 und 13 angeführt.

Tafel C.

	Name	Culm.	φ	I	II
1890 Dec. 1	α Equulei . .		51° 20′ 6″4	5″4	5″9
	1 H. Drac. . .	u	4.1	5.1	4.6
	ϑ Pegasi. . .		6.8	5.8	6.3
	30 H. Cam. . .	u	3.7	4.7	4.2
	ζ Pegasi . . .		6.0	5.1	5.6
Dec. 7	1 H. Drac. . .	u	4.8	5.8	6.2
	30 H. Cam. . .	u	4.9	5.9	6.3
	δ Piscium . .		7.4	6.4	6.0
	43 H. Ceph. .	o	4.4	5.2	5.6
	ε Piscium . .		8.5	7.5	7.1
	α Urs. min. .	o	4.1	5.0	5.4
Dec. 11	δ Piscium . .		[6.7]	[5.7]	[5.3]
	ε Piscium . .		8.6	7.6	7.2
	α Urs. min. .	o	5.4	6.3	6.7
Dec. 14	1 H. Drac. . .	u	3.9	4.9	5.3
	ε Pegasi . . .		6.7	5.8	5.4
	ϑ Pegasi. . .		7.2	6.2	5.8
	30 H. Cam. . .	u	4.2	5.2	5.6
	ζ Pegasi . . .		6.7	5.8	5.4
Dec. 15	δ Piscium . .		6.7	5.7	5.6
	43 H. Ceph. .	o	4.8	5.6	5.7
	ε Piscium . .		6.1	5.1	5.0
	α Urs. min. .	o	4.9	5.8	5.9

		Name	Culm.	φ	I	II
1891	Jan. 3	δ Piscium . .		51° 20′ 5″.8	4″.8	4″.7
		43 H. Ceph. .	o	6.3	7.1	7.2
		ε Piscium . .		6.9	5.9	5.8
		α Urs. min. .	o	5.5	6.4	6.5
	Jan. 29	ε Urs. min.. .	u	6.0	7.0	6.5
		γ Orionis . .		4.1	3.1	3.6
		α Orionis . .		6.9	5.9	6.4
		δ Urs. min. .	u	5.4	6.3	5.8
		γ Gemin. . .		5.4	4.6	5.1
		51 H. Ceph. .	o	5.0	5.8	5.3
		λ Gemin. . .		5.8	4.8	5.3
		β Can. min. .		5.7	4.7	5.2
		λ Urs. min. .	u	6.8	7.7	7.2
	Febr. 9	ε Urs. min. .	u	6.0	7.0	6.5
		γ Orionis . .		4.2	3.2	3.7
		α Orionis . .		5.9	4.9	5.4
		δ Urs. min. .	u	5.6	6.5	6.0
		γ Gemin. . .		5.3	4.5	5.0
		51 H. Ceph. .	o	4.9	5.7	5.2
		λ Gemin. . .		5.1	4.3	4.8
		β Can. min. .		7.7	6.7	7.2
		λ Urs. min. .	u	5.0	5.9	5.4
	Febr. 10	ε Urs. min. .	u	5.1	6.1	6.5
		γ Orionis . .		6.1	5.1	4.6
		α Orionis . .		7.6	6.6	6.2
		δ Urs. min. .	u	3.8	4.7	5.1
		γ Gemin. . .		6.4	5.6	5.2
		51 H. Ceph. .	o	4.0	4.8	5.2
		λ Gemin. . .		7.4	6.6	6.2
		β Can. min. .		6.8	5.8	5.4
		λ Urs. min. .	u	4.0	4.9	5.3
	Febr. 12	ε Urs. min. .	u	4.5	5.5	5.9
	Febr. 24	ε Urs. min. .	u	4.5	5.5	5.9
		γ Orionis . .		5.9	4.9	4.5
		α Orionis . .		6.7	5.7	5.3
		δ Urs. min. .	u	3.0	3.9	4.3
		γ Gemin. . .		6.8	6.0	5.6
		51 H. Ceph. .	o	3.7	4.5	4.9
		λ Gemin. . .		7.1	6.3	5.9
		β Can. min. .		6.3	5.3	4.9
		λ Urs. min. .	u	4.0	4.9	5.3
	Febr. 25	ε Urs. min. .	u	4.5	5.5	5.6

	Name	Culm.	φ	I	II
1891 Febr. 25	γ Orionis . .		51° 20′ 5″.9	4″.9	4″.8
	α Orionis . .		6.6	5.6	5.5
	δ Urs. min. .	u	3.9	4.8	4.9
	γ Gemin. . .		5.4	4.6	4.5
	51 H. Ceph. .		3.8	4.6	4.7
	λ Gemin. . .		5.1	4.3	4.2
	β Can. min. .		5.4	4.4	4.3
	λ Urs. min. .	u	4.7	5.6	5.7
Febr. 26	ε Urs. min.. .	u	4.7	5.7	5.8
	γ Orionis . .		5.6	4.6	4.5
	α Orionis . .		6.2	5.2	5.1
	δ Urs. min. .	u	4.2	5.1	5.2
	γ Gemin. . .		6.0	5.2	5.1
	51 H. Ceph. .	o	3.9	4.7	4.8
	λ Gemin. . .		5.7	4.9	4.8
	β Can. min. .		6.4	5.4	5.3
	λ Urs. min. .	u	4.5	5.4	5.5
März 12	δ Cancri. . .		6.5	5.7	5.6
	76 Drac.. . .	u	4.6	5.6	5.7
	ϑ Hydrae . .		6.2	5.1	5.0
	1 H. Drac. . .	o	4.1	4.8	4.9
	π Leonis . .		6.6	5.6	5.5
	α Leonis. . .		6.1	5.2	5.1
	30 H. Cam. .	o	4.5	5.2	5.3
März 20	δ Cancri. . .		7.0	6.2	6.1
	76 Drac.. . .	u	[3.4]	[4.4]	[4.5]
	ϑ Hydrae . .		5.5	4.4	4.3
	1 H. Drac. . .	o	4.7	5.4	5.5
	π Leonis . .		6.8	5.8	5.7
	α Leonis . .		6.8	5.9	5.8
	30 H. Cam.. . .	o	5.0	5.7	5.8
April 6	76 Drac.. . .	u	6.8	7.8	7.3
	1 H. Drac. . .	o	5.0	5.8	5.3
	π Leonis . .		[7.8]	[6.8]	[7.3]
	α Leonis. . .		4.8	3.9	4.4
April 19	ϑ Hydrae . .		5.2	4.1	4.6
	1 H. Drac. . .	o	5.0	5.7	5.2
	π Leonis . .		6.3	5.3	5.8
	α Leonis. . .		4.9	4.0	4.5
	30 H. Cam. .	o	4.3	5.0	3.9
Juli 16	ε Urs. min.. .	o	3.5	4.2	4.3
	α Ophiuchi. .		7.5	6.6	6.5

		Name	Culm.	φ	I	II
1894 Juli	16	β Ophiuchi. .		54° 20′ 8.″0	7.″0	6.″9
		δ Urs. min. .	o	4.7	5.5	5.6
		109 Herculis .		6.0	5.3	5.2
		51 H. Ceph. .	u	4.2	5.1	5.2
Juli	21	ε Urs. min.. .	o	2.2	2.9	3.0
		α Ophiuchi .		6.7	5.8	5.7
		β Ophiuchi. .		7.3	6.3	6.2
		δ Urs. min. .	o	4.0	4.8	4.9
		109 Herculis .		5.8	5.1	5.0
		51 H. Ceph. .	u	4.6	5.5	5.6
		ζ Aquilae . .		8.1	7.2	7.1
		λ Urs. min. .	o	2.9	3.8	3.9
Juli	23	ε Urs. min.. .	o	4.6	5.3	4.8
		α Ophiuchi. .		5.5	4.6	5.1
		β Ophiuchi. .		5.5	4.5	5.0
		δ Urs. min. .	o	4.9	5.7	5.2
		109 Herculis .		5.8	5.1	5.6
		51 H. Ceph. .	u	4.7	5.6	5.1
		ζ Aquilae . .		5.8	4.9	5.4
		λ Urs. min. .	o	5.3	6.2	5.7
Juli	28	ε Urs. min.. .	o	5.1	5.8	5.3
		α Ophiuchi .		6.0	5.1	5.6
		β Ophiuchi. .		6.1	5.1	5.6
		δ Urs. min.. .	o	4.6	5.4	4.9
Juli	30	ε Urs. min.. .	o	3.7	4.4	4.8
		α Ophiuchi. .		6.9	6.0	5.6
		β Ophiuchi. .		6.5	5.5	5.1
		109 Herculis .		6.5	5.8	5.4
		51 H. Ceph. .	u	4.4	5.3	5.7
Aug.	5	α Ophiuchi .		6.8	5.9	5.5
		β Ophiuchi .		6.6	5.6	5.2
		δ Urs. min.. .	o	4.0	4.8	5.2
		109 Herculis .		8.0	7.3	6.9
		51 H. Ceph. .	u	4.3	5.2	5.6
		ζ Aquilae . .		7.4	6.5	6.1
		λ Urs. min. .	o	2.7	3.6	4.0
Juli	9	α Urs. min. .		4.1	5.0	5.1
				4.4	5.3	5.7
				5.5	6.4	5.9
				4.1	5.0	5.1
				4.2	5.1	5.5
				4.8	5.7	5.2

	Name	Culm.	φ	I	II
1891 Juli 13	α Urs. min. .		51° 20′ 4.″0	4.″9	5.″0
			4.4	5.3	5.7
			5.4	6.3	5.8
			4.8	5.7	5.8
			3.8	4.7	5.1
			4.2	5.1	4.6

Bei der Ableitung der Biegung ist vorausgesetzt worden, dass sie in der Form $b \sin z$ darstellbar ist; ob dies wirklich der Fall ist, kann aus den vorliegenden Zahlen nicht nachgewiesen werden, da z nur zwischen den Grenzen 30° und 50° schwankt, und infolge dessen bei der Kleinheit der Constanten Aenderungen proportional dem Sinus der Zenithdistanz zu unbedeutend sind. Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, dass zwischen den Breiten aus nördlichen und südlichen Sternen ein Unterschied besteht, der unabhängig von z ist. Man nehme nur an, dass sich das Objectiv in seiner Fassung ein wenig verstellt, so können daraus Unterschiede von mehreren Secunden entstehen; denn bei den geringen Dimensionen des Instrumentes entsprechen Bogensecunden Tausendsteln eines Millimeters. Die resultirende Biegung für die Zenithdistanz ist für

Zenithpunkt 0° = — 0.″97
120 = — 0.43
240 = — 1.32

das giebt nach obiger Annahme für den Horizont

— 1.″52
— 0.67 und im Mittel — 1.″41
— 2.03

Mit diesem Werthe von b sind sämmtliche Beobachtungen reducirt worden. Früher, vor Anbringung der Theilungsfehler, waren die Zahlen

z	b
0°	— 3.″46
120	+ 2.11
240	— 2.25

Die drei Werthe sind also durch Correction für Theilungsfehler einander bedeutend genähert worden; ja ihre Unterschiede sind

leicht zum Verschwinden zu bringen, wenn man nur die Durchmessercorrectionen an den betreffenden Stellen um 0″.1 bis 0″.2 ändert. Mit dieser Unsicherheit können immerhin die systematischen Theilungsfehler an einer Stelle bestimmt sein; denn bei einer Anzahl von 90 Durchmessern spielen die zufälligen Fehler der einzelnen Striche noch eine grosse Rolle. Wäre dies vorauszusehen gewesen, so wären vielleicht 180 Durchmessercorrectionen bestimmt worden; nach Abschluss der Untersuchung aber musste man sich begnügen, diese Fehler erkannt und zu ihrem grössten Theile eliminirt zu haben, es war also der Zweck vorliegender Arbeit erreicht.

Berechnet man nun die Biegung mit dem Mittelwerthe —1″.41, so bleiben demnach noch Unterschiede zwischen Breiten aus nördlichen und südlichen Sternen in den einzelnen Ständen, welche verschwinden, wenn man folgende Correctionen anbringt:

Zenithpunkt	0°	120°	240°
Für Südsterne	— 0″.07	+ 0″.47	— 0″.40
» Nordsterne	+ 0.07	— 0.47	+ 0.40

Es brauchen übrigens diese systematischen Correctionen nicht von Theilungsfehlern herzurühren, sondern sie können sehr leicht ihren Grund in verschiedenen Biegungen des Kreises in den drei Ständen haben infolge nicht ganz homogenen Materials. Dass diese Conjectur keine gezwungene ist, erhellt aus der Grösse eines Winkelwerthes von 0″.4 in Millimetern ausgedrückt: am Kreise ist $1'' = 0^{mm}.00078$, also $0''.4 = 0^{mm}.0003$.

In obiger Tafel C nun enthalten Columne I und II die für Biegung bezw. für Biegung und Standcorrection verbesserten Breiten.

Ueberblickt man die einzelnen Zahlen in Columne II, so fallen die Werthe bei ε Urs. min. und γ Orionis auf. Im Winter, in unterer Culmination, giebt ε Urs. min. ein zu grosses φ, im Sommer, in oberer Culmination, ein zu kleines. γ Orionis giebt eine zu kleine Breite. Bildet man die Differenzen zwischen dem Tagesmittel aus Sternen derselben Kategorie und dem betreffenden Sterne, so ergiebt sich für ε Urs. min. eine Correction von + 0″.55 für obere Culmination und — 0″.65 für untere Culmination, d. h. die Verbesserung von δ beträgt + 0″.60; sie hat für γ Orionis den Werth + 0″.83. Diese Correctionen sind natürlich keine absoluten, sondern sie bilden die Reduction auf δ Urs. min.,

51 H. Cephei, λ Urs. min., resp. auf α Orionis, γ Geminorum, λ Geminorum und β Can. min. Dass für das Instrument diese relativen Correctionen existiren, ist nicht zu bezweifeln; ob sie aber allgemein gültig sind, ist immerhin unsicher. Würde man die Correction der Declination nur aus Beobachtungen desselben Abends ableiten, so wäre das gleichbedeutend mit Weglassen des Sterns. Da jedoch diese Correctionen aus den Resultaten einer ganzen Reihe von Abenden berechnet sind, so gewinnt immerhin durch Mitnehmen des betr. Sterns die Sicherheit des betr. Tagesmittels.

In Tafel D befindet sich eine Zusammenstellung der Tagesmittel. In der 2. Columne bedeutet die erste Zahl die Anzahl der Polsterne, die zweite die der Südsterne, dann folgen die beiden Tagesmittel mit Fortlassung der Grade und Minuten, ihre Differenz, und schliesslich das Mittel aus Col. III und IV.

Tafel D.

	N S	Nord	Süd	N — S	Mittel	v
1890 December 1	2 : 3	4″.40	5″.93	— 1″.53	5″.16	— 0″.32
December 7	4 : 2	5.88	6.55	— 0.67	6.21	+ 0.73
December 11	1 : 2	6.70	6.57	+ 0.13	[6.63]	[+ 1.15]
December 14	2 : 3	5.45	5.53	— 0.08	5.49	+ 0.01
December 15	2 : 2	5.80	5.30	+ 0.50	5.55	+ 0.07
1891 Januar 3	2 : 2	6.85	5.25	+ 1.60	6.05	+ 0.57
Januar 29	4 : 5	6.05	5.28	+ 0.77	5.66	+ 0.18
Februar 9	4 : 5	5.62	5.58	+ 0.04	5.60	+ 0.12
Februar 10	4 : 5	5.37	5.68	— 0.31	5.52	+ 0.04
Februar 24	4 : 5	4.95	5.40	— 0.45	5.17	— 0.31
Februar 25	4 : 5	5.07	4.82	+ 0.25	4.94	— 0.54
Februar 26	4 : 5	5.17	5.12	+ 0.05	5.14	— 0.34
März 12	3 : 4	5.30	5.30	0.00	5.30	— 0.18
März 20	3 : 4	5.42	5.47	— 0.05	5.44	— 0.04
April 6	2 : 2	6.30	5.37	+ 0.93	5.83	+ 0.35
April 19	2 : 3	4.55	4.97	— 0.42	4.76	— 0.72
Juli 16	3 : 3	5.23	6.20	— 0.97	5.71	+ 0.23
Juli 21	4 : 4	4.50	6.00	— 1.50	5.25	— 0.23
Juli 23	4 : 4	5.35	5.27	+ 0.08	5.31	— 0.17
Juli 28	2 : 2	5.40	5.60	— 0.20	5.50	+ 0.02
Juli 30	2 : 3	5.55	5.37	+ 0.18	5.46	— 0.02
August 5	3 : 4	4.93	5.92	— 0.99	5.42	— 0.06
				Mittel	5.48	

Bildet man das Mittel aus allen Abenden und legt denselben gleiches Gewicht bei mit Ausnahme von 1890 Dec. 11, da diese Zahl nur auf einem Polsterne beruht, so ergeben sich die in der letzten Reihe angeführten übrigbleibenden Fehler.

Eine deutliche Aenderung von φ scheint sich in diesen Zahlen nicht auszusprechen, jedoch zeigen die übrigbleibenden Fehler, sowohl was Grösse als Vorzeichen anbetrifft, ein auffälliges Verhalten; doch muss eine Discussion so lange aufgeschoben werden, bis anderweitige, gleichzeitige und genauere Beobachtungen hierüber vorliegen. Das wahrscheinlichste Resultat wird man jedenfalls aus den obigen Tagesmitteln erhalten, wenn man einfach das Mittel aus allen nimmt; denn wenn auch einige der Zahlen vermöge der grösseren Anzahl der Sterne mehr Sicherheit besitzen, so könnte doch durch entsprechende Gewichtsvertheilung einer bestimmten Jahreszeit zu hoher Einfluss eingeräumt werden. Giebt man also allen Abenden gleiches Gewicht, nur 1890 Dec. 11 aus dem schon oben genannten Grunde das Gewicht $\frac{1}{2}$, so erhält man als wahrscheinlichsten Werth der Breite für die Mitte des Universalinstrumentes

$$51^\circ\ 20'\ 5''.48.$$

Dies giebt, reducirt auf den Hauptpfeiler der Sternwarte (Breitenunterschied $13^m.1 = 0''.42$)

$$51^\circ\ 20'\ 5''.90.$$

Zum Schluss mag noch Einiges über den Grad der Genauigkeit gesagt werden, welchen man mit diesem Instrumente erreichen kann.

Die Untersuchung der Theilungsfehler hat ergeben, dass der zufällige individuelle Theilungsfehler eines Durchmessers im Mittel die Grösse $\pm 0''.6 = 0^{mm}.0005$ besitzt. Die Unsicherheit einer Ablesung beträgt etwa 1". Der mittlere Fehler einer Pointirung auf einen Stern wurde aus der Unsicherheit der Distanz der horizontalen Doppelfäden hergeleitet, er ergiebt sich hieraus zu $\pm 0''.9$. Die aus den Beobachtungen der Südsterne berechnete Distanz zeigt keinen auffälligen Unterschied zwischen Kr. O. und Kr. W., wie bei der SCHNAUDER'schen Reihe, sie ergiebt sich übereinstimmend im Winter und Sommer zu $46''.10$. Dagegen resultirt aus den Polsternen ein grösserer Werth: $46''.60$ im Mittel, für Kr. O. $46''.87$, für Kr. W. $46''.33$. Da sich bei den Südsternen

nichts Auffallendes zeigt, so scheinen vielleicht bei Pointirungen auf Polsterne, infolge der verschiedenen Fadendicke (siehe die Bearbeitung der früheren Reihe) grössere systematische Fehler unterzulaufen. Sehr wahrscheinlich ist übrigens auch die Annahme, dass jenes eigenthümliche Verhalten des Instrumentes, welches weiter unten bei der Discussion der Zenithpunkte besprochen wird, die Ursache dieser Unterschiede ist.

Rechnet man den m. F. eines Zenithpunktes aus den Abweichungen vom Abendmittel, so erhält man dafür $\pm$ 0.″63.

Die Fehler der einzelnen Breitenbestimmungen wurden auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal wurden die Abweichungen vom Tagesmittel der betr. Sternart, sodann die vom allgemeinen Tagesmittel als übrigbleibende Fehler betrachtet. Da ergab sich denn das auffallende Resultat, dass nach der ersten Methode der m. F. eines φ kleiner ist, als der eines Z, $\pm$ 0.″56; nach der zweiten Berechnung, $\pm$ 0.″64, sind sie nahezu gleich, obwohl der Zenithpunkt, da er doch unabhängig von der Refraction wie von der Declination ist, mit der grösseren Genauigkeit bestimmt sein müsste. Es würde also hieraus folgen, dass die halbe Differenz der Kreisablesungen, die Zenithdistanz, genauer bestimmt wäre, als die halbe Summe, der Zenithpunkt. Dies wäre nur möglich, wenn die beiden Kreisablesungen in demselben Sinne entstellt würden, und zwar wechselnd bei dem einen Sterne mehr als bei dem andern. Ein Grund hierfür liesse sich finden in Nachziehungen des Mikroskopträgers bei grossen Bewegungen in Höhe. Da die Südsterne ihre Höhe während der Beobachtung stark ändern, wurde hierbei die Feinbewegung sehr ausgiebig verwandt, dagegen waren bei den Polsternen immer nur sehr kleine Bewegungen nöthig. Und in der That scheint sich diese Vermuthung zu bestätigen, wenn man den mittleren Fehler des Zenithpunktes in gleicher Weise wie bei φ berechnet; es ergiebt sich dann

bei Polsternen $\pm$ 0.″52,
» Südsternen $\pm$ 0.62.

Da nun das Mittel hieraus kleiner ist als der oben gefundene Werth, so scheint daraus zu folgen, dass doch ein systematischer Unterschied zwischen den Zenithpunkten aus Nord- und Südsternen existirt.

Aus den Abweichungen der Tagesmittel von der definitiven

Breite erhält man als m. F. eines Abends $\pm$ 0.″38, während er nach Massgabe des m. F. eines φ etwa $\pm$ 0.″25 sein müsste.

Der Grund hierfür liegt ohne Zweifel in den constanten Fehlern, mit denen ein Abend infolge ungenügender Elimination der Refraction behaftet ist, andererseits wird ein Schwanken der Polhöhe natürlich den Fehler auch vergrössern. Der m. F. des Schlusswerthes ist $\pm$ 0.″08.

Betrachtet man die übrigbleibenden Fehler in Tabelle D, so muss auffallen, dass bis 1891 Februar 10 die positiven Werthe vorherrschen; im Februar, März und April sind sie wesentlich negativ, und im Juli und August sind die Fehler sehr klein und ihre Summe nahe gleich Null. Nachdem die anderweitigen, gleichzeitigen Beobachtungen nach der HORREBOW-TALCOTT'schen Methode bekannt geworden waren, verglich ich dieselben mit den hiesigen Beobachtungen; es ergab sich eine ziemlich gute Uebereinstimmung. Da nun die Leipziger Beobachtungen sich viel zu ungleichmässig auf die verschiedenen Monate vertheilen, war es nicht angängig, diese Werthe graphisch auszugleichen. Um eine Interpolationsformel zu erhalten, wurde versucht, die Polhöhenschwankung als Function von sin ☉ und cos ☉ darzustellen. Einmal wurde allen Abenden gleiches Gewicht ertheilt, bei einer zweiten Ausgleichung wurde 1890 Dec. 11 aus schon früher angeführten Gründen das Gewicht $\frac{1}{2}$ gegeben.

Ich führe der Uebersicht halber hier noch einmal die beiden letzten Columnen der Tabelle D an, das Uebrige bedarf keiner Erklärung.

		v	I. Ausgleichung	v	II. Ausgleichung	v
1890 Dec. 1	51°20′5.″16	— 0.″32	5.″88	— 0.″72	5.″82	— 0.″66
Dec. 7	6.21	+ 0.73	85	+ 0.36	89	+ 0.41
Dec. 11	[6.63]	+[1.15]	84	+ 0.79	78	+[0.85]
Dec. 14	5.49	+ 0.01	83	— 0.34	77	— 0.28
Dec. 15	5.55	+ 0.07	82	— 0.27	77	— 0.22
1891 Jan. 3	6.05	+ 0.57	77	+ 0.28	73	+ 0.32
Jan. 29	5.66	+ 0.18	55	+ 0.11	53	+ 0.13
Febr. 9	5.60	+ 0.12	48	+ 0.12	46	+ 0.14
Febr. 10	5.52	+ 0.04	47	+ 0.05	46	+ 0.06
Febr. 24	5.17	— 0.31	44	— 0.27	44	— 0.27
Febr. 25	4.94	— 0.54	37	— 0.43	36	— 0.42
Febr. 26	5.14	— 0.34	36	— 0.22	36	— 0.24

		v	I. Ausgleichung	v	II. Ausgleichung	v
1891 März 12	51°20′5″.30	— 0″.18	5″.28	+ 0″.02	5″.29	+ 0″.01
März 20	5.44	— 0.04	24	+ 0.20	26	+ 0.18
April 6	5.83	+ 0.35	17	+ 0.66	20	+ 0.63
April 19	4.76	— 0.72	13	— 0.37	17	— 0.41
Juli 16	5.71	+ 0.23	36	+ 0.35	38	+ 0.33
Juli 21	5.25	— 0.23	39	— 0.14	41	— 0.16
Juli 23	5.31	— 0.17	41	— 0.10	41	— 0.10
Juli 28	5.50	+ 0.02	44	+ 0.06	44	+ 0.06
Juli 30	5.46	— 0.02	45	+ 0.01	46	0.00
Aug. 5	5.42	— 0.06	49	— 0.07	49	— 0.07
$\varphi =$	51°20′5″.48					
I. Ausgl.	5.51	— 0″.284	$\sin \odot$	— 0.276	$\cos \odot$	
II. Ausgl.	5.50	— 0.243	$\sin \odot$	— 0.245	$\cos \odot$	

Für die drei Reihen sind die Summen der Fehlerquadrate bezw. 2.97, 2.63, 2.26; dazu gehören als m. F. der Gewichtseinheit (Tagesmittel) ± 0″.38, ± 0″.37, ± 0″.34. Für die zweite, definitive Ausgleichung erhält man mit dem Werthe ± 0″.34 als m. F. der mittleren Polhöhe ± 0″.081 und der beiden Coëfficienten bezw. ± 0″.112 und ± 0″.122. Das Resultat der zweiten Ausgleichung dürfte wohl dem Werthe auf Seite 312 vorzuziehen sein, so dass das definitive Resultat dieser Beobachtungtreihe sein würde:

$$\varphi = 51^\circ\,20'\,5''.92 - 0''.344 \sin(\odot + 45^\circ.2)$$

gültig für den von den Beobachtungen überspannten Zeitraum, nämlich:

1890 December 1 bis 1891 August 5.

Wie schon gesagt, sind die Declinationen aus dem Berliner Jahrbuch interpolirt worden. Die Südsterne enthalten deshalb nicht die von der doppelten Mondlänge abhängigen Correctionen, ebenso einige Polsterne; es war daher wünschenswerth Sicherheit darüber zu erlangen, ob diese Vernachlässigung auf den Gang der Polhöhe ohne Einfluss sei. In der That ergab eine diesbezügliche Untersuchung, dass im Allgemeinen sich diese kleinen Correctionen vollkommen aufheben, nur die Tagesmittel der Februarbeobachtungen würden durchgängig einer kleinen positiven Correction bedürfen, + 0″.04, welche das Endresultat um + 0″.01 ändern würde.

H. Ambronn, *Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten anisotroper mikroskopischer Objecte.*

Es liegen bis jetzt nur sehr wenige Untersuchungen über die Brechungsexponenten von Objecten vor, die nur der mikroskopischen Beobachtung zugänglich sind. Der Grund dafür dürfte darin zu suchen sein, dass derartige Untersuchungen mit manchen Schwierigkeiten verknüpft und vor Allem sehr zeitraubend sind. Man muss sich eine grössere Anzahl von Flüssigkeiten herstellen, deren Brechungsexponenten eine Reihe mit geringen Differenzen bilden. Dies lässt sich bei Anwendung des Abbe'schen Refractometer ziemlich schnell ausführen. Viel umständlicher ist es, aus dieser Reihe eine Flüssigkeit herauszusuchen, in der die Umrisse eines gegebenen Objectes verschwinden. Man darf dann annehmen, dass die Brechungsexponenten der Flüssigkeit und des Objectes dieselben sind, vorausgesetzt, dass man es mit einem optisch isotropen Körper zu thun hat. Um grössere Empfindlichkeit bei der Vergleichung zu erzielen, hat Exner [1]) für diesen Zweck eine kleine Vorrichtung am Mikroskop angebracht, die er als Mikrorefractometer bezeichnet.

Dieselbe Methode lässt sich auch anwenden bei optisch anisotropen Objecten; nur muss man hier in der Weise verfahren, dass man über einem Nicol'schen Prisma beobachtet und die Polariationsebene zunächst mit der einen, sodann mit der anderen Elasticitätsaxe parallel stellt. Man hat also für jede

---

1) Vgl. Archiv für mikroskopische Anatomie Bd. XXV, S. 97.

dieser beiden Lagen die gleich stark brechende Flüssigkeit herauszusuchen; dadurch wird die Sache noch umständlicher.

Es ist nun eine theoretische Möglichkeit vorhanden, dieses Verfahren abzukürzen. Man kann leichter eine Flüssigkeit finden, deren Brechungsexponent zwischen den beiden gesuchten des anisotropen Objectes liegt, als zwei Flüssigkeiten, die gerade die gewünschte Uebereinstimmung zeigen. In einer solchen Flüssigkeit wird das anisotrope Object bei successiver Parallelstellung der Polarisationsebene mit den Elasticitätsaxen nicht verschwinden, sondern das eine Mal dichter, das andere Mal weniger dicht als das umgebende Medium erscheinen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, dass zwischen beiden Lagen ein Azimuth existirt, in dem ein vollständiges Verschwinden eintritt.

Man kann ferner ohne grosse Schwierigkeit noch eine oder auch noch mehrere Flüssigkeiten finden, deren Brechungsexponenten zwischen den beiden gesuchten liegen, und es lassen sich auch für diese Flüssigkeiten die Azimuthe bestimmen, in denen ein Verschwinden der Umrisse eintritt. Schon aus zwei solchen Winkelmessungen kann man die gesuchten Brechungsexponenten durch Rechnung ermitteln.

In der senkrecht zu den einfallenden Strahlen stehenden Durchschnittsfigur der Elasticitätsfläche sind die Halbaxen proportional den Quadratwurzeln aus den optischen Elasticitäten in diesen Richtungen; ebenso ist ein beliebiger Radiusvector proportional der Quadratwurzel aus der Elasticität in der zugehörigen Richtung. Kennt man nun die Richtung zweier Radien und die entsprechenden Elasticitäten, so kann man auch die den Axen entsprechenden Elasticitäten berechnen. Es seien die beiden Halbaxen: $\sqrt{e_0}$ und $\sqrt{e_e}$; ein Radiusvector sei: $\sqrt{e_m}$ und seine Richtung durch den Winkel α gegeben. Dann ist nach bekannter Formel:

$$e_m = \frac{e_0 e_e}{e_0 \cos^2 \alpha + e_e \sin^2 \alpha},$$

ebenso ist für einen zweiten Radiusvector $\sqrt{e_n}$ und dessen durch α_1 gegebene Richtung

$$e_n = \frac{e_0 e_e}{e_0 \cos^2 \alpha_1 + e_e \sin^2 \alpha_1}.$$

Hieraus lassen sich e_0 und e_e berechnen. Man erhält:

$$e_0 = \frac{e_m e_n (\cos^2\alpha - \cos^2\alpha_1)}{e_m \cos^2\alpha - e_n \cos^2\alpha_1},$$

$$e_e = \frac{e_m e_n (\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1)}{e_m \sin^2\alpha - e_n \sin^2\alpha_1}.$$

Führt man nun für die Werthe von e_0, e_e, e_m, e_n die Brechungsexponenten n_0, n_e, n_m, n_n ein, deren Quadrate umgekehrt proportional den Elasticitäten sind, so erhält man:

$$n_0^2 = \frac{n_n^2 \cos^2\alpha - n_m^2 \cos^2\alpha_1}{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha_1},$$

$$n_e^2 = \frac{n_n^2 \sin^2\alpha - n_m^2 \sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha_1}.$$

Nach diesen beiden Formeln kann man für verschiedene Flüssigkeiten die Werthe von n_0 und n_e berechnen.

Die Herren Dr. Crapski und Bratuschek in Jena, denen ich diese Methode mittheilte, hatten die grosse Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, dass aus bestimmten hier nicht näher zu erörternden Gründen nur für sehr dünne Objecte die Voraussetzungen erfüllt seien, unter denen die Rechnung richtige Resultate ergeben könne.

Im Vorstehenden sollte nur kurz das Princip der Methode angegeben werden. Es war nun zunächst durch Messungen an Krystallen von bekannten Brechungsexponenten die Brauchbarkeit der Methode zu prüfen. Ich habe zahlreiche derartige Bestimmungen an sehr dünnen Krystallen von Natronsalpeter ausgeführt; leider lassen sich die Winkelmessungen noch nicht mit der nöthigen Genauigkeit ausführen, so dass die Resultate für die Brechungsexponenten oft schon in der zweiten Decimale nicht unwesentlich von einander abweichen. Immerhin lässt sich erwarten, dass man durch geeignete Aenderungen in der Art der Beobachtung vielleicht eine grössere Genauigkeit zu erzielen im Stande sein wird.

INHALT.

Seite

R. Schumann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn BRUNS. (Fortsetzung) 211

Fr. Hayn, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn BRUNS 281

H. Ambronn, Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten anisotroper mikroskopischer Objecte 316

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

LIBRARY.

SITZUNG VOM 6. MÄRZ 1893.

Professor **Pfeffer** berichtete *über Untersuchungen des Herrn Dr. Miyoshi aus Tokio, betreffend die chemotropischen Bewegungen von Pilzfäden.*

Bei Behandlung der chemotactischen Bewegungen freibeweglicher Organismen wies ich, unter Anführung einiger Beispiele, darauf hin, dass wahrscheinlichst auch in solchen Pflanzen, welchen freie active Ortsbewegung abgeht, Richtungsbewegungen durch chemische Reize vielfach eine Rolle spielen dürften[1]). Inzwischen wurde mehrfach — und theilweise wohl mit Recht — chemische Reizung als Ursache verschiedener Fälle von Richtungsbewegungen angesprochen, doch wurde die Richtigkeit dieser Annahme in keinem Falle streng erwiesen, und ein Versuch, die Qualität des chemischen Reizstoffes zu bestimmen, wurde überhaupt nicht unternommen. Speciell in Versuchen mit Pilzen dürfte übrigens mehrfach die nach dem hinzudiffundirten Nährstoff hin gerichtete Wachsthums- und Verzweigungsthätigkeit mit Unrecht als ein chemotropischer Erfolg angesehen

1) Pfeffer, Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1884, Bd. I, p. 469. Vorläufige Uebersicht auch Bericht. d. bot. Gesellschaft 1883, p. 524. — Nadrücklich sei hier bemerkt, dass ich die Unterscheidung von Chemotaxis und Chemotropismus (und analog bei anderen Reizen) nur anwende, um ohne weiteren Zusatz auszudrücken, dass in dem einen Fall der ja in formeller Hinsicht verschiedene Reizerfolg freibeweglicher, im anderen Fall der nur durch Wachsthumsvorgänge erzielbare Reizerfolg der anderweitigen Pflanzen vorliegt. Mit dieser zweifellos zweckmässigen Unterscheidung ist natürlich über Uebereinstimmung oder Differenz in der Perception und der Reizkette gar nichts vorausgesetzt, wie ja überhaupt in dieser Hinsicht alle Bezeichnungen offenen Spielraum lassen, die nur auf den sichtbaren Enderfolg basirt sind.

worden sein[1]). Denn »Chemotropismus« setzt Krümmungsbewegungen voraus, die nicht zutreffen in jenen einseitig gesteigerten Wachsthums- und Verzweigungsthätigkeiten, welche deshalb aber doch sehr wohl anderweitige chemische Reizeffecte sein können und theilweise thatsächlich solche sind.

Zur Klärung und zur Gewinnung eines empirischen Bodens veranlasste ich Herrn Dr. MIYOSHI zum Studium chemotropischer Reizbewegungen, eine Aufgabe, für welche zunächst leicht cultivirbare und schnell wachsende Pilze die besten Objecte zu geben versprachen. Zu diesem Zwecke aber kam es auf die Ausbildung brauchbarer Methoden an, da thatsächlich die Zuführung der Reizstoffe vermittelst Capillaren, diese für die schnell hinzu schwärmenden Organismen treffliche Methode, bei den erst in etwas längerer Zeit durch Wachsthumskrümmungen reagirenden Objecten zumeist nur unsichere und oft mehrdeutige Resultate ergiebt.

Mit gutem Erfolg kamen insbesondere folgende Methoden in Anwendung: 1) Blätter, z. B. die von Tradescantia, wurden mit der zu prüfenden Lösung injicirt, oberflächlich mit Wasser abgespült und dann auf der Spaltöffnungen führenden Oberhaut mit Pilzsporen u. s. w. beschickt. Nur bei chemotropischer Reizwirkung der injicirten Stoffe kam das Eindringen der heranwachsenden und auf der Oberhaut fortkriechenden Pilzfäden in die Spaltöffnungen zu Stande. 2) Dünne Häutchen aus Collodium wurden durch Nadelstiche mit feinen Löchern versehen oder an ihrer Stelle auch abgezogene Epidermisstreifen verwandt. Diese Blättchen wurden mit einer Seite in Contact mit Flüssigkeit oder auch mit Gelatine gebracht, die mit den zu prüfenden Stoffen versetzt war. Der Erfolg war derselbe wie an den injicirten Blättern. Dasselbe Resultat wurde 3) auch mit fein durchlochten sehr dünnen Glimmerblättchen erreicht, die in vorgenannter Weise zur Anwendung kamen.

In allen Fällen dringen die positiv gereizten Pilzfäden in die Oeffnungen, in welchen und unter welchen die Reizstoffe in relativ höchster Concentration geboten werden. Die seitliche Ausbreitung der Reizstoffe ist aber wiederum Bedingung, um auf einige Distanz den von der Concentrationsdifferenz abhängigen

1) Auf dieses wurde schon früher (Unters. a. d. bot. Institut in Tübingen 1884, p. 470) hingewiesen.

chemotropischen Effect zu erzielen. Während aber bei Glimmerblättchen der Reizstoff sich nur von der Oeffnung aus verbreiten kann, gelangt er bei imbibitionsfähigen Häuten auch diosmotisch an die von der Flüssigkeit, resp. der Gelatine abgewandte Seite.

Aus diesen Andeutungen möge man entnehmen, dass jede der Methoden ihre Vorzüge und Nachtheile hat und klar ist auch, dass die lebenden Blätter unter Umständen, ihrer Schädigung oder Tödtung halber, nicht gut verwendbar sind.

In solcher Weise wurden Versuche hauptsächlich mit Mucor mucedo, Mucor stolonifer, Phycomyces nitens, Penicillium glaucum, Aspergillus niger, Saprolegnia ferax angestellt.

Die Versuche ergaben, analog wie bei Bacterien, dass nicht ein einzelner Körper, sondern ganz verschiedene chemische Stoffe reizend wirken, dass ferner die genannten Pilze gegenüber einem bestimmten Stoffe in gleicher, jedoch auch in specifisch differenter Weise reagiren können.

Als gute Reizstoffe wurden allgemein die neutralen Salze der Phorphorsäure und des Ammonium befunden, ebenso hatten Pepton und Asparagin mehr oder weniger starke Wirkung. Dagegen wurde z. B. keine Anlockung durch die Nitrate und Chloride von Kalium, Natrium, Calcium erreicht, auch nicht durch weinsaures Kalium. In dieser Hinsicht besteht also eine Differenz gegenüber den Bacterien, die durch die letztgenannten Stoffe z. Th. sehr stark angelockt werden [1]), während die obengenannten Pilze mit den Bacterien den fast völligen Indifferentismus gegen Glycerin gemeinsam haben. Traubenzucker wirkt auf Bacterien verhältnissmässig geringer als auf die fraglichen Pilze, ausgenommen Saprolegnia, die durch Dextrose nur mässig im positiven Sinne gereizt wird. Ebenso wie bei den Bacterien gehen auch bei unseren Pilzen Nährwerth und chemotropische Reizwirkung eines Stoffes nicht parallel.

Die zu einer merklichen Reizung nöthige Menge ist natürlich nach Natur des Stoffes und des Pilzes in weiten Grenzen verschieden. Für Mucor ist z. B. Traubenzucker eines der besten Reizmittel, das deutliche Anlockung schon bei 0,01 % ergiebt, während durch 0,1 % dieses Körpers auf Saprolegnia eine nur zweifelhafte Reizwirkung ausgeübt wird. Mit zunehmender Concentration steigt die Reizwirkung und durch 2—10 % Trauben-

1) Pfeffer, Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1888, Bd. II, p. 604.

zucker wird Mucor am stärksten angelockt. Weiterhin nimmt diese Anlockung wieder ab, um bei einem Gehalt von 50 % Traubenzucker zu schwinden, oder einer abstossenden Wirkung, einem negativen Chemotropismus Platz zu machen.

Es wiederholen sich also analoge Beziehungen wie bei freibeweglichen Organismen, und wie auf diese, werden auf Pilze repulsive Wirkungen auch durch solche Stoffe ausgeübt, die in keiner Concentration eine merkliche Anlockung erzielen. Die Beimengung eines solchen Stoffes zu einem Lockmittel wird also die positive Ablenkung des letzteren eliminiren und eben hierdurch wird uns von der entgegengesetzten Reizwirkung des Körpers Kunde. Für Kaliumnitrat, Chlornatrium, Kaliumtartrat u. a. wurde z. B. nur Repulsion beobachtet und, wie bei Bacterien, wirken auch freie Säuren und Alkalien, sowie Alkohol schon in geringer Concentration auf die hier behandelten Pilze negativ chemotropisch.

Wie besonders die Untersuchungen an den freibeweglichen Organismen lehren, stehen solche schon durch kleine Mengen erzielten Repulsionen jedenfalls in keiner Beziehung zu den allgemeinen, nur von der molekularen Concentration abhängigen physikalischen Eigenschaften, sagen wir kurz, zu der osmotischen Leistung der Lösungen. Allerdings giebt es auch solche von der osmotischen Fähigkeit abhängige Reizwirkungen, die natürlich nur bei Mangel specifischer Reizung klar hervortreten können. Diese müssen aber doch in jedem Falle, wie ich es von Anfang an that, von den specifischen, von der stofflichen Qualität abhängigen Reizen getrennt gehalten werden und in der Vernachlässigung dieser Distinction begeht MASSART[1]) zweifellos einen Irrthum.

Wie kaum anders zu erwarten, scheint auch für die Fadenpilze hinsichtlich der Unterschiedsempfindung das WEBER'sche Gesetz zu gelten[2]). Nach Versuchen mit Saprolegnia muss der

---

1) Archives d. Biologie 1889, Bd. IX, p. 515. — Eine Reizkrümmung durch die osmotische ungleichseitig vertheilte Wirkung, also ein Osmotropismus, scheint u. a. auch bei Wurzeln vorzukommen.

2) Bei Gelegenheit des Nachweises der in diesem Gesetz ausgesprochenen Relation für die chemische Reizbarkeit von Samenfäden und Bacterien (Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1884, Bd. I, p. 395; ibid. 1888, Bd. II, p. 633) wurde auch die voraussichtlich ausgedehntere Verbreitung dieser Art von Unterschiedsempfindung besprochen. Inzwischen erwies

Concentrationsunterschied von Rohrzucker zu beiden Seiten des Objectes zwischen dem 5fachen und 10fachen liegen, um eine eben merkliche Ablenkung zu erzielen.

Eine genauere Präcision wurde nicht versucht, da eine exacte Ausführung, welche die Unterhaltung constanter Concentrationsdifferenz für längere Zeit erfordert, einige Schwierigkeiten macht. Es ist übrigens auch klar, dass sich für die Reizbarkeit geringere Schwellenwerthe ergeben würden, wenn sich die Versuchsobjecte dauernd an der Grenze von Wasser und Lösung befänden, während doch in der üblichen Methode sich eine mit der Zeit zunehmende Ausgleichung der Concentrationsdifferenzen geltend machen muss.

In der beschriebenen Versuchsmethode gleiten die Pilzfäden auf einer festen Unterlage. Der Mithilfe eines solchen Contacts bedarf es indess nicht zur Ablenkung durch chemische Reize, und durch Contactwirkung allein werden die Pilzfäden nicht veranlasst, in enge Oeffnungen einzudringen, obgleich solche Contactwirkung immerhin gewisse Vortheile gewähren mag. Der Chemotropismus tritt demgemäss auch ein, wenn zu den in homogener Gelatine eingebetteten Pilzfäden von einer Seite das Reizmittel diffundirend herantritt. Ueberhaupt werden diese Pilzfäden durch Contact mit festen Körpern nicht oder jedenfalls nicht erheblich gereizt. Es folgt dieses u. a. daraus, dass sie ungehemmt zwischen Sandkörnern hindurch sich in eine Flüssigkeit begeben, die gleichwerthig mit der Imbibitionsflüssigkeit des Sandes ist.

Voraussichtlich spielen auch bei dem Eindringen von parasitischen Pilzen ins Innere lebender Organismen Anlockungen durch chemische Reize eine entscheidende oder hervorragende Rolle. Die in Rücksicht auf diese interessante biologische Frage begonnenen Untersuchungen ergaben u. a., dass die Hyphen von Botrytis Bassiana und tenella, diesen Parasiten der Seidenraupe, resp. des Maikäfers, in ähnlicher Weise durch chemische Reize ablenkbar sind und dass sie ferner Cellulosehäute durchbohren, aber nur dann, wenn unterhalb derselben ein anlockendes chemisches Reizmittel befindlich ist.

Massart (Bullet. de l'Acad. royale de Belgique, 1891, Bd. XXII, p. 148) die Giltigkeit des Gesetzes für den Heliotropismus von Phycomyces und nach den Beobachtungen von Correns (Flora 1892, p. 107) scheint es auch in der Reizung zuzutreffen, welche Staubfäden von Berberis durch wechselnde Partiärpressung von Sauerstoff erfahren.

Durch die beschriebenen Methoden lassen sich auch Pollenschläuche in die Oeffnungen von Häuten locken, resp. repulsiv beeinflussen. Als gute Reizmittel erwiesen sich z. B. Zuckerarten, während, abweichend von den Pilzen, Fleischextract und Ammonphosphat keine Anlockung erzielten.

In diesen Erscheinungen, deren Erweiterung im Gange ist, bietet sich eine wichtige Thatsache in Hinsicht auf die Lenkung der Pollenschläuche bis in die Samenknospe. Dieser Vorgang ist indess mit Erkenntniss der einfachen chemotactischen Reizbarkeit der Pollenschläuche noch nicht endgiltig aufgehellt. Vielmehr bestehen zur Zeit noch alle die seiner Zeit von mir[1]) angeführten Erwägungen zu vollem Rechte, in welchen betont wurde, dass hier offenbar ein complexer Vorgang vorliegt, in welchem aber chemische Reizwirkungen — und möglicherweise solche von verschiedener Art — eine wichtige Rolle mitspielen können.

1) Unters. a. d. bot. Institut zu Tübingen 1888, Bd. II, p. 656.

OEFFENTLICHE GESAMMTSITZUNG

VOM 23. APRIL 1893

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SR. MAJESTÄT DES KÖNIGS.

Leuckart, *Ueber den Infundibularapparat der Hirudineen.*

Schon seit längerer Zeit hat man vermuthet, dass die Nephridien (Schleifencanäle) der Hirudineen nach Art der augenscheinlichen Weise ihnen entsprechenden Segmentalorgane der Borstenwürmer durch einen specifisch gebauten Trichterapparat mit den blutführenden Hohlräumen in directem Zusammenhang ständen. Aber erst die den achtziger Jahren entstammenden Untersuchungen Bourne's haben diesem Anschein eine positive Unterlage gegeben. Ist doch erst durch sie der Beweis geliefert, dass der vor fünfzig Jahren durch v. Siebold bei Nephelis entdeckte rosettenförmige Flimmerkörper, so wie der schon von Leydig diesem verglichene hirtenstabartige Flimmerlappen von Clepsine insofern wenigstens dem Trichterapparat der verwandten Würmer entsprechen, als sie dem terminalen Endstücke der Nephridien aufsitzen und mittelst ihrer flimmernden Oeffnung einen directen Verkehr mit dem Inhalte der Bluträume gestatten.

Doch nicht bloss, dass die Darstellung Bourne's mancherlei Lücken lässt, dass sie namentlich auch die Beziehungen des jetzt entdeckten Infundibularpparates zu dem Canalsystem der Nephridien nur unvollständig aufhellt; sie hat auch insofern an Bedeutung vieles eingebüsst, als ihr Autor der Ansicht ist, dass das betreffende Gebilde bei den Hirudineen einem Rückbildungsprocesse anheim gefallen sei, der bei den einzelnen Arten verschieden weit gehe — am weitesten bei Hirudo (u. Aulastomum) — demselben aber überall den Charakter eines rudimentären Organes aufpräge.

In Folge dessen mag es denn auch geschehen sein, dass der Trichterapparat der Hirudineen, der auch durch seine versteckte Lage und Anderes der Untersuchung besondere Schwierigkeiten bereitet, seither kaum weitere Beachtung gefunden hat, ja dass sogar der jüngste und anscheinend eingehendste Beobachter der Schleifenorgane bei den Hirudineen (BOLSIUS) die Existenz eines derartigen Apparates geradezu in Abrede stellt.

Unter solchen Umständen dürfte es denn durchaus gerechtfertigt sein, nicht bloss mit aller Entschiedenheit für die Existenz dieses Apparates einzutreten, sondern weiter auch nachzuweisen, dass derselbe in keinerlei Weise die Züge eines rudimentären Gebildes an sich trägt, wenn auch immerhin zugegeben werden muss, dass seine functionelle Bedeutung dermalen eben so wenig klar liegt, wie die der sogen. Nephrostomen, die jedenfalls verwandte Bildungen repräsentiren.

Die BOURNE'sche Annahme von der rudimentären Natur des Infundibularapparates bei den Hirudineen stützt sich vornehmlich auf den Umstand, dass derselbe in Verbindung mit dem eigentlichen Trichter, dem Einzeltrichter, wie wir dieses Endorgan fortan nennen wollen, überall — ich untersuchte vornehmlich (wie auch BOURNE) Clepsine, Nephelis, Hirudo — einen Haufen körnerartiger Gebilde aufweist, die, wie behauptet wird, unverkennbar die Zeichen des Zerfalles an sich trügen. Diese anscheinenden Körner sind nun aber in Wirklichkeit kleine Kernzellen (von etwa 0,009 mm), und zwar Kernzellen, die sich durch wichtige Charaktere eng an die typischen Nephridialzellen ihrer Träger anschliessen. An Grösse freilich werden sie von der Mehrzahl der letzteren beträchtlich übertroffen; aber nicht etwa bloss ihr Auftreten in dem sonst geschlossenen Zellensysteme, auch der Umstand spricht schon genügend für ihre wahre Natur, dass sie von Nephridialcanälchen durchzogen sind, gleich den typischen Nephridialzellen also durchbohrte Zellen darstellen.

Wenn man diese Zellen an Schnittpräparaten untersucht, dann hat es zunächst den Anschein, als wenn dieselben der weitaus grössten Mehrzahl nach frei neben einander lägen. Aber bei näherer Untersuchung und Vergleichung gewinnt man bald die Ueberzeugung, dass die sie anscheinend trennenden Zwischenräume in ziemlich regelmässiger Weise an einander schliessen und von Gängen herrühren, die den Haufen in verschiedener Richtung durchsetzen, aber nicht zwischen den Zellen verlaufen,

also nicht intercellulär sind, sondern als intracelluläre Gänge dieselben durchbohren. Auch an wirklich isolirten Zellen kann man vielfach die Existenz solcher Durchbohrungen ausser Zweifel stellen.

Der mehr oder minder ansehnliche Haufen, den diese Zellen bilden, ist nach aussen in verschiedener Weise umgrenzt, niemals aber so vollständig, dass er allseitig gegen den übrigen Nephridialapparat abgesetzt wäre. Ueberall steht derselbe, wenn auch nicht bei allen Arten in genau derselben Weise, mit letzterem in directer Berührung, in einer so engen, dass dessen Gefässe ohne Weiteres in ihn hinein sich fortsetzen können. Die Hohlräume des Zellenhaufens, mögen sie enger oder weiter, canalartig oder mehr lacunär sein, sie sind sämmtlich mit dem Canalsystem der Schleifenorgane in unmittelbarem Zusammenhange.

Und ein eben so directer Zusammenhang existirt auch zwischen den Hohlräumen des Zellenhaufens und dem Centralcanale der Einzeltrichter resp. dessen Endöffnung, ganz gleichgültig, welche specifische Form und Bildung dieselben besitzen. Was demnach durch die Trichteröffnung etwa aufgenommen wird, kann, wenn auch vielleicht erst nach mancher Veränderung, ebenso direct durch die Excretionsöffnung[1]) nach aussen entleert werden, wie das specifische Secretionsproduct der Nephridien.

Wenn wir jetzt die histologische Beschaffenheit der Einzeltrichter, wie überhaupt des Trichterapparates mit Ausschluss des eben berücksichtigten Zellenhaufens in's Auge fassen, dann stossen wir auch hier wiederum auf Nephridialzellen, und zwar solche, die sich in ihren wesentlichsten Eigenschaften weit enger, als die Zellen des Haufens, an die genuinen Zellen der Nephridrialorgane anschliessen. Nicht bloss in Betreff ihrer Grösse und des bläschenförmigen Aussehens ihrer Kerne, auch nicht bloss insofern, als sie durchgehends unter sich zu einer zusammenhängenden Masse verwachsen sind, sondern hauptsächlich deshalb, weil ihre Rinde den bei den typischen Nephridialzellen viel-

1) Bei dieser Gelegenheit mag übrigens die Bemerkung gestattet sein, dass die bei unserem medicinischen Blutegel an manchen Standorten constant und oftmals in colossaler Menge der Innenwand der Nephridienblase ansitzenden stäbchenartigen Gebilde, die vielfach von den Beobachtern auf Krystalle von Harnverbindungen oder auf Flimmerhaare zurückgeführt wurden, bei näherer Untersuchung sich mit aller Sicherheit als bewegliche Bacterien ergeben.

fach so scharf hervortretenden pallisadenartigen Bau zeigt, und ihr Protoplasma allseitig von feinen, mehr oder weniger stark verästelten Canälen durchzogen ist. Der (gleichfalls intracelluläre) weite Flimmergang, den die Einzeltrichter, je also das Product einer Anzahl (2—5) verschmolzener Zellen, in sich einschliessen, steht mit diesen peripherischen Canälen nirgends in directem Zusammenhange, wohl aber mit den Hohlräumen des Centralhaufens.

Das Vorstehende soll zunächst nur dazu dienen, die allgemeinen Verhältnisse des Infundibularapparates bei den Hirudineen in das rechte Licht zu setzen. Im Einzelnen zeigt der Bau natürlich mancherlei mehr oder minder auffallende Eigenthümlichkeiten, die — abgesehen von den Besonderheiten der Lage und Gestaltung — sowohl in der Zahl und der Bildung der Einzeltrichter, wie auch in den Beziehungen derselben zu dem centralen Zellenhaufen ihren Ausdruck finden.

Die oben namhaft gemachten drei Genera repräsentiren in dieser Hinsicht je einen besonderen Typus.

Was zunächst die Clepsineen betrifft, so sind diese sämmtsich, so weit ich sie kenne, dadurch ausgezeichnet, dass der centrale Zellenhaufen von einer eigenen Bindegewebshülle umgeben ist und immer nur einen Einzeltrichter trägt. Der letztere hat allerdings nicht überall die gleiche Form, nicht einmal immer an den Nephridien derselben Art, ist aber stets von einfacher Bildung. In der Regel erscheint er als ein röhrenartiger Aufsatz mit zwei flimmernden Endlappen, die bald hornartig gestreckt, bald auch kürzer und dann am Rande gekerbt sind. Bei Cl. tessellata, die auch sonst in ihrer Organisation mancherlei Abweichungen zeigt, vermehrt sich die Zahl der Lappen auf vier. Die Lappen enthalten je einen Kern, und ebenso auch das mehr oder minder bulbusartig geschwollene Grundstück. Von dem zapfenartig hervoragenden Wurzelende aus sieht man die Substanzmasse des Trichters in Form eines dünnen und gefässhaltigen Ueberzugs eine Strecke weit an der Innenfläche der Kapsel hinziehen.

Während der Flimmertrichter mehr oder minder weit frei in die ventrale Leibeshöhle des Wurmes hineinragt, ist die kugelige Kapsel mit dem centralen Zellenhaufen (die gelegentlich bis zu 0,15 mm misst) in die Substanzmasse des Leibes eingebettet. Der Nephridiallappen, dem dieselbe aufsitzt, wird von den grossen hellen Zellen gebildet, die, in meist einfacher Reihe

an einander gefügt, schon von O. Schultze bei unseren Egeln als Nephridialzellen erkannt und beschrieben wurden. Man sieht die dünnen Gefässe, welche diese Zellen in complicirter, aber vielfach wechselnder Anordnung durchziehen, an günstigen Präparaten continuirlich in die Kapsel hinein sich fortsetzen. Wo die Zellen an die Kapsel sich ansetzen, fehlt die bindegewebige Begrenzung, so dass die zellige Inhaltsmasse hier direct mit ihnen in Berührung tritt.

Mehrfach anders gestalten sich die Verhältnisse des Infundibularapparates bei Nephelis. Zunächst insofern, als die betreffenden Gebilde, Einzeltrichter, wie Centralhaufen, im Innern der contractilen sogen. Gefässblasen liegen, also in das Blutgefässsystem hineingesenkt sind, das, wie überhaupt bei den Kieferegeln, so auch bei Nephelis die sonst (Clepsine) blutführende Leibeshöhle verdrängt hat. Allerdings ist der betreffende Apparat nicht lose in der Blutblase gelegen, sondern einem bindegewebigen Strange aufgeheftet, der durch den Innenraum derselben in querer Richtung hindurchzieht. Der Nephridialausläufer, der ihn trägt, tritt von aussen her an die Gefässblase heran und treibt deren Wand und die Bothryoidzellen, mit denen diese belegt ist, eine Strecke weit vor sich her.

Auch der Apparat selbst besitzt eine mehrfach abweichende Bildung. Nicht bloss, dass die Zahl seiner Einzeltrichter auf meist sieben (oder acht) gestiegen ist, auch seine Form und Zusammensetzung ist eine andere geworden. Er ist nicht kugelig, wie bei Clepsine, sondern — wie das, im Gegensatze zu der wenig charakteristischen Abbildung Leydig's, schon von Bidder ganz richtig dargestellt worden — lang gestreckt, wie der Strang, dem er aufsitzt, und seiner Form nach am besten mit einer aufgesprungenen Schote zu vergleichen. Die Seitenwände bestehen aus einer zusammenhängenden Lage von Nephridialzellen, die den centralen Zellenhaufen zwischen sich nehmen, wie die Klappen der Schote die Frucht, ihn aber vorn, wo sie klaffen, jederseits an drei oder vier auf einander folgenden Stellen in Form eines ausgerandeten Flimmerlappens überragen. Die nach innen gewendete Fläche der einzelnen Lappen führt in den gleichfalls flimmernden Trichtercanal, der nach unten gegen die Basis des Apparates zuläuft, streng genommen aber, da er gegen den centralen Zellenhaufen nicht geschlossen ist, mehr als eine Rinne, denn als Canal zu bezeichnen sein dürfte. Das vordere

Segment des centralen Zellenhaufens, das der basalen Anheftungsstelle gegenüber liegt und von den freien Rändern der Seitenwände resp. den aufsitzenden Trichterlappen begrenzt wird, liegt unter solchen Umständen frei zu Tage. Man findet nicht selten auch einzelne Zellen desselben nach der Abstossung frei in der umgebenden Blutmasse.

Die morphologischen Beziehungen der typischen Nephridialzellen zu den kleinen Zellen des Centralhaufens sind in Folge der Ausdehnung ihrer Berührungsfläche bei Nephelis viel augenfälliger, als das bei Clepsine der Fall war. Man sieht beide gar vielfach in einander übergehen und zwar dadurch, dass die in die erstern eingelagerten Kerne unter gleichzeitiger Verkleinerung an Menge beträchtlich zunehmen und die umgebende, vielfach von feineren Gefässen durchzogene Substanzmasse zum Zerfall bringen.

Abermals neue Verhältnisse trifft man, wie gesagt, bei Hirudo (resp. Aulastomum), deren Nephridialapparate bisher nur von Bourne aufgefunden sind. Sie liegen auch hier im Innern des Gefässsystems und zwar in den sogen. Coeurs moniliformes, die, wie Brandt und Gratiolet das beschrieben, der Hodenwand aufliegen und je aus drei einander folgenden kugeligen Gefässanschwellungen sich zusammensetzen. Dem entsprechend sind denn auch die Trichterorgane unserer Würmer in drei Stücke zerfallen, die aber sämmtlich gleich gebaut sind und alle drei demselben Nephridialstrange aufsitzen, demselben, dessen dickere Basalhälfte als Hodenlappen schon seit längerer Zeit bekannt ist.

Ein jedes dieser Stücke entsteht aus einer Reihe von Nephridialzellen, die sich von dem erwähnten Strange ablösen und sich in ähnlicher Weise, wie bei Nephelis, in einen centralen Zellenhaufen und dessen peripherische Begrenzung mit den hier äusserst zahlreichen Einzeltrichtern metamorphosiren. Die letzteren sind eben so wenig, wie bei Nephelis, allseitig an der Wand des Zellenhaufens vorhanden, sondern nur in einiger Entfernung von der Basis zu finden. Wo sie vorkommen, ordnen sich die Nephridialzellen der Wand zu einem Strange zusammen, der sich aufknäuelt und gegen den Innenraum des Gefässes hin in dichtstehende zweilappige Einzeltrichter auswächst. Die nach Innen gekehrte concave Wandfläche des Stranges geht ohne scharfe Abgrenzung durch Kernvermehrung und Theilung, wie bei Nephelis, in die centrale Zellenmasse über.

SITZUNG VOM 8. MAI 1893.

Paul Stäckel in Halle a/S., *Ueber dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine infinitesimale Transformation gestatten.* Vorgelegt von Herrn Lie.

In seinen schönen *Untersuchungen über geodätische Curven* hat Herr Lie die Aufgabe gestellt und gelöst, *die Form des Linienelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, »die derart in sich infinitesimal verschoben werden kann, dass dabei jede geodätische Curve der Fläche in eine benachbarte geodätische Curve derselben Fläche übergeführt wird«*. Fasst man nun die geodätischen Curven einer Fläche als die Bahncurven eines materiellen Punktes auf, der gezwungen ist, sich auf dieser Fläche zu bewegen, während keine beschleunigende Kraft auf ihn wirkt, so erkennt man, dass diese Aufgabe einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig ist. Hat man nämlich irgend ein Problem der *Dynamik*, bei dem es sich um die Bewegung eines Systems von beliebig vielen materiellen Punkten handelt, deren Lage zur Zeit t durch die Werte einer *endlichen* Anzahl von Bestimmungsstücken $p_1, p_2, \cdots, p_n$ festgelegt wird, so kann man fragen, *wann das System der* $n-1$ *von der Zeit freien Differentialgleichungen zwischen* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *eine infinitesimale Transformation gestattet*. Beachtet man aber, dass die Differentialgleichungen der Bewegung, welche man für ein solches Problem erhält, bei einer erweiterten Auffassung der Mechanik als die Differentialgleichungen der *Bewegung eines Punktes in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* gedeutet werden können, deren Linienelement durch den Ausdruck der lebendigen Kraft des Systems bestimmt ist, so kann man das Problem auch so aussprechen, *dass untersucht werden soll, wann die Bahncurven eines Punktes, welcher sich in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bewegt, eine infinitesimale Trans-*

formation gestatten; ich habe schon bei anderer Gelegenheit darauf hingewiesen, wie sehr die Discussion der Differentialgleichungen der Dynamik an Uebersichtlichkeit und Anschaulichkeit gewinnt, wenn man diese Interpretation zu Hilfe nimmt und möchte die Einführung dieser Sprechweise für die vorliegende Untersuchung geradezu als unentbehrlich bezeichnen[1]).

Bei der folgenden Untersuchung setze ich voraus, dass für die betrachtete Bewegung eine *Kräftefunction* $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ existirt und stelle die Bedingungsgleichungen dafür auf, *dass die* ∞^{2n-2} *Bahncurven des Punktes, welche einem festen aber beliebigen Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft entsprechen, unabhängig von dem Werthe dieser Constanten eine infinitesimale Transformation*

$$Pf = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(p_1, \ldots, p_n) \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

gestatten. Es gelingt mir dann zu zeigen, dass diese Bedingungsgleichungen eine einfache Bedeutung haben, sie verlangen nämlich, sobald die Kräftefunction in der n-fachen Mannigfaltigkeit nicht constant ist, dass:

I. jedes Niveaufeld, d. h. jede $(n-1)$*-fache Mannigfaltigkeit constanter Kräftefunction, durch die infinitesimale Transformation in sich übergeführt wird;*

II. die infinitesimale Transformation für die Mannigfaltigkeit conform ist;

III. bei dieser conformen infinitesimalen Transformation auch die Schaar der ∞^{2n-2} *geodätischen Linien der n-fachen Mannigfaltigkeit invariant bleibt.*

1. Betrachtet man ein *dynamisches Problem*, bei welchem die Lage des Systems der materiellen Punkte durch die Werthe von n Bestimmungsstücken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ festgelegt wird, so hat man, falls für diese Bewegung eine *Kräftefunction* $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ existirt, behufs Aufstellung der *Differentialgleichungen der Be-*

---

1) Vgl. meine Abhandlung: Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 107, 1891, S. 349, sowie eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit: Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit.

wegung den Ausdruck der *lebendigen Kraft* des Systems zur Zeit t:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} \quad (a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa})$$

zu bilden und erhält dann die gesuchten Differentialgleichungen in der Form[1]):

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 p_\nu}{dt^2} + \sum_{\varkappa, \lambda} \left\{ \begin{matrix} \varkappa\lambda \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} = \sum_\mu \frac{\partial \Pi}{\partial p_\mu} a'_{\mu\nu};$$

die Indices $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ bedeuten hier, wie stets im Folgenden, die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \cdots, n$. Von diesen Gleichungen kennt man vermöge der Kräftefunction Π das Integral der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda} \frac{dp_\varkappa}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt} = \Pi + h,$$

worin h eine willkürliche Constante bedeutet.

Um aus den n Differentialgleichungen (A) das System der $n - 1$ Differentialgleichungen herzustellen, durch welche die Bahncurve des Punktes in der n-fachen Mannigfaltigkeit definirt ist, bei der das Quadrat des Linienelementes ds durch die Gleichung:

$$ds^2 = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa\lambda} \, dp_\varkappa \, dp_\lambda$$

gegeben wird, sehe ich p_1 als unabhängige Veränderliche an und benutze die Identitäten:

$$p_\varrho'' = \frac{\dfrac{d^2 p_\varrho}{dt^2} - p_\varrho' \dfrac{d^2 p_1}{dt^2}}{\left(\dfrac{dp_1}{dt}\right)^2},$$

in denen der Strich die Differentiation nach p_1 bedeutet, während ϱ, wie auch später σ und τ, die Werthe $2, 3, \cdots, n$ zu durchlaufen haben. Setzt man hierin für $\frac{d^2 p_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 p_\varrho}{dt^2}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (A) ein, so kommt:

---

1) Vgl. meine oben angeführte Abhandlung im Journal S. 323.

$$0 = p_\varrho'' + \sum_{\varkappa,\lambda}\left[\left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{matrix}\right\} - p_\varrho'\left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ 1\end{matrix}\right\}\right]p_\varkappa' p_\lambda' - \frac{\sum_\nu (a'_{\nu\varrho} - p_\varrho' a'_{1\varrho})\frac{\partial \Pi}{\partial p_\nu}}{\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2};$$

es ist zu beachten, dass in diesen Gleichungen p_1' den Werth 1 hat. Um aus ihnen $\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2$ zu eliminiren, bringe ich die Gleichung der lebendigen Kraft auf die Form:

$$\frac{\frac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} p_\varkappa' p_\lambda'}{\Pi + h} = \frac{1}{\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2},$$

und erhalte *das System der* $n - 1$ *Differentialgleichungen der Bahncurven* in der Gestalt:

$$(B) \qquad 0 = p_\varrho'' + \sum_{\varkappa,\lambda}\left[\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{matrix}\right) - p_\varrho'\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ 1\end{matrix}\right)\right]p_\varkappa' p_\lambda',$$

wo die Symbole $\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{matrix}\right)$ durch die Gleichungen definirt sind:

$$(C) \qquad \left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{matrix}\right) = \left\{\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2} a_{\varkappa\lambda}\frac{\sum_\nu \frac{\partial \Pi}{\partial p_\nu} a'_{\mu\nu}}{\Pi + h}.$$

Es ist zu untersuchen, *wann dieses System von* $n - 1$ *Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (B) *eine infinitesimale Transformation*:

$$Pf = \sum_\nu \xi_\nu(p_1, p_2, \cdots, p_n)\frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

gestattet. Als Bedingungen hierfür erhält man sofort die $n - 1$ Gleichungen:

$$(D) \qquad 0 = \frac{\partial p_\varrho''}{\partial \tau} + \sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu}\sum_{\varkappa,\lambda}\left[\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{matrix}\right) - p_\varrho'\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ 1\end{matrix}\right)\right]p_\varkappa' p_\lambda'$$
$$+ \sum_\sigma \frac{\partial p_\sigma'}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial p_\sigma'}\sum_{\varkappa,\lambda}\left[\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{matrix}\right) - p_\varrho'\left(\begin{matrix}\varkappa\lambda\\ 1\end{matrix}\right)\right]p_\varkappa' p_\lambda',$$

welche identisch in $p_1, p_2, \cdots, p_n; p_2', p_3', \cdots, p_n'$ bestehen müssen. Es wird sich darum handeln, diese Gleichungen explicite herzustellen und ihre Bedeutung zu untersuchen.

2. Bei Anwendung der infinitesimalen Transformation Pf erhält man zunächst:

$$\frac{\delta p_\sigma'}{\delta \tau} = \sum_\mu \left(\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial p_\mu} - p_\sigma' \frac{\partial \xi_1}{\partial p_\mu} \right) p_\mu'$$

und weiter findet man:

$$\frac{\delta p_\varrho''}{\delta \tau} = \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{\partial^2 \xi_\varrho}{\partial p_\mu \partial p_\nu} - p_\varrho' \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right) p_\mu' p_\nu'$$
$$+ \sum_\mu \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial p_\mu} - p_\varrho' \frac{\partial \xi_1}{\partial p_\mu} \right) p_\mu'' - 2 \sum_\mu \frac{\partial \xi_1}{\partial p_\mu} p_\mu' \cdot p_\varrho'', \quad ^1)$$

worin für $p_2'', p_3'', \cdots, p_n''$ ihre Werthe in $p_1, p_2, \cdots p_n; p_2', p_3', \cdots, p_n'$ aus den Gleichungen (B) einzusetzen sind. In Folge dessen wird der Ausdruck auf der rechten Seite von (D) eine ganze rationale Function von $p_2', p_3', \cdots, p_n'$, deren Glieder in diesen Grössen höchstens die Dimension vier haben, und soll die Gleichung (D) identisch bestehen, so müssen alle Coefficienten dieser ganzen Function identisch verschwinden. Um diese Coefficienten zu berechnen, muss man in den vorstehenden Summen die Glieder besonders schreiben, bei denen einer oder mehrere der Indices die Werthe 1 oder ϱ haben, und es ist vortheilhaft zur Bezeichnung der Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \cdots, n$, welche von 1 und ϱ verschieden sind, besondere Indices α, β, γ zu verwenden.

Die wirkliche Ausführung der Rechnung ist etwas umständlich. Da sie auch kein principielles Interesse bietet, begnüge ich mich die Resultate mitzutheilen. Es ergiebt sich, dass die Coefficienten aller Glieder vierter Dimension identisch verschwinden. Dasselbe gilt auch von den Coefficienten der Aggregate $p_\alpha' p_\beta' p_\gamma'$, wo also α, β und γ von 1 und ϱ verschiedene ganze Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \cdots, n$ bedeuten. Alle anderen Coefficienten aber liefern gleich Null gesetzt Bedingungsgleichungen für $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ und die Coefficienten $\alpha_{\varkappa\lambda}$ von ds^2, welche sich auf folgende Gestalt bringen lassen. Es werde eingeführt:

$$\xi(\varkappa; \lambda, \mu)$$
$$= \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \sum_\nu \left[\begin{pmatrix} \lambda\nu \\ \varkappa \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + \begin{pmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} \right] + \sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{pmatrix}.$$

1) Vgl. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet unter Mitwirkung von Engel. Abschnitt I, Kapitel 25.

Dann lauten die gesuchten Gleichungen einfach:

$$1) \qquad \xi(x;\lambda,\mu) = 0 \qquad (\lambda,\mu \neq x),$$

$$2) \qquad \xi(x;x,\lambda) = \xi(1;1,\lambda) \quad (\lambda \neq 1, x),$$

$$3) \qquad \begin{aligned} 2\,\xi(x;x,1) &= \xi(1;1,1) \\ \xi(x;x,x) &= 2\,\xi(1;1,x) \end{aligned} \qquad (x \neq 1).$$

Um statt dieses Systemes von Gleichungen ein solches zu bekommen, bei denen keiner der Indices bevorzugt ist, braucht man nur zu bedenken, dass in den Gleichungen 2) und 3) und in den nebenstehenden Bedingungen 1 überall durch μ ersetzt werden darf. Führt man noch das bekannte Zeichen:

$$\varepsilon_{x\lambda} = \begin{cases} 1 & x = \lambda \\ 0 & x \neq \lambda \end{cases}$$

ein, so lassen sich sämmtliche Gleichungen in die *eine*:

$$2\,\xi(x;\lambda,\mu) = (\varepsilon_{x\lambda} + \varepsilon_{x\mu})\,\xi(\mu;\mu,\mu)$$

zusammenfassen, in der die Indices x, λ, μ keiner Beschränkung unterworfen sind.

3. Um aus den gefundenen Bedingungsgleichungen weitere Schlüsse zu ziehen, führe ich jetzt die Forderung ein, *dass die* ∞^{2n-2} *Bahncurven, welche einem bestimmten Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft entsprechen, unabhängig von der Wahl dieses Werthes von h die infinitesimale Transformation Pf gestatten.* Ist dies der Fall, so sind die n Functionen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ unabhängig von h, und diese Grösse kommt daher in den Gleichungen 1)—3) nur in der Verbindung

$$\Pi + h$$

vor. Da diese Gleichungen aber linear in den Symbolen $\binom{x\,\lambda}{\mu}$ und deren partiellen Ableitungen nach $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sind, so lassen sie sich alle auf die Form bringen:

$$0 = G + F(\Pi + h)^{-1} + E(\Pi + h)^{-2},$$

wobei E, F und G die Grösse h nicht mehr enthalten. Eine solche Gleichung kann aber, da h ganz willkürlich gewählt werden darf, nur dann identisch bestehen, wenn gleichzeitig:

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0$$

ist, sodass jede der Gleichungen 1) — 3) drei Gleichungen liefert, welche identisch in $p_1, p_2, \cdots, p_n$ erfüllt sein müssen.

4. Bis jetzt ist nur vorausgesetzt worden, dass für die betrachtete Bewegung eine Kräftefunction existirt, aber ihre Natur war gleichgültig. Bei der Discussion der Gleichungen 1)—3) macht es jedoch einen wesentlichen Unterschied, ob die Kräftefunction für die n-fache Mannigfaltigkeit *constant* ist, oder ob sie innerhalb derselben *variirt* und *Niveaufelder* bestimmt.

Ist die Kräftefunction Π *constant*, so wird nach (C):

$$\binom{\varkappa\,\lambda}{\mu} = \left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\},$$

sodass für diesen Fall die Gleichungen $E = 0$ und $F = 0$ von selbst identisch erfüllt sind. Mithin *geben die Gleichungen* $G = 0$ *die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die* ∞^{2n-2} *geodätischen Linien der* n*-fachen Mannigfaltigkeit die infinitesimale Transformation* Pf *gestatten. Um diese Gleichungen explicite hinzuschreiben, braucht man nur in dem Symbol* $\xi(x;\lambda,\mu)$ *überall* $\binom{\varkappa\,\lambda}{\mu}$ *durch* $\left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\}$ *zu ersetzen, wodurch* $\xi\{x;\lambda,\mu\}$ *entstehen möge.*

Ist die Kräftefunction Π *variabel*, so erhält man als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass jene ∞^{2n-2} Bahncurven die infinitesimale Transformation Pf gestatten, drei Systeme von Gleichungen, welche beziehungsweise durch $E = 0$, $F = 0$ und $G = 0$ repräsentirt werden und erkennt sofort die Bedeutung des Systems der Gleichungen $G = 0$, welche darin besteht, *dass auch die* ∞^{2n-2} *geodätischen Linien der* n*-fachen Mannigfaltigkeit die infinitesimale Transformation* Pf *gestatten müssen.*

5. Was weiter die Gleichungen $E = 0$ betrifft, so ist leicht einzusehen, dass mit $(\Pi + h)^{-2}$ behaftete Glieder nur aus den Ausdrücken

$$\sum_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \binom{\lambda\,\mu}{\varkappa}$$

entspringen können, und dass man die Coefficienten von $(\Pi + h)^{-2}$ erhält, wenn man in dieser Summe statt $\frac{\partial}{\partial p_\nu}\binom{\lambda\,\mu}{\varkappa}$ schreibt:

$$\tfrac{1}{2}\, a_{\lambda\mu} \sum_{\iota} \frac{\partial \Pi}{\partial p_\iota} a'_{\iota\varkappa} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p_\nu}.$$

Aus den Gleichungen 1) erhält man daher die Relationen:

$$a_{\lambda\mu}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}a'_{\iota\varkappa}\cdot\sum_{\nu}\xi_\nu\frac{\partial\Pi}{\partial p_\nu}=0 \qquad (\lambda,\mu\neq\varkappa),$$

aus denen man erschliesst, dass entweder

$$\sum_{\nu}\xi_\nu\frac{\partial\Pi}{\partial p_\nu}=0$$

ist, oder gleichzeitig die n Gleichungen

$$\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}a'_{\iota\varkappa}=0 \quad (\varkappa=1,2,3\cdots,n)$$

bestehen. Da aber die Determinante

$$|\,a'_{\iota\varkappa}\,|$$

gleich dem reciproken Werthe der Determinante

$$|\,a_{\varkappa\lambda}\,|$$

ist, so können diese n Gleichungen nur bestehen, wenn die Kräftefunction constant ist, während doch Π als variabel vorausgesetzt wurde. Es muss also

$$(E^*) \qquad \sum_{\nu}\xi_\nu\frac{\partial\Pi}{\partial p_\nu}=0$$

sein. Ist aber diese Gleichung erfüllt, so bestehen sämmtliche Gleichungen $E=0$, welche aus 1)—3) folgen, sodass das System dieser Gleichungen durch die *eine* Gleichung (E*) vollständig ersetzt wird.

Die Bedeutung der Gleichung (E*) liegt auf der Hand: sie besteht darin, *dass jedes Niveaufeld $\Pi=$ const. durch die infinitesimale Transformation*

$$Pf=\sum_{\nu}\xi_\nu\frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

in sich übergeführt wird.

6. Es bleibt übrig, die Gleichungen $F=0$ zu betrachten, welche sich mittelst der Gleichungen 1)—3) ergeben, indem man nur die mit $(\Pi+h)^{-1}$ multiplicirten Glieder beibehält. Man wird daher die Relationen $F=0$ bekommen, wenn man in den Gleichungen 1)—3) nur die Glieder stehen lässt, welche

die Symbole $\binom{\varkappa\lambda}{\mu}$ und deren Ableitungen enthalten, und wenn man für diese Grössen beziehungsweise

$$-\tfrac{1}{2}\,a_{\varkappa\lambda}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\mu}$$

und die partiellen Ableitungen dieser Ausdrücke einsetzt. Führt man dieses zunächst an den Gleichungen 1) aus, so erhält man nach leichter Umformung:

$$0=\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}\cdot\sum_{\nu}\left(a_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\mu}+a_{\mu\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\lambda}+\xi_\nu\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu}\right)$$
$$-a_{\lambda\mu}\sum_{\nu}\left(\frac{\partial\xi_\varkappa}{\partial p_\mu}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\nu}-\xi_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}\right)\qquad(\lambda,\mu\neq\varkappa).$$

Ist daher für einen bestimmten Werth von $\varkappa$

$$\sum\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}$$

nicht identisch gleich Null, so hat man:

$$\sum_{\nu}\left(a_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\mu}+a_{\mu\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\lambda}+\xi_\nu\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu}\right)$$
$$=a_{\lambda\mu}\cdot\frac{\sum_{\nu}\left(\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\nu}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\nu}-\xi_\nu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}\right)}{\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}}$$

und sieht, dass der Factor von $a_{\lambda\mu}$ auf der rechten Seite nur von $\varkappa$ abhängt, also für alle Coefficienten $a_{\lambda\mu}$, bei denen $\lambda,\mu\neq\varkappa$ ist, einen und denselben Werth $\omega_\varkappa$ hat.

Nimmt man jetzt an, dass noch für einen zweiten Werth von $\varkappa$ der Ausdruck

$$\sum_{\iota}\frac{\partial\Pi}{\partial p_\iota}\,a'_{\iota\varkappa}$$

nicht identisch verschwindet, so ergiebt sich, sobald $n\geqq 3$ ist, sofort, dass:

$$(\mathrm{F}^*)\qquad\sum_{\nu}\left(a_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\mu}+a_{\mu\nu}\frac{\partial\xi_\nu}{\partial p_\lambda}+\xi_\nu\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu}\right)=a_{\lambda\mu}\cdot\omega$$

ist, wo ω für *alle* Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der quadratischen Differentialform ds^2 denselben Werth hat. Zu demselben Resultate gelangt man aber auch in den Ausnahmefällen, wo entweder $n = 2$ ist, oder wo alle Summen $\sum_\iota \frac{\partial \Pi}{\partial p_\iota} a'_{\iota\varkappa}$ bis auf eine verschwinden, indem man die Gleichungen (2) und (3) zu Hülfe nimmt, sodass die Gleichungen (F*) ganz allgemeine Gültigkeit besitzen.

Um die Bedeutung dieser Gleichungen zu erkennen, braucht man nur die infinitesimale Transformation Pf auf das Quadrat des Linienelementes der n-fachen Mannigfaltigkeit anzuwenden, und erhält dann:

$$\frac{\delta ds^2}{\delta \tau} = \sum_{\varkappa\lambda}\sum_{\mu}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\xi_\mu + a_{\varkappa\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial p_\lambda} + a_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial p_\varkappa}\right) dp_\lambda\, dp_\varkappa .$$

Die Gleichungen (F*) *fordern also, dass die infinitesimale Transformation* Pf:

$$\frac{\delta ds^2}{\delta \tau} = \omega\, ds^2$$

ergeben muss, oder mit anderen Worten, *dass sie für die Mannigfaltigkeit mit dem Linienelemente* ds *conform ist.*

Nachschrift. Erst nach Abschluss dieser Untersuchung wurde ich von befreundeter Seite darauf aufmerksam gemacht, dass bereits Herr STAUDE in einer Abhandlung: *Ueber die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen gestatten* (diese Berichte, October 1892, S. 429) das von Herrn LIE behandelte Problem der geodätischen Linien auf das entsprechende Problem für dynamische Bahncurven erweitert hat. Herr STAUDE beschränkt sich jedoch durchaus auf den Fall $n = 2$, für welchen er zu denselben Ergebnissen gelangt, wie sie erhalten werden, wenn in meinen allgemeinen Formeln $n = 2$ gesetzt wird. Herr STAUDE hat aber, was hinzuzufügen ich nicht unterlassen möchte, für diesen Specialfall die Untersuchung noch weiter geführt und bemerkenswerthe Beziehungen zwischen den Niveaulinien auf der Fläche und den Bahncurven des Punktes gefunden.

Sophus Lie, *Ueber Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen.*

Ein ausgezeichneter französischer Mathematiker E. Vessiot (ancien élève de l'École normale supérieure) hat neuerdings in einigen kurzen Noten[1]) eine Theorie solcher Differentialgleichungen 1. O.

$$f(x\,y\,y') = 0$$

entwickelt, deren allgemeines Integral y sich durch m beliebige particuläre Integrale $y_1 \ldots y_m$ folgendermassen

$$y = F(y_1\, y_2 \cdots y_m\, a)$$

ausdrückt. Durch eine interessante Anwendung meiner allgemeinen gruppentheoretischen Sätze gelingt es ihm alle derartigen Gleichungen zu bestimmen; ihre Integrationstheorie deckt sich mit meiner *Theorie der Definitionsgleichungen* einer Gruppe

$$x_1 = \Phi(x\, a_1\, a_2 \cdots) .$$

In der letzten Sitzung (1. Mai 1893) der Académie des Sciences in Paris dehnt nun Herr Vessiot diese Theorie auf Gleichungen *zweiter* Ordnung

$$f_2(x\,y\,y'\,y'') = 0$$

aus, während andrerseits Herr Alf Guldberg versucht, eine allgemeine Theorie für beliebige simultane Systeme zu begründen. Es ist zu vermuthen, dass die mir noch unbekannte Arbeit des ersten Verfassers sich durch dieselben Eigenschaften, wie

1) Journal de l'École normale 1892, Comptes rend. 1893.

seine ältern Untersuchungen auszeichnet. Herr GULDBERG's interessante Arbeit benutzt diejenigen von mir herrührenden Theorien, welche schon VESSIOT's ältere Noten verwertheten. Er kommt dabei zu bemerkenswerthen Resultaten, welche indess *anscheinend* mit gewissen von mir herrührenden Untersuchungen (Math. Ann. Bd. XXV, S. 128) im Widerspruche stehen. *In der soeben citirten Arbeit betrachte ich nämlich eine ausserordentlich ausgedehnte Kategorie von simultanen Systemen, welche Fundamentalsysteme besitzen.* Da nun Herr GULDBERG, der *alle* derartigen Systeme bestimmen will, nur einen Theil von meinen Systemen findet, so liegt es nahe zu vermuthen, dass seine Betrachtungen nicht ganz vollständig sein können. Wenn ich nicht irre, ist es mir gelungen, die wirkliche Tragweite seiner Betrachtungen festzustellen. Ich gehe um so lieber hierauf näher ein, da meine soeben citirten Untersuchungen in den Math. Ann. Bd. XXV in so knapper Form dargestellt sind, dass es nicht ganz leicht ist, meine damaligen Auseinandersetzungen zu verstehen. Ist auch der wichtigste Inhalt jener Abhandlung jetzt ziemlich bekannt, so sind doch die wichtigen Anwendungen meiner allgemeinen Theorien, die ich in einigen Paragraphen jener Arbeit *skizzirte*, grösstentheils wenig berücksichtigt worden.

I.

Herr GULDBERG betrachtet ein simultanes System

$$\frac{dx_k}{dz} = \eta_k(x_1 \cdots x_n z) \quad (k = 1 \cdots n) \tag{1}$$

und setzt voraus, dass sich aus m beliebigen particulären Lösungssystemen

$$x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)} \quad (i = 1 \cdots m)$$

das allgemeine Lösungssystem $\xi_1 \cdots \xi_n$ durch ein Formelsystem

$$\xi_k = f_k(x_1' \cdots x_n' \cdots x_1^{(m)} \cdots x_n^{(m)} a_1 \cdots a_n) \tag{2}$$

mit n arbiträren Constanten ableiten lässt. *Dabei versäumt er aber an die Möglichkeit zu denken, dass unendlich viele wesentlich verschiedene derartige Formelsysteme* (2) *vorhanden sein können.*

Herrn GULDBERG's *allgemeine* Entwickelungen sind, soweit ich es übersehe, richtig, sobald die Annahme ausdrücklich hin-

zugefügt wird, dass *das allgemeinste Formelsystem* (2) *aus einem speciellen derartigen System durch Einführung neuer Parameter*

$$a_k' = A_k(a_1 \cdots a_n) \quad (k = 1 \cdots n)$$

abgeleitet werden kann.

Nur unter dieser Voraussetzung lässt sich nämlich der Schluss ziehen, dass die mn Gleichungen

$$\xi_k^{(i)} = f_k(x_1' \cdots x_n^{(m)}\ a_1^{(i)} \cdots a_n^{(i)})$$

eine continuirliche Gruppe zwischen den mn Grössen $x_1' \cdots x^{(m)} \cdots x_1^{(m)} \cdots x_n^{(m)}$ der mn Grössen $\xi_1' \cdots \xi_n' \cdots \xi_1^{(m)} \cdots \xi_n^{(m)}$ und den Parametern $a_1' \cdots a_n' \cdots a_1^{(m)} \cdots a_n^{(m)}$ bilden.

Ist diese Bedingung erfüllt, so sind GULDBERG's allgemeine Betrachtungen, soweit ich es übersehe, richtig. Auf die Frage, ob die von ihm für den Fall $n = 2$ angegebenen *speciellen* Resultate ganz richtig sind, brauche ich nicht hier einzugehen.

II.

Wenn zu einem simultanen Systeme (1) unendlich viele wesentlich verschiedene Formelsysteme (2) gehören, bleiben GULDBERG's Entwickelungen nicht mehr gültig.

Dass dieser Fall wirklich eintreten kann, zeigen meine Entwickelungen in den Math. Ann. Bd. XXV (S. 128).

In dieser Arbeit betrachte ich eine beliebige r-gliedrige Gruppe in $x_1 \cdots x_n$ mit den infinitesimalen Transformationen

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und entwickele eine allgemeine Integrationstheorie für jede lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z)\, X_1 f + \cdots + Z_r(z)\, X_r f = 0 \ , \tag{3}$$

wobei ich sogar ausdrücklich hinzufüge, dass meine Betrachtungen sich auch auf den Fall ausdehnen lassen, dass die ξ_{ki} die Grösse z enthalten.

Ich hebe ausdrücklich (S. 128) hervor, dass sich aus hinlänglich vielen particulären Integralsystemen

$$x_k', \ x_k'' \cdots x_k^m$$

immer das allgemeinste Integralsystem ableiten lässt. Obgleich nun diejenigen, die meine gruppentheoretischen Untersuchungen genauer kennen, unmittelbar übersehen, wie sich in jedem einzelnen Falle das allgemeine Integralsystem aus particulären ableiten lässt, so halte ich es doch nicht für überflüssig, dies hier auszuführen.

Liegt eine ganz beliebige Transformationsgruppe $X_1 f \dots X_r f$ eines n-fach ausgedehnten Raumes vor, so ist es nach meinen Untersuchungen immer möglich, die Zahl m so gross zu wählen, dass $m+1$ Punkte

$$x_1' \cdots x_n'; \quad x_1'' \cdots x_n''; \quad \cdots x_1^{(m)} \cdots x_n^{(m)}; \quad \xi_1 \cdots \xi_n$$

n hinsichtlich $\xi_1 \cdots \xi_n$ unabhängige Invarianten

$$J_k(x' \cdots x^{(m)} \xi) \quad (k = 1 \cdots n)$$

besitzen. Setzen wir dabei voraus, dass m Punkte gar keine Invarianten haben, so ist das System der Invarianten

$$J_1 J_2 \cdots J_n$$

wesentlich bestimmt. Wenn dagegen schon m Punkte Invarianten haben, so giebt es unendlich viel wesentlich verschiedene Systeme $J_1 \dots J_n$.

Setzen wir zunächst voraus, dass m Punkte keine Invariante haben. Setzen wir dann

$$\sum_i \xi_{ki}(x^\nu) \frac{\partial f}{\partial x_i^\nu} = X_k^\nu f, \quad \sum \xi_{ki}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \Xi_k f,$$

so haben die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$X_k' f + X_k'' f + \cdots + X_k^{(m)} f = 0$$

keine gemeinsame Lösung, während die Gleichungen

$$X_k' f + \cdots + X_k^{(m)} f + \Xi_k f = 0$$

genau n unabhängige Lösungen besitzen. Wir können dabei immer annehmen, dass diese Lösungen $J_1 \dots J_n$ so gewählt sind, dass die Gleichungen

$$J_k(x_1' \cdots x_n^m, \xi_1 \cdots \xi_n) = a_k \quad (k = 1 \cdots n)$$

eine continuirliche Gruppe mit der *identischen* Transformation bestimmen (vgl. meinen zweiten Fundamentalsatz), in welcher

die a ursprüngliche, die ξ transformirte Veränderliche sind, während die $x' \ldots x^{(m)}$ Parameter darstellen. Es ist dieser Fall, den GULDBERG gefunden hat.

Wenden wir uns nun zu meinem allgemeinen Falle. Wir können annehmen, dass die Ausdrücke

$$X_k' f + \cdots + X_k^m f = W_k f$$

durch keine lineare Relation verknüpft sind. Dann haben die Gleichungen

$$X_k' f + \cdots + X_k^{(m)} f + \Xi_k f = 0$$

$n + \omega$ Lösungen, unter denen ω von $\xi_1 \ldots \xi_n$ frei sind:

$$U_\nu(x' \cdots x^m) \quad (\nu = 1 \cdots \omega),$$

während die übrigen

$$J_k(x' \cdots x^m, \quad \xi_1 \cdots \xi_n) \quad (k = 1 \cdots n)$$

hinsichtlich $\xi_1 \ldots \xi_n$ unabhängig sind. Bilden wir nun wiederum die Gleichungen

$$J_k(x_1' \cdots x_n^m, \ \xi_1 \cdots \xi_n) = a_k,$$

so bestimmen dieselben fortwährend eine Gruppe zwischen den a und ξ; dies folgt unmittelbar aus meinem Beweise meines *zweiten Fundamentalsatzes*, den ich oft als den Hauptsatz meiner Gruppentheorie bezeichne. Jetzt dürfen wir aber keineswegs behaupten, dass diese Gruppe mn wesentliche Parameter hat.

Dieser allgemeine Fall ist Herrn Guldberg entgangen.

Die Frage nach den allgemeinsten simultanen Systemen mit Fundamentalsystemen ist somit durch die bisherigen Untersuchungen keineswegs erledigt. *Es ist aber leicht zu beweisen, dass die frühere Gleichung* (1) *das allgemeinste derartige Sgstem liefert.*

III.

In den Math. Annalen Bd. XXV, S. 124—130 entwickelte ich allgemeine Integrationstheorien für lineare partielle Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z) X_1 f + \cdots + Z_r(z) X_s f = 0, \tag{3}$$

wobei ich *zunächst* annahm, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

die eine Gruppe erzeugen, die Veränderliche z gar nicht enthalten. Da meine soeben citirten Entwickelungen einen sehr allgemeinen Charakter haben und theilweise nur skizzirt sind, dürfte es nützlich sein, den einfachen Fall, der jetzt gerade vorliegt, etwas ausführlicher zu behandeln.

Seien

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \quad b_1 \cdots b_r)$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass diese Gleichungen schon bekannt sind. Es bestehen nun nach meinen allgemeinen Theorien Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial y_i}{\partial b_k} = \sum\nolimits_j \psi_{jk}(b_1 \cdots b_r)\, \xi_{ji}(y_1 \cdots y_n)$$

$$X_k f = \sum \sigma_{ki}(b_1 \cdots b_r) \sum \xi_{i\nu}(y) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen erkennt man leicht, dass es möglich ist, die Grössen $b_1 \cdots b_r$ derart als Functionen von z zu bestimmen, dass unsere lineare partielle Differentialgleichung (3) in den Veränderlichen $z\ y_1 \ldots y_n$ die Form

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f}{\partial z} + \sum\nolimits_k Z_k(z)\, X_k f$$

annimmt.

Sind nun

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \quad b_1(z) \cdots b_r(z))$$

und

$$\eta_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \quad \beta_1(z) \cdots \beta_r)$$

zwei verschiedene Substitutionen, welche diese Forderung erfüllen, so bestehen Relationen

$$(4) \qquad \eta_i = f_i(y_1 \cdots y_n, \quad \gamma_1(z) \cdots \gamma_r(z)),$$

in denen die γ Functionen von z sind. Bei der Substitution (4) soll die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ihre Form bewahren; folglich müssen die $\mathfrak{y}$ aufgefasst als Functionen der y_i und z von z unabhängig sein, und somit die Gleichungen

$$\sum_k \frac{\partial f_i(y\,\gamma)}{\partial \gamma_k} \frac{d\gamma_k}{dz} = 0$$

sowie die äquivalenten:

$$\sum_k \frac{d\gamma_k}{dz} \sum_\gamma \psi_{jk}(\gamma)\, \xi_{ji}(\mathfrak{y}) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

bestehen. Hieraus ergiebt sich in bekannter Weise, dass die Ausdrücke

$$\sum_x \psi_{jk} \frac{d\gamma_k}{dz}$$

sämmtlich verschwinden und dass dementsprechend alle γ_k absolute Constanten sind.

Diejenigen Differentialgleichungen, welche die Grössen

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \quad b_1(z) \cdots b_r(z)) = \varphi_i(x_1 \cdots x_n\, z)$$

derart als Functionen von $x_1 \cdots x_n z$ bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \sum Z_k(z)\, X_k f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

besteht, geniessen daher die fundamentale Eigenschaft, dass das allgemeinste Lösungssystem

$$\mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_n$$

aus einem particulären $y_1 \cdots y_n$ durch Formeln

$$\mathfrak{y}_k = f_k(y_1 \cdots y_n, \quad c_1 \cdots c_r)$$

ausgedrückt werden, die eine bekannte Gruppe bilden.

Diese Differentialgleichungen findet man, indem man zuerst diejenigen Differentialgleichungen

$$W_k\left(x_1 \cdots x_n, \quad y_1 \cdots y_n \frac{dy_1}{dx_1} \cdots\right) = 0$$

bildet, welche die Grössen $y_k = f_k(x_1 \cdots x_n, b_1 \cdots b_r)$ als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ bestimmen und sodann zu den $W_k = 0$ die n Gleichungen

$$\frac{\partial y_i}{\partial z} + Z_1 X_1 y_i + \cdots + Z_r X_r y_r = 0 = \Omega_i = 0$$

hinzufügt.

Jetzt bilden die vereinigten Gleichungen

$$\Omega_i = 0\,, \quad W_k = 0$$

ein System von Differentialgleichungen, das sich unmittelbar auf ein vollständiges System mit einer bekannten endlichen Gruppe reducirt. Zu einem äquivalenten Resultate kommt man offenbar, wenn man die $b_k(z)$ als Functionen von z bestimmt.

M. Krause, *Zur Transformation der Thetafunctionen.* II.[1])

In einer Notiz gleichen Titels ist ein Additionstheorem zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln dazu gebraucht worden, um Relationen zwischen den Wurzeln von Transformationsgleichungen herzustellen. In derselben Notiz ist auf ein weiteres Additionstheorem hingewiesen worden, dessen linke Seite gleich einem Producte gewöhnlicher Thetafunctionen mit dem Index 5 und den Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ ist, während auf der rechten Seite die Indices beliebig und die Moduln ganzzahlige Multipla von $\tau_{\alpha\beta}$ sein können. Die Verbindung dieses letzteren Additionstheoremes mit dem ersten führt dann zu einem allgemeineren Theorem, dessen Ableitung so einfach ist, dass sie unterbleiben kann. Dieses allgemeinere Theorem kann dann in ganz ähnlicher Weise wie das ursprüngliche für die Transformationstheorie verwandt werden. Wir sehen hiervon aber einstweilen ab, wollen uns vielmehr sofort dazu wenden, die beiden Additionstheoreme für die einzelnen Transformationsgrade zu verwerthen. Hierbei machen wir die naheliegende Annahme, dass der Grad eine Primzahl sei und wollen uns zunächst auf den Fall der elliptischen Functionen beschränken. In der folgenden Notiz soll insbesondere der Fall der Multiplicator- und Modulargleichung 3. Grades ausführlicher behandelt werden. Die Resultate können selbstverständlich auf Neuheit keinen Anspruch machen — die Betrachtungen sollen vielmehr lediglich dazu dienen, die Bedeutung der Additionstheoreme für die Transformationstheorie zunächst in den einfachsten Fällen klar zu legen.

---

1) Siehe diese Berichte, Sitzung vom 6. Februar d. J.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen. Untersuchung des ersten Additionstheorems.

Als Wurzeln der Multiplicatorgleichung legen wir die folgenden zu Grunde

$$M_\xi = \vartheta_3\left(0, \frac{\tau - 16\xi}{n}\right)^2 : \vartheta_3(0,\tau)^2,$$

$$M_{n+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\, \vartheta_3(0, n\tau) : \vartheta_3(0,\tau)^2,$$

wobei unter n eine ungerade Primzahl — der Grad der Transformation — verstanden wird. Diese Grössen sind die reciproken Werthe derjenigen, die gewöhnlich als Wurzeln von Multiplicatorgleichungen verstanden werden. Die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit gebrochenen Charakteristiken lauten nun für den Index 3:

$$(1) \qquad \vartheta_3\left(v, \frac{\tau + 2^n\cdot\varrho}{n}\right) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \alpha^{\varrho\mu^2}\cdot \vartheta_3[\mu](nv, n\tau)$$

und umgekehrt:

$$(2) \quad \vartheta_3[\mu](nv,n\tau)+\vartheta_3[-\mu](nv,n\tau)=\frac{1}{n}\sum_{\mu}{}' \alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(v, \frac{\tau+2^n\cdot\varrho}{n}\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Setzen wir in diesen Formeln $v = 0$, so erhalten wir die Resultate:

$$(3) \quad \vartheta_3\left(0, \frac{\tau+2^n\cdot\varrho}{n}\right) = \vartheta_3(0, n\tau) + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{n-1}{2}} \alpha^{\varrho\mu^2}\vartheta_3[\mu](0, n\tau),$$

$$(4) \qquad 2\,\vartheta_3[\mu](0, n\tau) = \frac{1}{n}\sum_{\mu}{}' \alpha^{-\varrho\mu^2}\,\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+2^n\cdot\varrho}{n}\right).$$

Hieraus folgt, dass eine jede Relation zwischen den transformirten Thetafunctionen in eine Relation zwischen den von uns untersuchten Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken übergeführt werden kann und umgekehrt, wenn die Argumente der Null gleich gesetzt werden, eine Annahme, die bei unseren Untersuchungen erfüllt ist. Ausser den Functionen mit dem

Index 3 ziehen wir noch die Functionen mit den drei übrigen Indices hinzu. Auf diese Weise gelangen wir zu $2(n+1)$ Grössen, die wir bezeichnen wollen durch:

$$(5)\qquad \begin{cases} x_\varrho = \vartheta_3[\varrho](0, n\tau), & y_\varrho = \vartheta_0[\varrho](0, n\tau), \\ z_\varrho = \vartheta_2[\varrho](0, n\tau), & v_\varrho = \vartheta_1[\varrho](0, n\tau). \end{cases}$$

Von diesen Grössen können $(n+1)$, z. B. die Grössen z_ϱ und v_ϱ, in leichter Weise durch die übrigen ausgedrückt werden, so dass wir es nur mit $n+1$ neuen Grössen zu thun haben. Die Einführung dieser Grössen giebt uns sofort eine Eigenschaft der Multiplicatorgleichungen, wenn der Grad der Transformation eine Primzahl von der Form $4k+3$ ist. In der That, eine solche lässt sich nicht als Summe zweier Quadrate darstellen. Hieraus folgt:

$$\Sigma M = 0,$$

wobei die Summe über alle Wurzeln der Multiplicatorgleichung auszudehnen ist, oder also wir erhalten den

Lehrsatz. *In einer jeden Multiplicatorgleichung, bei welcher der Transformationsgrad eine Primzahl von der Form $4k+3$ ist, ist der Coefficient von M^n gleich Null.*

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir nunmehr zum Falle

$$n = 3$$

über.

Nach unseren allgemeinen Betrachtungen existirt dann das folgende Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\cdot\vartheta_3(v_2, 2\tau) = \Sigma\vartheta_3[g_1](2v_1+v_2, 6\tau)\cdot\vartheta_3[g_2](v_1-v_2, 3\tau),$$
$$g_1 \equiv 2s_1 + 2s_2 \bmod 6,$$
$$g_2 \equiv s_1 - 2s_2 \bmod 3.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$g_1 - 2g_2 \equiv 0 \bmod 6,$$

so dass wir die Formel erhalten:

$$(6)\qquad \vartheta_3(v_1, \tau)\cdot\vartheta_3(v_2, 2\tau)$$
$$= \vartheta_3[0](2v_1+v_2, 6\tau)\,\vartheta_3[0](v_1-v_2, 3\tau) + \vartheta_3[2](2v_1$$
$$+v_2, 6\tau)\,\vartheta_3[1](v_1-v_2, 3\tau) + \vartheta_3[4](2v_1+v_2, 6\tau)\,\vartheta_3[2](v_1-v_2, 3\tau).$$

Durch Specialisirung und unter Hinzunahme der bekannten Formeln der quadratischen Transformation ergeben sich hieraus eine ganze Reihe von Beziehungen zwischen den von uns eingeführten Grössen. Unter den Formeln der quadratischen Transformation wollen wir die folgenden herausgreifen, die bei unseren Untersuchungen besonders häufig gebraucht werden:

$$2\vartheta_3^2(v, 2\tau) = \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_3(v, \tau) + \vartheta_0(0, \tau) \cdot \vartheta_0(v, \tau),$$
$$2\vartheta_0^2(v, 2\tau) = \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_0(v, \tau) + \vartheta_0(0, \tau) \cdot \vartheta_3(v, \tau),$$
$$2\vartheta_2^2(v, 2\tau) = \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_3(v, \tau) - \vartheta_0(0, \tau) \cdot \vartheta_0(v, \tau),$$
$$2\vartheta_1^2(v, 2\tau) = \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_0(v, \tau) - \vartheta_0(0, \tau) \cdot \vartheta_3(v, \tau).$$

Unter den Formeln, die sich durch Specialisirung ergeben, wollen wir die beiden herausgreifen:

$$(7) \qquad \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_3(0, 2\tau)$$
$$= \vartheta_3(0, 6\tau)\,\vartheta_3(0, 3\tau) + 2\vartheta_3[2](0, 6\tau)\,\vartheta_3[1](0, 3\tau),$$

$$(8) \qquad \vartheta_3(0, \tau) \cdot \vartheta_2(0, 2\tau)$$
$$= \vartheta_2(0, 6\tau)\,\vartheta_3(0, 3\tau) + 2\vartheta_2[2](0, 6\tau)\,\vartheta_3[1](0, 3\tau).$$

Führen wir unsere Grössen x, y, z, v ein, so ergeben sich Irrationalitäten. Dieselben können ohne Mühe fortgeschafft werden, indessen ergeben sich die betreffenden Formeln einfacher aus unserem Additionstheorem für den Fall von vier Factoren.

In der That, wir können setzen:

$$3 = n = 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

Also folgt:

$$\Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \Sigma\Pi\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, 3\tau),$$
$$g_1 \equiv s_1 + s_2 + s_3 \bmod 3,$$
$$g_2 \equiv s_1 - s_2 - s_4 \bmod 3,$$
$$g_3 \equiv s_1 - s_3 + s_4 \bmod 3,$$
$$g_4 \equiv s_2 - s_3 - s_4 \bmod 3,$$
$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3,$$
$$w_2 = v_1 - v_2 - v_4,$$
$$w_3 = v_1 - v_3 + v_4,$$
$$w_4 = v_2 - v_3 - v_4.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$g_3 \equiv -g_1 - g_2 \bmod 3\ ,$$
$$g_4 \equiv -g_1 + g_2 \bmod 3\ ,$$

wobei g_1 und g_2 willkürlich bleiben. Mithin erhalten wir die Formel:

$$(9)\qquad \Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = [3_0]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_0]^{(3)}[3_0]^{(4)}$$
$$+ [3_1]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_2]^{(3)}[3_2]^{(4)} + [3_2]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_1]^{(3)}[3_1]^{(4)}$$
$$+ [3_1]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_1]^{(3)}[3_0]^{(4)} + [3_2]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_0]^{(3)}[3_2]^{(4)}$$
$$+ [3_0]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_1]^{(3)}[3_2]^{(4)} + [3_0]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_2]^{(3)}[3_1]^{(4)}$$
$$+ [3_1]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_0]^{(3)}[3_1]^{(4)} + [3_2]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_2]^{(3)}[3_0]^{(4)}\ ,$$

wobei wir gesetzt haben:

$$[\alpha_\beta] = \vartheta_\alpha[\beta](w, 3\tau)$$

und die oberen Indices die Indices der entsprechenden Argumente bedeuten.

Durch Specialisirung ergiebt sich eine grosse Fülle von Formeln. Wir greifen die folgenden heraus.

Setzen wir $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, so wird:

$$\vartheta_3^4 = x_0^4 + 8x_0 \cdot x_1^3\ .$$

Durch Substitution halber Perioden ferner ergeben sich die Beziehungen:

$$\vartheta_3^3 \cdot \vartheta_0 = y_0^3 \cdot x_0 + 6x_1 \cdot y_0 \cdot y_1^2 - 2x_0 \cdot y_1^3\ ,$$
$$\vartheta_3^2 \cdot \vartheta_0^2 = y_0^2 \cdot x_0^2 + 4x_0 \cdot x_1 \cdot y_1^2 - 4x_1^2 \cdot y_0 \cdot y_1\ ,$$
$$\vartheta_3 \cdot \vartheta_0^3 = y_0 \cdot x_0^3 - 6x_0 \cdot x_1^2 \cdot y_1 + 2x_1^3 \cdot y_0\ ,$$
$$\vartheta_0^4 = y_0^4 - 8y_0 \cdot y_1^3\ ,$$

ferner:

$$\vartheta_3^3 \cdot \vartheta_2 = z_0^3 \cdot x_0 + 6x_1 \cdot z_0 \cdot z_1^2 + 2x_0 \cdot z_1^3\ ,$$
$$\vartheta_3^2 \cdot \vartheta_2^2 = z_0^2 \cdot x_0^2 + 4x_0 \cdot x_1 \cdot z_1^2 + 4x_1^2 \cdot z_0 \cdot z_1\ ,$$
$$\vartheta_3 \cdot \vartheta_2^3 = z_0 \cdot x_0^3 + 6x_0 \cdot x_1^2 \cdot z_1 + 2x_1^3 \cdot z_0\ ,$$
$$\vartheta_2^4 = z_0^4 + 8z_0 \cdot z_1^3\ .$$

Schon diese Relationen genügen, um zwei weitere Coefficienten der Multiplicatorgleichung zu bestimmen.

In der That, es ist:

$$\vartheta_3^4\left(0, \frac{\tau + 8\varrho}{3}\right)$$
$$= x_0^4 + 8\alpha^\varrho \cdot x_0^3 \cdot x_1 + 24\alpha^{2\varrho} \cdot x_0^2 \cdot x_1^2 + 32x_0 \cdot x_1^3 + 16\alpha^\varrho \cdot x_1^4\ .$$

Hieraus folgt durch Anwendung unseres Additionstheoremes:

$$\vartheta_3^4(0,\tau)\,\Sigma M^2 = 12\,(x_0^4 + 8x_0x_1^3) = 12\,\vartheta_3^4(0,\tau)\,,$$

oder also

$$\Sigma M^2 = 12\,, \tag{10}$$

so dass die zweite Potenzsumme unmittelbar bestimmt ist.

Ebenso einfach folgt:

$$\vartheta_3^8\,\Sigma M^4 = 84\,(x_0^4 + 8x_0x_1^3)^2 = 84\,\vartheta_3^8$$

oder:

$$\Sigma M^4 = 84\,. \tag{11}$$

Es zeigt sich also, dass unsere Betrachtungen unmittelbar zu der Berechnung von drei Coefficienten der Multiplicatorgleichung führen, so dass nur noch ein Coefficient unbestimmt bleibt. Zu demselben Resultate kommen wir durch die folgende Betrachtung.

Es ist:

$$\vartheta_3^6\,\Sigma M^3 = 24\,(-x_0^6 + 20x_0^3x_1^3 + 8x_1^6)\,.$$

Wir wollen diesen Ausdruck durch c bezeichnen. Erwägen wir nun die Beziehung:

$$x_0^2 = -\frac{\vartheta_3^2 \cdot M}{3}\,,$$

so erhalten wir für M die Gleichung:

$$M^4 - 6M^2 - \frac{cM}{3\,\vartheta_3^6} - 3 = 0 \tag{12}$$

und das ist die Multiplicatorgleichung, die zu der Transformation dritten Grades gehört, bei welcher freilich noch ein Coefficient unbestimmt bleibt.

§ 2.

Untersuchung des zweiten Additionstheorems.

Das zweite Additionstheorem, auf welches in der Einleitung hingewiesen wurde, ist eine unmittelbare Folge der in den citirten Arbeiten angegebenen Additionstheoreme des Verfassers, so dass wir uns damit begnügen können, es einfach hinzuschreiben.

Es ist:

$$(1)\qquad c\cdot\Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon\tau) = \Sigma\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$

$$2w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1}\cdot v_1 + a_{\varepsilon 2}\cdot v_2 + \cdots + a_{\varepsilon n}\cdot v_n,$$

$$2\eta_\varepsilon = a_{\varepsilon 1}\cdot \eta_1' + a_{\varepsilon 2}\cdot \eta_2' + \cdots + a_{\varepsilon n}\cdot \eta_n',$$

wobei die Zahlen m_ε und n_ε beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, die Grössen η' die Werthe 0 und 1 annehmen können und ferner die folgenden Bedingungsgleichungen bestehen:

$$m_1\cdot a_{\varepsilon 1}^2 + m_2\cdot a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots + m_n\cdot a_{\varepsilon n}^2 = 4n_\varepsilon,$$

$$m_1\cdot a_{\varepsilon 1}\cdot a_{k1} + m_2\cdot a_{\varepsilon 2}\cdot a_{k2} + \cdots + m_n\cdot a_{\varepsilon n}\cdot a_{kn} = 0,$$

oder auch:

$$m_\varepsilon\left(\frac{a_{1\varepsilon}^2}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}^2}{n_2} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon}^2}{n_n}\right) = 4,$$

$$\frac{a_{1\varepsilon}\cdot a_{1k}}{n_1} + \frac{a_{2\varepsilon}\cdot a_{2k}}{n_2} + \cdots + \frac{a_{n\varepsilon}\cdot a_{nk}}{n_n} = 0.$$

Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$(2)\quad g_k \equiv a_{k1}\cdot m_1\cdot s_1 + a_{k2}\cdot m_2\cdot s_2 + \cdots + a_{kn}\cdot m_n\cdot s_n \bmod 2n_k.$$

Um die Anwendung dieses Additionstheoremes handelt es sich.

Wir nehmen zunächst den Fall von zwei Factoren und setzen

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 3,$$

dann wird:

$$c\cdot\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,3\tau) = \Sigma\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1+\eta_1, 3\tau)\cdot\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2+\eta_2,\tau),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$2w_1 = 3v_1 + v_2, \quad 2\eta_1 = 3\eta_1' + \eta_2',$$
$$2w_2 = v_1 - v_2, \quad 2\eta_2 = \eta_1' - \eta_2',$$

und zwischen g_1 und g_2 die Congruenz besteht:

$$\frac{g_1}{3} + g_2 \equiv 0 \bmod 2.$$

Die Constante c ist in der allgemeinen Formel, wie auch in der speciellen unmittelbar bestimmt — im vorliegenden Falle gleich 2, sodass wir die Formel erhalten:

$$(3)\qquad 2\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,3\tau)=\vartheta_3(w_1,3\tau)\cdot\vartheta_3(w_2,\tau)+\vartheta_2(w_1,3\tau)\cdot\vartheta_2(w_2,\tau)+\vartheta_0(w_1,3\tau)\cdot\vartheta_0(w_2,\tau)-\vartheta_1(w_1,3\tau)\cdot\vartheta_1(w_2,\tau).$$

Diese Formel findet sich schon in den SCHRÖTER'schen Arbeiten vor, wie denn überhaupt der Fall, dass die Producte aus zwei Factoren bestehen, in den SCHRÖTER'schen Arbeiten ausführlich behandelt worden ist.

Setzt man $v_1=v_2=0$, so ergiebt sich die bekannte Relation:

$$(4)\qquad \vartheta_3\cdot x_0=\vartheta_0\cdot y_0+\vartheta_2\cdot z_0.$$

Setzt man $v_1=\frac{1}{3}$, $v_2=0$, so wird:

$$(5)\qquad \vartheta_3(\tfrac{1}{3})\,x_0=\vartheta_0(\tfrac{1}{3})\,y_0-\vartheta_2(\tfrac{1}{3})\,z_0,$$

setzt man $v_1=0$, $v_2=\tau$, so wird:

$$(6)\qquad \vartheta_3\cdot x_1=-\vartheta_0\cdot y_1+\vartheta_2\cdot z_1,$$

und so können noch weitere Specialisirungen vorgenommen werden.

Wir nehmen nun den Fall dreier Factoren und setzen:

$$m_1=1,\quad m_2=2,\quad m_3=6.$$

Es ergiebt sich mit Hülfe weniger Schlüsse das Additionstheorem:

$$c\cdot\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,2\tau)\cdot\vartheta_3(v_3,6\tau)$$
$$=\Sigma\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1+\eta_1,3\tau)\cdot\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2+\eta_2,3\tau)\cdot\vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3+\eta_3,3\tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$2w_1=2v_1+v_2+v_3,\quad 2\eta_1=2\eta_1'+\eta_2'+\eta_3',$$
$$2w_2=2v_1+v_2-v_3,\quad 2\eta_2=2\eta_1'+\eta_2'-\eta_3',$$
$$2w_3=2v_1-2v_2,\quad 2\eta_3=2\eta_1'-2\eta_2',$$

und die Grössen g die Werthe annehmen können:

$$g_1=g_2=g_3=0,$$
$$g_1=g_2=g_3=2,$$
$$g_1=g_2=g_3=4.$$

Somit ergiebt sich die folgende allgemeine Formel:

$$(7)\qquad 2\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,2\tau)\cdot\vartheta_3(v_3,6\tau)$$
$$=[3_0]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_0]^{(3)}+[3_2]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_2]^{(3)}+[3_1]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_1]^{(3)}$$
$$+[0_0]^{(1)}[0_0]^{(2)}[3_0]^{(3)}+[0_2]^{(1)}[0_2]^{(2)}[3_2]^{(3)}+[0_1]^{(1)}[0_1]^{(2)}[3_1]^{(3)}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich durch Specialisirung eine grössere Anzahl Thetarelationen.

Setzen wir:

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0\,,$$

so erhalten wir die Formel:

(8) $2\vartheta_3 \cdot \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 6\tau) = (x_0^2 + y_0^2)\, x_0 + 2(x_1^2 + y_1^2)\, x_1\,,$

setzen wir:

$$v_1 = 0\,, \quad v_2 = \tau\,, \quad v_3 = 3\tau\,,$$

so ergiebt sich:

(9) $2\vartheta_3 \cdot \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 6\tau) = (x_0^2 - y_0^2)\, x_0 + 2(x_1^2 - y_1^2)\, x_1\,.$

Durch Addition finden wir die Formel:

(10) $\vartheta_3(\vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 6\tau) + \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 6\tau)) = x_0^3 + 2x_1^3\,.$

Aehnlich wird:

(11) $\vartheta_3(\vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 6\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 6\tau)) = x_0 \cdot y_0^2 + 2x_1 \cdot y_1^2\,,$

(12) $\vartheta_3(\vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 6\tau) + \vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 6\tau)) = x_0 \cdot z_0^2 + 2x_1 \cdot z_1^2\,,$

(13) $\vartheta_3(\vartheta_3(0, 2\tau) \cdot \vartheta_2(0, 6\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau) \cdot \vartheta_3(0, 6\tau)) = 2x_1 \cdot v_1^2\,.$

Durch Quadriren lassen sich die Moduln 2τ und 6τ fortschaffen, so erhalten wir z. B. die Relation:

(14) $\vartheta_3^3(\vartheta_3^3 \cdot x_0^3 + \vartheta_0^3 \cdot y_0^3 + \vartheta_2^3 \cdot z_0^3) = 2x_0^6 + 8x_0^3 \cdot x_1^3 + 8x_1^6$

u. s. f. Dieselben Relationen lassen sich, wie wir sehen werden, unmittelbar aus anderen Additionstheoremen herleiten, ohne dass es nöthig ist, Quadrirungen vorzunehmen.

Im Falle von vier Factoren können mehrere Additionstheoreme aufgestellt werden. Wir beschränken uns darauf, ein einziges kurz anzuführen. Es ist:

$$c \cdot \vartheta_3(v_1, \tau) \cdot \vartheta_3(v_2, \tau) \cdot \vartheta_3(v_3, \tau) \cdot \vartheta_3(v_4, \tau) = \Sigma \vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1 + \eta, 3\tau)$$

$$\cdot \vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2 + \eta_2, 2\tau) \cdot \vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3 + \eta_3, 3\tau) \cdot \vartheta_3\left[\frac{g_4}{2}\right](w_4 + \eta_4, 3\tau)$$

mit den Beziehungen:

$$\begin{aligned}
w_1 &= 3v_1 + v_2 + v_3 + v_4\,, & \eta_1 &= 3\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' + \eta_4'\,,\\
w_2 &= v_1 - 3v_2 + v_3 - v_4\,, & \eta_2 &= \eta_1' - 3\eta_2' + \eta_3' - \eta_4'\,,\\
w_3 &= v_1 - v_2 - 3v_3 + v_4\,, & \eta_3 &= \eta_1' - \eta_2' - 3\eta_3' + \eta_4'\,,\\
w_4 &= v_1 + v_2 - v_3 - 3v_4\,, & \eta_4 &= \eta_1' + \eta_2' - \eta_3' - 3\eta_4'\,.
\end{aligned}$$

$$g_3 \equiv -g_1 - 2g_2 \bmod 3\,,$$

$$g_4 \equiv \quad g_1 + \quad g_2 \bmod 3\,.$$

Die entsprechende Formel gestaltet sich ziemlich umfangreich. Da die Specialisirungen zu keinen wesentlich neuen Resultaten führen, so möge von ihrer Aufstellung abgesehen werden. Ebenso wenig wollen wir auf den Fall von fünf Factoren eingehen, vielmehr wollen wir uns darauf beschränken, ein Additionstheorem zwischen Producten von sechs Factoren zum Schluss aufzustellen.

Wir setzen:

$$m_1 = 1\,, \quad m_2 = 1\,, \quad m_3 = 1\,, \quad m_4 = 1\,, \quad m_5 = m_6 = 3\,,$$
$$n_\varepsilon = 3\,,$$

dann wird:

$$c\,\Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon\tau) = \Sigma\,\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, 3\tau),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$2w_1 = 2v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6\,, \quad 2w_4 = -2v_1 - v_3 + v_4 + v_5 - v_6\,,$$
$$2w_2 = -2v_2 - v_3 - v_4 + v_5 + v_6\,, \quad 2w_5 = 2v_1 - 2v_3 + 2v_4\,,$$
$$2w_3 = 2v_1 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6\,, \quad 2w_6 = 2v_2 - 2v_3 - 2v_4\,,$$

und die Congruenzen bestehen:

$$g_2 \equiv -\,g_1 \bmod 6\,, \quad g_4 \equiv -\,g_3 \bmod 6\,,$$
$$g_5 \equiv -\,2g_3 \bmod 6\,, \quad g_6 \equiv -\,2g_1 \bmod 6\,.$$

Auf die Bestimmung der Grössen η braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Die fertige Formel wollen wir folgendermassen schreiben: Wir setzen

$$\begin{aligned}
P_1 &= [3_0]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} + [2_0]^{(1)}[2_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} + [3_1]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} \\
&\quad + [3_2]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_2]^{(6)} + [2_2]^{(1)}[2_1]^{(2)}[3_2]^{(6)} + [2_1]^{(1)}[2_2]^{(2)}[3_1]^{(6)}\,, \\
P_2 &= [3_0]^{(1)}[3_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} - [2_0]^{(1)}[2_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} + [3_1]^{(1)}[3_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} \\
&\quad + [3_2]^{(1)}[3_1]^{(2)}[3_2]^{(6)} - [2_1]^{(1)}[2_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} - [2_2]^{(1)}[2_1]^{(2)}[3_2]^{(6)}\,, \\
Q_1 &= [0_0]^{(1)}[0_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} + [1_0]^{(1)}[1_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} - [0_1]^{(1)}[0_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} \\
&\quad - [0_2]^{(1)}[0_1]^{(2)}[3_2]^{(6)} - [1_1]^{(1)}[1_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} - [1_2]^{(1)}[1_1]^{(2)}[3_2]^{(6)}\,, \\
Q_2 &= [0_0]^{(1)}[0_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} - [1_0]^{(1)}[1_0]^{(2)}[3_0]^{(6)} - [0_1]^{(1)}[0_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} \\
&\quad - [0_2]^{(1)}[0_1]^{(2)}[3_2]^{(6)} + [1_1]^{(1)}[1_2]^{(2)}[3_1]^{(6)} + [1_2]^{(1)}[1_1]^{(2)}[3_2]^{(6)}\,.
\end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind die analogen wie früher, die obigen Indices sind gleich den Indices der entsprechenden Argumente w.

Wir wollen nun unter P', Q' diejenigen Grössen verstehen, die aus den obigen entstehen, wenn an Stelle der oberen Indices (1), (2), (6) die Indices (3), (4), (5) gesetzt werden, dann lautet das Additionstheorem:

$$(15)\quad 4\Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon\tau) = P_1\cdot P_1' + P_2\cdot P_2' + Q_1\cdot Q_1' + Q_2\cdot Q_2'.$$

Durch Specialisirung der Argumente ergiebt sich hieraus wiederum eine grössere Reihe von Beziehungen und zwar derartige, auf welche bei Gelegenheit des Additionstheoremes zwischen Producten von je drei Factoren hingewiesen wurde. Wir setzen $v_1 \cdots = v_6 = 0$, so wird:

$$(16)\quad \vartheta_3^4\cdot x_0^2 = (x_0^3 + 2x_1^3)^2 + (z_0^2\cdot x_0 + 2z_1^2\cdot x_1)^2 + (y_0^2\cdot x_0 + 2y_1^2\cdot x_1)^2 + 4v_1^4\cdot x_1^2,$$

und ebenso lassen sich durch andere Specialisirungen weitere Relationen herleiten, indessen werden die bisherigen Betrachtungen genügen, um die Anwendbarkeit unserer Additionstheoreme für die Transformationstheorie darzuthun.

Friedrich Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie.* VIII. [1])

Ueber die integrabeln Gruppen.

In Nr. II meiner kleineren Beiträge zur Gruppentheorie (d. Ber. 1887, S. 95 ff.) habe ich einen Satz aufgestellt, der folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Eine r-gliedrige Gruppe ist stets dann aber auch nur dann integrabel, wenn sie keine dreigliedrige Untergruppe enthält, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der geraden Linie gleichzusammengesetzt ist.

Meine damalige Formulirung des Satzes lautet etwas anders, weil Lie den Namen: »integrable Gruppe« noch nicht eingeführt hatte. Ausserdem bezeichnete ich damals die dreigliedrigen Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden gleichzusammengesetzt sind, kurz als Kegelschnittsgruppen. So bequem auch dieser Ausdruck in vielen Fällen ist, so ist er doch nicht ganz glücklich gewählt; ich werde ihn deshalb hier vermeiden und lieber statt seiner sagen: die Gruppen von der Zusammensetzung:

$$(1) \qquad (Z_1 Z_2) = Z_1 f, \quad (Z_1 Z_3) = 2 Z_2 f, \quad (Z_2 Z_3) = Z_3 f$$

oder noch kürzer: die Gruppen (1).

Der Beweis, den ich a. a. O. für meinen Satz gegeben habe, enthält eine Lücke. Ich setzte nämlich dabei als selbstverständlich voraus, dass die Gruppe (1) zu einer Gruppe, die keine Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält, niemals mero-

1) VII in diesen Berichten 1892, S. 292 ff.

edrisch isomorph sein könne. Später bemerkte ich, dass das gar nicht so selbstverständlich ist, dass es vielmehr erst bewiesen werden muss, und es gelang mir auch, einen Beweis dafür zu finden. Ich habe auf diesen Punkt bereits selbst hingewiesen (Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. für 1887, S. 356).

KILLING hat seitdem meinen Satz aus seinen allgemeinen Theorien über die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppen abgeleitet (s. math. Ann. Bd. 36, S. 169 ff.). Da aber seine Untersuchungen dem Verständnisse ziemliche Schwierigkeiten bereiten, so halte ich es für richtig, auch die allerdings recht weitläufigen Betrachtungen zu veröffentlichen, durch die es mir gelungen ist, die Lücke in meinem ursprünglichen Beweise auszufüllen. Ein Grund mehr für mich ist der Umstand, dass gerade in den allgemeinen KILLINGschen Theorien die Beweise zum Theil nicht mit der nöthigen Sorgfalt geführt sind. Ich selbst habe schon vor längerer Zeit einige Fehler in den KILLINGschen Arbeiten bemerkt und neuerdings hat Herr CARTAN noch andere Fehler darin gefunden (s. Comptes Rendus 1893, Bd. 116, S. 784 ff.).

Die Lücke, die mein Beweis von 1887 enthält, hat zur Folge, dass durch meine damaligen Betrachtungen eigentlich nur der folgende Satz bewiesen ist:

Satz 1. *Ist in einer r-gliedrigen Gruppe keine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (1) *enthalten und ist ausserdem die Gruppe* (1) *nicht mit ihr meroedrisch isomorph, so ist die r-gliedrige Gruppe integrabel. Enthält dagegen eine r-gliedrige Gruppe eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (1), *so ist sie nicht integrabel.*

Wollen wir daher den damals gegebenen Beweis vervollständigen, so müssen wir noch zeigen, dass die Gruppe (1) zu einer r-gliedrigen Gruppe, die keine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält, auch niemals isomorph sein kann oder, was auf dasselbe hinauskommt, *dass jede r-gliedrige Gruppe, mit der die Gruppe* (1) *meroedrisch isomorph ist, eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (1) *enthält.*

Den Beweis hierfür wollen wir jetzt auseinandersetzen.

Ist die Gruppe (1) zu einer andern Gruppe meroedrisch isomorph, so ist die Gliederzahl dieser letzteren nothwendig > 3, also etwa $= r + 3$ $(r > 0)$ und die Zusammensetzung

dieser $(r+3)$-gliedrigen Gruppe G_{r+3} wird durch Gleichungen von der Form:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} (X_1 X_2) \equiv X_1 f \\ (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f \\ (X_2 X_3) \equiv X_3 f \\ (X_i Y_k) \equiv 0 \\ (Y_k Y_j) \equiv 0 \\ (i = 1, 2, 3;\ k, j = 1 \cdots r) \end{array}\right\} \text{ modd. } Y_1 f \cdots Y_r f$$

bestimmt. Hier ist: $Y_1 f \cdots Y_r f$ die r-gliedrige invariante Untergruppe der G_{r+3}, die der identischen Substitution entspricht, wenn man die G_{r+3} und die Gruppe (1) isomorph auf einander bezieht. Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, dass die beiden infinitesimalen Transformationen, zwischen denen es steht, sich nur um einen Ausdruck unterscheiden, der aus $Y_1 f \cdots Y_r f$ linear abgeleitet werden kann.

Zu beweisen ist, dass jede G_{r+3} von der Zusammensetzung (2) eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält.

Wäre die Gruppe (1) auch mit der invarianten Untergruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ unsrer G_{r+3} isomorph, so wäre es offenbar bequemer, nicht die G_{r+3} zu betrachten, sondern die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ und zu beweisen, dass diese eine Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält. Die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ enthielte dann nothwendig eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe. Wäre nun die Gruppe (1) auch mit dieser $(r-3)$-gliedrigen Gruppe meroedrisch isomorph, so brauchten wir blos zu beweisen, dass diese $(r-3)$-gliedrige Gruppe eine Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält. Fahren wir so fort, so erkennen wir, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, *dass die Gruppe* (1) *mit der r-gliedrigen invarianten Untergruppe:* $Y_1 f \ldots Y_r f$ *unsrer* G_{r+3} *nicht meroedrisch isomorph ist.*

Enthielte nun die Gruppe: $Y_1 f \ldots Y_r f$ eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1), so enthielte auch unsre G_{r+3} eine und wir wären fertig. Wir können daher zu der eben gemachten Annahme noch die Voraussetzung hinzufügen, dass die Gruppe: $Y_1 f \ldots Y_r f$ keine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält. Dann aber ist die

Gruppe: $Y_1 f \dots Y_r f$ nach Satz 1 integrabel. *Wir brauchen demnach nur noch zu beweisen, dass jede* $(r+3)$*-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung* (2), *deren invariante Untergruppe:* $Y_1 f \dots Y_r f$ *integrabel ist, eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (1) *enthält.*

Wir setzen also jetzt voraus, dass die Gruppe: $Y_1 f \dots Y_r f$ integrabel ist. Ihre erste derivirte Gruppe, so heisst nach LIE die Gruppe, die von allen $(Y_k Y_j)$ erzeugt wird, ist dann nicht r-gliedrig, wir können daher annehmen, dass sie blos $(r-n)$-gliedrig ist und von den infinitesimalen Transformationen: $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ erzeugt wird. Diese Gruppe: $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ ist wiederum integrabel und ausserdem ist sie eine invariante Untergruppe nicht blos der Gruppe: $Y_1 f \dots Y_r f$ sondern auch der ganzen G_{r+3}: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $Y_1 f \dots Y_r f$, denn die erste derivirte Gruppe jeder invarianten Untergruppe unsrer G_{r+3} ist stets wieder eine invariante Untergruppe der G_{r+3}.[1]) Hieraus folgt, dass die Gleichungen (2) jetzt die einfachere Form:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} (X_1 X_2) \equiv X_1 f + \sum_1^n{}^{\mu} a_\mu Y_\mu f \\ (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f + \sum_1^n{}^{\mu} b_\mu Y_\mu f \\ (X_2 X_3) \equiv X_3 f + \sum_1^n{}^{\mu} c_\mu Y_\mu f \\ (X_i Y_\nu) \equiv \sum_1^n{}^{\mu} h_{i\nu\mu} Y_\mu f \\ (X_i Y_{n+\tau}) \equiv (Y_k Y_j) \equiv 0 \end{array}\right\} \text{modd. } Y_{n+1} f \cdots Y_r f$$

$$(i = 1, 2, 3;\ \nu = 1 \cdots n;\ \tau = 1 \cdots r-n;\ k, j = 1 \cdots r)$$

annehmen, wo die Gruppe: $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ wiederum integrabel ist.

Da: $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ eine invariante Untergruppe unsrer G_{r+3} erzeugen, so erhalten wir, wenn wir $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ alle gleich Null setzen, aus (3) die Gleichungen für die Zusammensetzung

---

1) Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet von LIE unter Mitwirkung von F. ENGEL, Abschn. I, S. 262, Satz 7.

einer $(n+3)$-gliedrigen Gruppe G_{n+3}, die mit unsrer G_{r+3} meroedrisch isomorph ist. Diese G_{n+3} hat die Zusammensetzung:

$$(4)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = \mathfrak{X}_1 f + \sum_1^n{}_\mu\, a_\mu \mathfrak{Y}_\mu f \\ (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_3) = 2\mathfrak{X}_2 f + \sum_1^n{}_\mu\, b_\mu \mathfrak{Y}_\mu f \\ (\mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3) = \mathfrak{X}_3 f + \sum_1^n{}_\mu\, c_\mu \mathfrak{Y}_\mu f \\ (\mathfrak{X}_i \mathfrak{Y}_\nu) = \sum_1^n{}_\mu\, h_{i\mu} \mathfrak{Y}_\mu f \\ (\mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Y}_\nu) = 0 \\ (i = 1, 2, 3;\ \mu, \nu = 1 \cdots n), \end{cases}$$

sie ist also eine Gruppe von derselben Beschaffenheit wie die Gruppe (2), nur sind die infinitesimalen Transformationen ihrer invarianten Untergruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_n f$ paarweise vertauschbar.

Um nun nachzuweisen, dass unsre Gruppe (3) eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält, brauchen wir nur zu zeigen, dass jede Gruppe von der Zusammensetzung (4) eine solche Untergruppe enthält, dass es also möglich ist, an Stelle von: $\mathfrak{X}_1 f$, $\mathfrak{X}_2 f$, $\mathfrak{X}_3 f$ solche Ausdrücke:

$$\overline{\mathfrak{X}}_i f = \mathfrak{X}_i f + \sum_1^n{}_\mu\, \alpha_{i\mu} \mathfrak{Y}_\mu f$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

einzuführen, dass sich aus (4) die einfachen Beziehungen:

$$(\overline{\mathfrak{X}}_1 \overline{\mathfrak{X}}_2) = \overline{\mathfrak{X}}_1 f, \quad (\overline{\mathfrak{X}}_2 \overline{\mathfrak{X}}_3) = \overline{\mathfrak{X}}_3 f$$
$$(\overline{\mathfrak{X}}_1 \overline{\mathfrak{X}}_3) = 2\overline{\mathfrak{X}}_2 f$$

ergeben. Ist es uns nämlich gelungen dies zu zeigen, so denken wir uns die Constanten $\alpha_{i\mu}$ in der angegebenen Weise bestimmt, führen in (3) die Ausdrücke:

$$X_i f + \sum_1^n{}_\mu\, \alpha_{i\mu} Y_\mu f \qquad (i = 1, 2, 3)$$

als neue $X_i f$ ein und erreichen dadurch, dass die Constanten: a_μ, b_μ, c_μ alle verschwinden. Dann aber erzeugen offenbar die

$r - n + 3$ infinitesimalen Transformationen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ eine $(r - n + 3)$-gliedrige Untergruppe unsrer G_3. Da nun: $Y_{n+1} f \dots Y_r f$ eine integrable Gruppe erzeugen, so können wir auf diese $(r - n + 3)$-gliedrige Gruppe dasselbe Verfahren anwenden wie auf die ursprüngliche G_{r+3}. Fahren wir in dieser Weise fort, so müssen wir schliesslich auf eine in unsrer G_{r+3} enthaltene $(l + 3)$-gliedrige Gruppe stossen, die ebenfalls eine Zusammensetzung von der Form (2) besitzt, deren invariante l-gliedrige Untergruppe aber aus paarweise vertauschbaren Transformationen besteht. Wenn wir daher als bewiesen annehmen, dass jede solche $(l + 3)$-gliedrige Gruppe eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält, so ist damit zugleich bewiesen, dass unsre G_{r+3} eine enthält.

Durch das Vorstehende ist unsre Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt, nachzuweisen, *dass jede* $(n + 3)$*-gliedrige Gruppe* G_{n+3} *von der Zusammensetzung* (4) *eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (1) *enthält.*

Wir können annehmen, dass die grössten in der Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \dots \mathfrak{Y}_n f$ enthaltenen Untergruppen, die in der ganzen G_{n+3}: $\mathfrak{X}_1 f$, $\mathfrak{X}_2 f$, $\mathfrak{X}_3 f$, $\mathfrak{Y}_1 f \dots \mathfrak{Y}_n f$ invariant sind, die Gliederzahl $n - m$ besitzen, und dass: $\mathfrak{Y}_{m+1} f \dots \mathfrak{Y}_n f$ eine Untergruppe von dieser Beschaffenheit erzeugen. Setzen wir dann: $\mathfrak{Y}_{m+1} f \dots \mathfrak{Y}_n f$ alle gleich Null, so erhalten wir aus (4) die Zusammensetzung einer $(m + 3)$-gliedrigen Gruppe G_{m+3}, die mit unsrer G_{n+3} meroedrisch isomorph ist. Diese Gruppe hat die Zusammensetzung:

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
(\Xi_1 \Xi_2) = \Xi_1 f + \sum_1^m{}^{\mu} a_\mu H_\mu f \\
(\Xi_1 \Xi_3) = 2\,\Xi_2 f + \sum_1^m{}^{\mu} b_\mu H_\mu f \\
(\Xi_2 \Xi_3) = \Xi_3 f + \sum_1^m{}^{\mu} c_\mu H_\mu f \\
(\Xi_i H_\nu) = \sum_1^m{}^{\mu} h_{i\nu\mu} H_\mu f \\
(H_\mu H_\nu) = 0 \\
(i = 1, 2, 3;\ \mu, \nu = 1 \cdots m),
\end{cases}
$$

sie ist also eine Gruppe von ähnlicher Beschaffenheit wie die G_{n+3}, *nur hat sie die Eigenschaft, dass ihre invariante Untergruppe:* $H_1 f \ldots H_m f$ *keine Untergruppe mehr enthält, die in der ganzen* $(m+3)$*-gliedrigen Gruppe:* $\Xi_i f$, $H_\mu f$ *invariant ist.* Enthielte nämlich: $H_1 f \ldots H_m f$ eine derartige Untergruppe, die nicht blos aus der identischen Transformation bestände, so ergäbe sich daraus ein Widerspruch mit der Voraussetzung, die wir über die Gruppe: $\mathfrak{Y}_{m+1} f \ldots \mathfrak{Y}_n f$ gemacht haben.

Genau so nun, wie wir oben die Untersuchung der Gruppen von der Zusammensetzung (3) auf die der Gruppen von der Zusammensetzung (4) zurückführten, können wir jetzt zeigen, dass die Untersuchung der Gruppen (4) auf die der Gruppen von der besonderen Beschaffenheit (5) hinauskommt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, *dass jede* $(m+3)$*-gliedrige Gruppe:* $\Xi_i f$, $H_\mu f$, *die die Zusammensetzung* (5) *und ausserdem die vorhin angegebene besondere Beschaffenheit besitzt, eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung* (4) *enthält.*

Um diesen letzten Schritt zu thun, deuten wir die ∞^{m+2} infinitesimalen Transformationen der G_{m+3}: $\Xi_i f$, $H_\mu f$ als Punkte in einem $(m+2)$-fach ausgedehnten Raume R_{m+2} und denken uns die Punkte dieses Raumes durch die adjungirte Gruppe unsrer G_{m+3} transformirt. In unserm R_{m+2} bleibt dabei eine ebene $(m-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_{m-1} invariant, die das Bild der invarianten Untergruppe: $H_1 f \ldots H_m f$ ist, da aber diese Untergruppe keine in der G_{m+3} invariante Untergruppe enthält, so ist sicher, dass in dieser E_{m-1} keine kleinere invariante ebene Mannigfaltigkeit auftritt.

Nun sind die $H_\mu f$ paarweise vertauschbar, demnach werden die Punkte unsrer E_{m-1} bei der adjungirten Gruppe der G_{m+3} blos dreigliedrig transformirt und zwar durch eine dreigliedrige projective Gruppe, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt ist und die keine in der E_{m-1} liegende ebene Mannigfaltigkeit invariant lässt[1]). Nach einem alten Satze von LIE folgt hieraus, dass in unsrer E_{m-1} eine möglichst gekrümmte rationale Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung invariant bleibt.

---

1) Auf den Fall $m = 1$ brauche ich wohl nicht besonders einzugehen, ich nehme daher im Folgenden $m > 1$ an.

Ist: $v_1 H_1 f + \cdots + v_m H_m f$ die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe: $H_1 f \ldots H_m f$, so können wir durch eine lineare homogene Transformation der v stets erreichen, dass die eben besprochene rationale Curve durch die Gleichungen:

$$v_\mu = t_1^{\mu-1} t_2^{m-\mu} \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

dargestellt wird. Die Schaar der ∞^1 infinitesimalen Transformationen, die den Punkten dieser Curve entsprechen, hat dann die Form:

$$\sum_1^m{}_\mu \, t_1^{\mu-1} t_2^{m-\mu} H_\mu f .$$

Da nun diese Schaar bei allen Transformationen unsrer G_{m+3} invariant bleiben muss, so ergiebt sich schliesslich, dass die Ausdrücke $(\Xi_i H_\mu)$ bei geeigneter Wahl der $\Xi_i f$ die Form:

$$(6) \quad \begin{cases} (\Xi_1 H_\mu) = \mu H_{\mu+1} f \\ (\Xi_2 H_\mu) = \dfrac{m - 2\mu + 1}{2} H_\mu f \\ (\Xi_3 H_\mu) = -(m - \mu + 1) H_{\mu-1} f \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m) \end{cases}$$

erhalten können, wo natürlich $H_{m+1} f$ und $H_0 f$ gleich Null zu setzen sind.

Um jetzt auch die übrigen der Relationen (5) zu vereinfachen, setzen wir:

$$\Xi_1' f = \Xi_1 f + \sum_1^m{}_\mu \, \alpha_\mu H_\mu f$$

$$\Xi_3' f = \Xi_3 f + \sum_1^m{}_\mu \, \gamma_\mu H_\mu f$$

und bekommen aus (5) und (6):

$$(7) \quad \begin{cases} (\Xi_1' \Xi_2) = \Xi_1' f + \sum_1^m{}_\mu \left(\alpha_\mu - \left(1 + \dfrac{m - 2\mu + 1}{2}\right) \alpha_\mu \right) H_\mu f \\ (\Xi_2 \Xi_3') = \Xi_3' f + \sum_1^m{}_\mu \left(c_\mu - \left(1 - \dfrac{m - 2\mu + 1}{2}\right) \gamma_\mu \right) H_\mu f. \end{cases}$$

Ist daher m gerade, so können wir die α_μ und γ_μ stets so wählen,

dass rechts alle Glieder mit $H_1 f \ldots H_m f$ verschwinden. Wir haben dann einfach:

$$(\Xi_1' \Xi_2) = \Xi_1' f, \quad (\Xi_2 \Xi_3') = \Xi_3 f$$

und durch Bildung der JACOBISCHEN Identität zwischen: $\Xi_1 f$, $\Xi_2 f$, $\Xi_3' f$ ergiebt sich überdies, dass zugleich:

$$(\Xi_1' \Xi_3') = 2\,\Xi_2 f$$

wird.

Ist dagegen m ungerade, etwa $= 2\mathfrak{m} - 1$, so kann man durch geeignete Wahl der α und γ nur erreichen, dass die Gleichungen (7) die Form:

$$(7') \qquad \begin{cases} (\Xi_1' \Xi_2) = \Xi_1' f + a_{\mathfrak{m}+1} H_{\mathfrak{m}+1} f \\ (\Xi_2 \Xi_3') = \Xi_3' f + c_{\mathfrak{m}-1} H_{\mathfrak{m}-1} f \end{cases}$$

annehmen. Durch Bildung der JACOBISCHEN Identität ergiebt sich nunmehr, dass $(\Xi_1' \Xi_3')$ von allen $H_\mu f$ ausser von $H_{\mathfrak{m}} f$ frei ist und dass die Gleichung:

$$(\mathfrak{m} - 1)\, a_{\mathfrak{m}+1} - (\mathfrak{m} - 1)\, c_{\mathfrak{m}-1} = 0$$

besteht, aus der, weil m und also auch $\mathfrak{m} > 1$ ist, sofort folgt: $a_{\mathfrak{m}+1} = c_{\mathfrak{m}-1}$. Setzt man daher:

$$\Xi_2' = \Xi_2 f - \frac{a_{\mathfrak{m}+1}}{\mathfrak{m}} H_{\mathfrak{m}} f,$$

so bekommt man:

$$(\Xi_1' \Xi_2') = \Xi_1' f, \quad (\Xi_2' \Xi_3') = \Xi_3' f$$

und verfügt man endlich noch über die bisher unbenutzten Coefficienten: $\alpha_{\mathfrak{m}+1}$ und $\gamma_{\mathfrak{m}-1}$ in geeigneter Weise, so wird auch:

$$(\Xi_1' \Xi_3') = 2\,\Xi_2' f.$$

Damit ist bewiesen, dass jede G_{m+3} von der Zusammensetzung (5), die die auf S. 366 angegebene Beschaffenheit hat, eine Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält. Es ist daher nach dem Früheren zugleich der allgemeinere Satz bewiesen:

Jede $(r+3)$-gliedrige Gruppe, mit der die Gruppe (1) meroedrisch isomorph ist, enthält eine Untergruppe von der Zusammensetzung (1).

Demnach ist nunmehr die Lücke, die in meinem früheren Beweise für den Satz über die integrabeln Gruppen geblieben war, ausgefüllt und der Satz ist vollkommen streng bewiesen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um gleich noch einen zweiten Mangel in meinem früheren Beweise zu beseitigen.

Um zu zeigen, dass eine integrable Gruppe niemals eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthält, habe ich mich nämlich damals (d. Ber. 1887, S. 96) auf den Satz gestützt, dass es in einem Raume von genügend grosser Dimensionenzahl r-gliedrige projective Gruppen von jeder möglichen Zusammensetzung giebt. Dieser Satz ist nun zwar unzweifelhaft richtig, aber er ist leider noch nicht allgemein bewiesen; jedoch hat dieser Umstand für den vorliegenden Fall keine Bedeutung. Eine r-gliedrige Gruppe ist nämlich nach LIE dann und nur dann integrabel, wenn eine ihrer derivirten Gruppen blos aus der identischen Transformation besteht; hieraus aber folgt unmittelbar, dass jede Untergruppe einer integrabeln Gruppe wieder integrabel ist, dass also eine integrable Gruppe niemals eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung (1) enthalten kann.

SITZUNG VOM 5. JUNI 1893.

Sophus Lie, *Ueber die Gruppe der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten.*

Die Begriffe *Invariante und continuirliche Gruppe* sind so alt, wie die Mathematik selbst, wenn sie auch erst am Schlusse des vorigen Jahrhunderts in speciellen Fällen einigermassen deutlich hervortreten. Der Begriff Differentialinvariante tritt andrerseits, wenn auch in versteckter Form, schon in den ältesten Untersuchungen über Differentialrechnung und Differentialgleichungen hervor.

Der Zusammenhang zwischen diesen Begriffen und ihre allgemeine Bedeutung für die verschiedenen Zweige der Mathematik wurde zuerst von mir entwickelt. Wer daran noch zweifelt, möge u. a. bedenken, dass meine allgemeinen Theorien nur für solche *continuirliche Gruppen* gelten, *die durch Differentialgleichungen definirt werden können.* Giebt es auch möglicherweise Mathematiker, die *nachträglich* den Begriff continuirliche Gruppe als selbstverständlich betrachten, so dürften doch alle zugeben, dass es keineswegs selbstverständlich war, dass sich grade für die besprochenen Gruppen eine allgemeine Theorie begründen lässt.

Der dritte und letzte Band meines grossen Werkes über endliche continuirliche Gruppen, bei dessen Abfassung Herr Professor Dr. Fr. Engel mich unterstützt hat, wird im Laufe des Sommers erscheinen. Es war ursprünglich mein Plan, in diesem Werke auch meine allgemeine Theorie der *unendlichen* continuirlichen Gruppen zu entwickeln. Die Fülle des Stoffes machte dies indess unmöglich. Daher ist es jetzt meine Absicht, mit Unterstützung des Herrn Prof. Engel ein neues Werk über *Differen-*

tialinvarianten zu veröffentlichen und dabei in einem Abschnitte meine Theorie der unendlichen Gruppen darzustellen. Gleichzeitig gebe ich eine neue Begründung für die Theorie der *endlichen* Gruppen. In diesem Werke werden andererseits die leitenden Ideen für meine Behandlung der Differentialgleichungen Platz finden, wenngleich eine ausgeführte Darstellung dieser letzten Theorie für die Zukunft vorbehalten werden muss.

I.

In den folgenden Zeilen betrachte ich diejenige endliche continuirliche Gruppe, die zuerst betrachtet wurde, nämlich *die Gruppe der Bewegungen* des dreifach ausgedehnten Raumes. Die alte Krümmungstheorie der ebenen und gewundenen Curven, sowie die Monge-Euler'sche Krümmungstheorie der Flächen bilden *besondere Kapitel* meiner allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten der Bewegungsgruppe. Dies ist die wirkliche Sachlage. *Dagegen wäre es unrichtig zu sagen, dass meine Theorie der Differentialinvarianten der Bewegungsgruppe sich mit den genannten Krümmungstheorien deckt.*

Ich halte es für richtig, auf diesen Punkt ausführlicher einzugehen und nachzuweisen, dass meine Invariantentheorie der Bewegungsgruppe Kapitel enthält, die nicht allein hinsichtlich der Form, sondern auch hinsichtlich des Inhaltes neu sind. Ein solcher Nachweis hat eine doppelte Berechtigung. Einerseits sind nämlich diese neuen Kapitel sehr interessant, indem sie u. a. *neue Beiträge* zur Theorie der Minimalcurven liefern, ebenso zur *Theorie der Minimalflächen* und zur Theorie derjenigen Geradentransformationen, die Kreise in Kreise überführen. Andererseits ist aber zu beachten, dass diese meine neuen Theorien *für jede Gruppe ihr Analogon haben.* Stellt man nämlich, wie ich es gethan habe, für eine beliebige continuirliche Gruppe die Frage nach den *Aequivalenzkriterien* zweier Gebilde gegenüber der Gruppe, so hat man immer zunächst zu entscheiden, ob die betreffenden Gebilde *allgemein* oder singulär sind. Die Aequivalenzkriterien sind wesentlich verschieden, je nachdem die Gebilde singulär oder allgemein sind, während jedoch in beiden Fällen gewisse volle Systeme von Differentialinvarianten die Entscheidung liefern. Die singulären Gebilde zerfallen dabei in besondere Kategorien, deren jede ihre eigene Invariantentheorie besitzt.

Nun gestatten allerdings meine allgemeinen Theorien einerseits für jede continuirliche endliche oder unendliche Gruppe alle zugehörigen Kategorien singulärer Gebilde anzugeben, andererseits für jede derartige Kategorie die zugehörige Invariantentheorie zu entwickeln. Hierbei ist aber zu bemerken, dass eine *vollständige* und *ausführliche* Darstellung dieser Theorie noch nicht vorliegt, und dass es in Folge dessen selbst für diejenigen, die meine Publicationen ziemlich genau kennen, nicht ganz leicht ist zu sehen, wie die betreffenden Kriterien in jedem einzelnen Falle gefunden werden können.

II.

Die Gruppe der Bewegungen im dreifach ausgedehnten Raume ist erzeugt von den sechs infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Wünschen wir nun die Bedingungen für Aequivalenz zweier Curven gegenüber dieser Gruppe, anders ausgesprochen die Bedingungen für »Congruenz« im *Euklidischen* Sinne zweier *beliebigen* Curven zu finden, so muss man folgendes Raisonnement anstellen.

Führt man auf eine gegebene Curve: $f = 0$, $\varphi = 0$ alle Bewegungen aus, so erhält man eine Curvenschaar:

$$F(x\,y\,z\,c_1 \cdots c_6) = 0, \qquad \Phi(x\,y\,z\,c_1 \cdots c_6) = 0$$

mit sechs Parametern, die allerdings nicht immer wesentlich zu sein brauchen.

Diese Curvenschaar lässt sich indess in *allen Fällen* durch ein *invariantes System von Differentialgleichungen*

$$\Omega_k(x\,y\,z\,y'\,z'\,y''\,z'' \cdots) = 0$$

darstellen, wobei $y'\,z'\,y''\,z'' \cdots$ die Ableitungen von y und z nach x bezeichnen. Ist die gegebene Curve eine Gerade, so hat dieses Gleichungssystem die Form

$$y'' = 0\,, \quad z'' = 0\,,$$

und ist somit von zweiter Ordnung. Ist die gegebene Curve ein Kreis, so hat das zugehörige invariante Gleichungssystem die Form

$$\varrho = a\,, \quad \tau = 0\,,$$

wobei ϱ den Krümmungsradius, τ den Torsionsradius und a eine Constante bezeichnen. In diesem Falle besteht somit das invariante System aus einer Gleichung von zweiter Ordnung und einer Gleichung von dritter Ordnung. Ist die gegebene Curve eine Schraubenlinie, so erhält man wiederum eine Gleichung von zweiter und eine von dritter Ordnung.

In den bis jetzt betrachteten Fällen gestatteten die gegebenen Curven — Gerade, Kreis, Schraubenlinie — eine oder sogar zwei infinitesimale Bewegungen.

Betrachten wir jetzt eine beliebige *reelle* Curve, die keine infinitesimale Bewegung gestattet. Alsdann werden alle congruenten Curven bekanntlich definirt durch *zwei Gleichungen dritter* Ordnung

$$\frac{d\varrho}{ds} = \varphi(\varrho)\,, \quad \tau = \psi(\varrho)\,,$$

in denen s die Bogenlänge bedeutet.

Dies bleibt aber offenbar nicht immer richtig, wenn die gegebene Curve imaginär ist, weil z. B. der Krümmungsradius

$$\frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y'x'' - x'y'')^2 + (z'y'' - y'z'')^2 + (x'z'' - z'x'')^2}}$$

gleichzeitig mit der Bogenlänge

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

verschwindet.

Die bisherige Krümmungstheorie giebt also nicht allgemeingültige Kriterien für die Congruenz zweier Curven.

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die Minimalcurven, d. h. die Curven, deren Länge gleich Null ist, die einzigen sind, für welche die bisherige Krümmungstheorie illusorisch wird. Sodann entwickeln wir die Kriterien für die Congruenz zweier Minimalcurven und zeigen endlich, dass hiermit ein interessanter Beitrag zur Theorie der *reellen* wie der imaginären *Minimalflächen* geliefert ist.

Die fünf Grössen

$$x\ y\ z\ y'\ z'$$

werden von der Gruppe der Bewegungen durch eine sechsgliedrige Gruppe transformirt, nämlich durch die einmal erweiterte Gruppe:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} + z'\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial z'},$$

$$x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} + (1+z'^2)\frac{\partial f}{\partial z'} + y'z'\frac{\partial f}{\partial y'},$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} - (1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} - y'z'\frac{\partial f}{\partial z'}.$$

In der zugehörigen Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -y & z' & -y' \\ -z & 0 & x & y'z' & 1+z'^2 \\ y & -x & 0 & -(1+y'^2) & -y'z' \end{vmatrix}$$

verschwinden die fünfreihigen Determinanten nicht identisch, dagegen verschwinden sie vermöge der Gleichung

$$1 + y'^2 + z'^2 = 0$$

und nur vermöge dieser Gleichung.

Hiermit erkennen wir, dass der *Raum der Linienelemente transitiv transformirt* wird, und dass dabei jedes Linienelement

$$x\ y\ z\ y'\ z',$$

für welches $1 + y'^2 + z'^2$ von Null verschieden ist, in jedes andere Linienelement allgemeiner Lage übergeführt werden kann.

Betrachten wir jetzt den Raum der Krümmungselemente

$$x\ y\ z\ y'\ z'\ y''\ z''$$

und gleichzeitig die Matrix der zweimal erweiterten infinitesimalen Transformationen. Die sechsreihigen Determinanten

dieser Matrix verschwinden nicht identisch, sondern nur vermöge $1 + y'^2 + z'^2 = 0$ oder vermöge $y'' = 0$, $z'' = 0$.

Für *krumme* Curven, die *keine Minimalcurven* sind, existiren daher

eine Differentialinvariante *zweiter* Ordnung, nämlich ϱ und *zwei* Differentialinvarianten *dritter* Ordnung, nämlich

$$\tau \text{ und } \frac{d\varrho}{ds}.$$

Schliessen wir daher einerseits alle Geraden, andererseits alle Minimalcurven aus, so dürfen wir behaupten, dass für alle andern Curven die neun Grössen

$$x\ y\ z\ y'\ z'\ y''\ z''\ y'''\ z'''$$

jedenfalls nur durch Gleichungen verbunden sind, die durch Relationen zwischen den drei Grössen

$$\varrho,\quad \tau,\quad \frac{d\varrho}{ds}$$

ersetzt werden können.

Hier sind nun wieder mehrere Fälle denkbar. Es ist denkbar, dass diese drei Grössen feste Werthe haben; dies tritt ein dann und nur dann, wenn die Curve eine Schraubenlinie oder ein Kreis ist. Es ist ferner denkbar, dass unsre drei Grössen durch nur zwei Gleichungen verbunden sind.

In diesem Falle müssen diese Gleichungen die Form

$$\tau = F(\varrho),\quad \frac{d\varrho}{ds} = \Phi(\varrho)$$

haben; wäre nämlich ϱ constant und in Folge dessen

$$\frac{d\varrho}{ds} = 0,$$

so müsste auch τ einen constanten Werth haben, weil keineswegs alle Curven, welche die Gleichungen

$$\varrho = \text{Const.},\quad \frac{d\varrho}{ds} = 0$$

erfüllen, congruent zu sein brauchen.

Auf der anderen Seite ist leicht zu beweisen, dass zwei Gleichungen von der Form

$$\tau = F(\varrho), \quad \frac{d\varrho}{ds} = \Phi(\varrho)$$

immer ∞^6 Curven bestimmen, die unter einander congruent sind.

Benutze ich meine gewöhnliche Terminologie, so muss ich sagen, dass alle Curven des Raumes gegenüber der Gruppe der Bewegungen sich in *vier Kategorien* anordnen, unter denen drei singulär sind, während die vierte Kategorie die allgemeine ist.

Die Schaar der *Geraden, deren Länge von Null verschieden ist,* bilden die erste singuläre Kategorie, die offenbar keine Schwierigkeit darbietet, weil jede Gerade, deren Länge von Null verschieden ist, mit jeder anderen derartigen Geraden congruent ist.

Die *Geraden, deren Länge gleich Null ist,* bilden die zweite singuläre Kategorie, die ebenfalls keine Schwierigkeit bietet, indem zwei derartige Geraden offenbar congruent sind.

Die *krummen Minimalcurven* bilden die dritte singuläre Kategorie. Die Kriterien für Congruenz zwischen zwei derartigen Curven sind bis jetzt noch nicht entwickelt worden, sollen aber in dieser Note angegeben werden. Eine besondere Stellung nehmen unter diesen Curven die Minimalcurven 3. O. ein, indem sie eine infinitesimale Schraubenbewegung gestatten.

Alle übrigen Curven bilden die allgemeine Kategorie, deren Invariantentheorie mit der gewöhnlichen Krümmungstheorie zusammenfällt. Eine besondere Stellung nehmen die Schraubenlinien ein.

III.

Wir wollen nun die Invariantentheorie der Minimalcurven gegenüber der Bewegungsgruppe in kurzen Zügen entwickeln.

Die Minimalcurven treten, wenn auch in analytischer Form, zuerst bei LAGRANGE, MONGE und LEGENDRE auf. Da diese Curven durch die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

bestimmt sind, so leuchtet ohne Weiteres ein, dass alle Minimalcurven durch die Gleichungen

$$x = \alpha(t)$$
$$y = \beta(t)$$
$$z = i\int \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}\, dt$$

bestimmt sind, in denen zwei arbiträre Functionen α und β des Parameters t auftreten. Legendre war der erste, der bemerkte, dass es möglich ist, diese Formeln durch andere zu ersetzen, die kein Integralzeichen, sondern nur Differentialquotienten enthalten. Enneper und Weierstrass gaben diesen Formeln die zweckmässige Form

$$x = (1 - s^2) F''(s) + 2s F' - 2F$$
$$iy = (1 + s^2) F''(s) - 2s F' + 2F$$
$$z = 2s F''(s) - 2F' ,$$

wobei allerdings zu bemerken ist, dass diese Verfasser nirgends explicite über Curven von der Länge Null reden.

Führt man nun auf eine Minimalcurve alle Bewegungen aus, so werden auch die Grössen s und F transformirt und zwar durch Gleichungen von der Form

$$s_1 = S(s)$$
$$F_1 = \Phi(s, F) ,$$

welche überdies *sechs* Parameter enthalten, weil die Bewegungen von sechs Parametern abhängen. Diese Gleichungen, die wir folgendermassen schreiben:

$$s_1 = S(s, a_1\ a_2 \cdots a_6)$$
$$F_1 = \Phi(s, F, a_1 \cdots a_6) ,$$

bilden nun ihrerseits eine sechsgliedrige Gruppe und zwar in meiner Terminologie eine sechsgliedrige Gruppe von Punkttransformationen der Ebene (sF).

Dass die Sache so steht, ist keineswegs von vorneherein evident. Zur Illustration bemerke ich, dass zwar alle ∞^{10} conformen Transformationen des Raumes Minimalcurven in Minimalcurven überführen, dass aber die Grössen s und F in diesem Falle keineswegs durch eine Gruppe von Punkttransformationen, sondern durch eine Gruppe von Berührungstransformationen

$$s_1 = S\left(sF\ \frac{dF}{ds}\ a_1 \cdots a_{10}\right)$$
$$F_1 = \Phi(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$$
$$\frac{dF_1}{ds_1} = \Psi(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$$

transformirt werden.

Werden aber die Minimalcurven durch alle Bewegungen des Raumes transformirt, so erhält man, wie schon gesagt, in der Ebene (sF) eine sechsgliedrige Gruppe von Punkttransformationen, die offenbar mit der Bewegungsgruppe des Raumes gleichzusammengesetzt ist. Hieraus lässt sich nun unmittelbar schliessen, dass die besprochene Gruppe von Punkttransformationen jedenfalls mit der Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial F}, \quad s\frac{\partial f}{\partial F}, \quad s^2\frac{\partial f}{\partial F},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \quad s\frac{\partial f}{\partial s} + F\frac{\partial f}{\partial F},$$

$$s^2\frac{\partial f}{\partial s} + 2Fs\frac{\partial f}{\partial F}$$

ähnlich, wenn nicht identisch sein muss.

Die Differentialinvarianten der soeben aufgestellten Gruppe habe ich nun längst berechnet. Es giebt eine invariante Differentialgleichung dritter Ordnung $F'''(s) = 0$, eine Differentialinvariante fünfter Ordnung J_5 und eine Invariante sechster Ordnung J_6. *Zwei krumme Minimalcurven sind congruent dann und nur dann, wenn J_5 und J_6 dieselbe Gleichung erfüllen*[1]).

---

1) An anderer Stelle behandle ich die hier berührten Fragen mehr eingehend.

A. Mayer, *Ueber die unfreie Bewegung eines materiellen Punktes unter Berücksichtigung der Reibung.*

Unter Zugrundelegung der auch im Folgenden beibehaltenen Hypothese, dass die Reibung dem Drucke proportional sei, hat man von der Bewegung eines materiellen Punktes auf fester, rauher Curve oder Oberfläche zwar den einen oder anderen Fall besonders behandelt, auch verschiedene allgemeine Eigenschaften bemerkt, aber, soviel ich weiss, die allgemeinen Differentialgleichungen in unabhängigen Bestimmungsstücken des Punktes bisher noch gar nicht wirklich aufgestellt. Auch das vortreffliche JELLETT'sche Werk[1]) giebt diese Differentialgleichungen nicht an. Allerdings erscheint die Integration derselben im Falle einer festen Fläche sehr schwierig, und es dürfte kaum viel Fälle geben, in denen sich, wie in dem Beispiele des schweren Punktes auf rauher, schiefer Ebene[2]), die Integration vollständig durchführen liesse. Immerhin ist es aber doch wichtig, die Form jener Differentialgleichungen genau zu kennen, da man jedenfalls aus ihr noch am Ersten ersehen kann, ob und welche Probleme der betrachteten Art lösbar sind. Und bei der Bewegung auf fester Curve giebt es in der That eine wichtige Classe solcher lösbarer Probleme, die wohl nur deshalb noch nicht bemerkt wurde, weil man eben die allgemeinen Differentialgleichungen dieser Probleme nicht vor Augen hatte.

Damit ist der Zweck der vorliegenden Note selbst schon zur Genüge gekennzeichnet.

---

1) JELLETT, Die Theorie der Reibung, deutsch bearbeitet von LÜROTH und SCHEPP, Leipzig 1890.

2) S. daselbst p. 107—110.

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung kommt es vor Allem darauf an, den normalen Druck zu berechnen, den das Mobil auf seine Unterlage ausübt. Die allgemeinen Formeln für diesen Druck werden in § 1 entwickelt und im zweiten Paragraphen sodann angewandt auf den Fall einer festen Curve; der dritte Paragraph dagegen, der am Schlusse eine neue Lösung des JELLETT'schen Beispiels bringt, berechnet den Druck auf eine feste Fläche direct aus den Differentialgleichungen der Bewegung, weil dies noch einfacher ist als die Anwendung der allgemeinen Formeln des ersten Paragraphen. Dabei wird durchweg vorausgesetzt, dass die gegebene bewegende Kraft des Punktes nur von seiner Lage abhängig und durch diese eindeutig bestimmt sei.

§ 1.

Der Druck auf die Unterlage.

Wenn man sich die feste Curve oder Fläche, an welche ein materieller Punkt von der Masse m gebunden ist, zunächst als *vollkommen glatt* denkt, und hierauf die bekannte Zerlegung der bewegenden Kraft in eine tangentiale und eine centripetale Componente mit dem Principe verbindet, dass man den Punkt als frei betrachten darf, sobald man nur der gegebenen bewegenden Kraft P, die ihn treibt, noch den normalen Widerstand der festen Unterlage hinzufügt, so erhält man, bezogen auf eine beliebige Projectionsrichtung x, für die Bewegung des Punktes die bekannte Formel:

$$P\cos(P,x) - N\cos(N,x) = m\frac{dv}{dt}\cos(v,x) + \frac{mv^2}{\varrho}\cos(\varrho,x),$$

in der v die Geschwindigkeit des Punktes, ϱ den, im Sinne vom Mobile nach dem Krümmungsmittelpunkte hin genommenen Krümmungsradius der Bahncurve, und N den, jenem Widerstande gleichen und entgegengesetzten Druck bezeichnet, den das Mobil auf die Unterlage ausübt.

Zerlegt man weiter die bewegende Kraft P selbst nach der Richtung der Geschwindigkeit und senkrecht darauf in die beiden Componenten P_t und P_n, so wird:

$$(1) \qquad P\cos(P,x) = P_t\cos(v,x) + P_n\cos(P_n,x).$$

Zugleich ist aber:

$$P_t = m\frac{dv}{dt},$$

also reducirt sich die obige Formel auf:

$$(2) \qquad P_n \cos(P_n, x) - N \cos(N, x) = \frac{mv^2}{\varrho} \cos(\varrho, x) ,$$

und das wieder lässt sich, weil wegen

$$P_t = P \cos(P, v)$$

aus (1) folgt:

$$P_n \cos(P_n, x) = P\{\cos(P, x) - \cos(P, v) \cos(v, x)\} ,$$

so schreiben:

$$(3) \quad N\cos(N,x) = P\{\cos(P,x) - \cos(P,v)\cos(v,x)\} - \frac{mv^2}{\varrho} \cos(\varrho,x).$$

Nun stehen die Richtungen von v und ϱ auf einander senkrecht. Wendet man daher die Formel (3) der Reihe nach auf drei, gegen einander rechtwinklige Projectionsrichtungen x, y, z an, quadrirt die erhaltenen Gleichungen und addirt sie dann, so ergiebt sich für den *normalen Druck* N, den die feste Unterlage auszuhalten hat, die Formel:

$$(4) \qquad N^2 = P^2 \sin^2(P, v) - \frac{2mv^2}{\varrho} P \cos(P, \varrho) + \frac{m^2v^4}{\varrho^2} .$$

Nimmt man andrerseits die drei Richtungen x, y, z zu Axen eines festen rechtwinkligen Coordinatensystems, in welchem x, y, z die Coordinaten des Mobils und X, Y, Z die Componenten der bewegenden Kraft P bezeichnen, und nennt s den Bogen der Bahncurve, so hat man bekanntlich:

$$\cos(v, x) = \frac{dx}{ds} , \quad \ldots$$

$$\cos(\varrho, x) = \varrho \frac{d^2x}{ds^2} , \quad \ldots$$

Jene drei, aus (3) erhaltenen Gleichungen stellen sich daher analytisch also dar:

$$(5) \quad \begin{cases} N\cos(N, x) = X - \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{ds} - mv^2\frac{d^2x}{ds^2} , \\ N\cos(N, y) = Y - \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{ds} - mv^2\frac{d^2y}{ds^2} , \\ N\cos(N, z) = Z - \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{ds} - mv^2\frac{d^2z}{ds^2} , \end{cases}$$

während die Formel (4) übergeht in:

$$(6)\qquad N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)^2 - 2mv^2\left(X\frac{d^2x}{ds^2} + Y\frac{d^2y}{ds^2} + Z\frac{d^2z}{ds^2}\right) + m^2v^4\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}.$$

Erfolgt nun die Bewegung unter *Reibung*, oder auch in einem *widerstehenden Medium*, und wird die absolute Stärke der Reibung, resp. des Widerstandes durch F bezeichnet, so hat man im Vorhergehenden nur X, Y, Z zu ersetzen durch:

$$X - F\frac{dx}{ds}, \quad Y - F\frac{dy}{ds}, \quad Z - F\frac{dz}{ds}.$$

Hierdurch ändern sich aber die Formeln (5) gar nicht, was auch von vornherein klar ist, da ja in der Ausgangsformel (2) von der bewegenden Kraft P nur die normale Componente P_n auftritt.

Reibung oder *Widerstand des umgebenden Mediums* ändern also den Druck N nur insoweit, als durch dieselben überhaupt die Geschwindigkeit und eventuell auch die Bahn des Punktes eine andere wird. Die Formeln (5) und (6) bleiben aber auch in diesen Fällen noch gültig.

§ 2.

Bewegung auf fester rauher Curve.

Sei nun der Punkt m gezwungen, auf einer festen Curve zu bleiben, in deren Gleichungen:

$$(7)\qquad x = x(\theta), \quad y = y(\theta), \quad z = z(\theta)$$

die rechten Seiten eindeutige Functionen des Parameters θ bezeichnen sollen.

Um dann den Druck zu finden, den diese Curve bei der Bewegung des Punktes auszuhalten hat, sind in den Formeln (5) und (6) nur noch die Differentiationen nach dem Bogen s durch solche nach dem Parameter θ zu ersetzen. Deutet man die Differentiationen nach θ durch Accente an, so hat man:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{s'x'' - x's''}{s'^3}, \quad \ldots$$

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

Durch diese Formeln wird:

$$X\frac{d^2x}{ds^2} + Y\frac{d^2y}{ds^2} + Z\frac{d^2z}{ds^2}$$

$$= \frac{1}{s'^3}\{s'(Xx'' + Yy'' + Zz'') - s''(Xx' + Yy' + Zz')\},$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{s'^4}(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2),$$

und aus (6) ergiebt sich daher:

$$(8) \quad (Ns')^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2)s'^2 - (Xx' + Yy' + Zz')^2$$

$$- 2mv^2\left\{Xx'' + Yy'' + Zz'' - \frac{s''}{s'}(Xx' + Yy' + Zz')\right\}$$

$$+ \frac{m^2v^4}{s'^2}(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2),$$

wo man die von v freien Glieder auch so schreiben kann:

$$(Yz' - Zy')^2 + (Zx' - Xz')^2 + (Xy' - Yx')^2.$$

Da nach Voraussetzung X, Y, Z eindeutig gegebene Functionen von x, y, z sind, so ist hiermit Ns' bis auf das Vorzeichen unzweideutig durch θ und v^2 ausgedrückt. N aber ist eine wesentlich positive Grösse. Aus (8) erhält man daher für Ns' einen Werth von der Form:

$$(8') \quad Ns' = \varepsilon\sqrt{\varphi_0(\theta) - 2\varphi_1(\theta)v^2 + \varphi_2(\theta)v^4},$$

in welchem $\varphi_0(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$, $\varphi_2(\theta)$ eindeutige Functionen von θ sind, ε aber $= +1$ oder $= -1$ zu setzen ist, je nachdem der Differentialquotient $s' \equiv \frac{ds}{d\theta}$ des Bogens selbst gerade positiv oder negativ ist.

Liegt im Besondern die feste Curve in einer Ebene, die auch beständig die Richtung der bewegenden Kraft P enthält, und nimmt man diese Ebene zur xy-Ebene, so reduciren sich die drei Gleichungen (5) auf die beiden:

$$(9)\quad \begin{cases} N\cos(N,x) = X - \left(X\dfrac{dx}{ds} + Y\dfrac{dy}{ds}\right)\dfrac{dx}{ds} - mv^2\dfrac{d^2x}{ds^2}\,, \\ N\cos(N,y) = Y - \left(X\dfrac{dx}{ds} + Y\dfrac{dy}{ds}\right)\dfrac{dy}{ds} - mv^2\dfrac{d^2y}{ds^2}\,. \end{cases}$$

Zugleich hat dann der Druck N die Richtung der Curvennormalen, also ist, ε wieder $= \pm 1$ genommen:

$$\cos(N,x) = \varepsilon\frac{dy}{ds}\,,\quad \cos(N,y) = -\varepsilon\frac{dx}{ds}\,,$$

und damit:

$$\cos(N,x)\frac{dy}{ds} - \cos(N,y)\frac{dx}{ds} = \varepsilon\,.$$

Multiplicirt man daher die Formeln (9) mit $\varepsilon\dfrac{dy}{ds}$ und $-\varepsilon\dfrac{dx}{ds}$ und addirt, so erhält man sofort die bekannte Formel:

$$N = \varepsilon\left\{X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} + mv^2\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\},$$

oder, wenn man wieder θ an Stelle des Bogens s einführt:

$$(10)\qquad Ns' = \varepsilon\left\{Xy' - Yx' + mv^2\frac{x'y'' - y'x''}{s'^2}\right\},$$

was sich auch durch die Annahme $z = 0$, $Z = 0$ leicht direct aus (8) ergiebt.

Diese Formel, in der $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ zu nehmen ist, je nachdem der Factor von ε gerade dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen von s' besitzt, liefert für Ns' einen Werth von der Form:

$$(10')\qquad Ns' = \varepsilon\{\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta)\,v^2\}\,,$$

in welchem, bis auf ε selbst, wieder Alles eindeutig ist. —

Für die Bewegung eines Punktes von der Masse m auf einer festen rauhen Curve vom Reibungscoefficienten α gilt nun die Gleichung:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} - \alpha N\,,$$

wo nach unsrer Grundvoraussetzung α eine Constante ist.

Wegen $v = \dfrac{ds}{dt}$ ist aber:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}.$$

Multiplicirt man daher noch mit $\frac{ds}{d\theta} \equiv s'$, so wird diese Differentialgleichung:

$$(11) \qquad \frac{m}{2}\frac{dv^2}{d\theta} = Xx' + Yy' + Zz' - \alpha N s' .$$

Hierin ist der Werth von Ns' aus (8) zu substituiren. Nach (8') wird daher die Gleichung (11) von der Form:

$$(11') \qquad \frac{m}{2}\frac{dv^2}{d\theta} = \psi(\theta) - \varepsilon\alpha\sqrt{\varphi_0(\theta) - 2\varphi_1(\theta)v^2 + \varphi_2(\theta)v^4}$$

und somit eine Differentialgleichung 1. O. zwischen v^2 und θ.

Ueberdies ist:

$$v^2 = s'^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

also:

$$dt = \varepsilon\frac{s'd\theta}{v},$$

oder auch:

$$dt = \varepsilon\frac{s'd\theta}{vdv}dv = \varepsilon\frac{2s'}{\frac{dv^2}{d\theta}}dv,$$

wo wieder $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ zu nehmen ist, je nachdem gerade s mit θ zugleich wächst, oder aber mit wachsendem θ abnimmt. Kann man also die Differentialgleichung (11) integriren — und das ist z. B. der Fall für eine Schraubenlinie mit verticaler Axe, indem dann die rechte Seite der Gleichung frei von θ wird —, so erhält man die Zeit t selbst durch eine blosse Quadratur als Function von θ oder von v und hat damit das ganze Problem gelöst.

Liegt im Besondern die feste Curve in der xy-Ebene, so reducirt sich die Gleichung (11) auf:

$$(12) \qquad \frac{m}{2}\frac{dv^2}{d\theta} = Xx' + Yy' - \alpha N s' ,$$

und wenn auch die bewegende Kraft P beständig in dieser Ebene wirkt, so ist hierin für Ns' der Werth (10) zu setzen. Nach (10')

reducirt sich also in diesem Falle die Gleichung (11) auf eine Gleichung von der Form:

$$(12') \qquad \frac{m}{2}\frac{dv^2}{d\theta} = \psi(\theta) - \varepsilon\alpha\{\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta)\, v^2\} .$$

Das ist aber eine lineare Differentialgleichung 1. O. zwischen v^2 und θ, und man hat somit den Satz:

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer festen ebenen rauhen Curve lässt sich stets mittelst blosser Quadraturen vollständig bestimmen, so oft auch die bewegende Kraft beständig mit der Curve in derselben Ebene bleibt.

Beiläufig bemerkt lässt sich auch die Bewegung auf glatter fester Curve in einem Medium, dessen Widerstand eine lineare Function von v^2 ist, im Raume wie in der Ebene stets durch blosse Quadraturen vollständig bestimmen. Denn die Differentialgleichung dieser Bewegung erhält man aus (11), wenn man

$$\alpha N = A + Bv^2$$

setzt, wo A und B auch gegebene Functionen von x, y, z sein können. Diese Differentialgleichung wird also wiederum linear. Hieraus erhellt unmittelbar, dass der vorhergehende Satz selbst dann noch richtig bleibt, wenn die Bewegung in einem Medium dieser Art vor sich geht.

§ 3.

Bewegung auf fester rauher Fläche.

Bezogen auf drei feste rechtwinklige Axen x, y, z bestimmt sich die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer glatten festen Fläche aus den drei Differentialgleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} mx'' = X - N\lambda , \\ my'' = Y - N\mu , \\ mz'' = Z - N\nu , \end{cases}$$

in denen λ, μ, ν die Richtungscosinus des normalen Druckes N bedeuten, den die Fläche erleidet, und die Accente jetzt wie überhaupt im Folgenden stets Differentiationen nach der Zeit t markiren.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit λ, μ, ν und addirt sie dann, so folgt sofort:

$$(14) \qquad N = \lambda X + \mu Y + \nu Z - m(\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'') .$$

Nun wirkt der Druck N in Richtung der Flächennormalen. Ist also die feste Fläche in zwei Parametern q_1, q_2 eindeutig gegeben durch die Gleichungen:

$$(15) \qquad x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2), \quad z = z(q_1, q_2),$$

und deutet man die partiellen Differentiationen nach q_1 und q_2 durch die Indices 1 und 2 an, so bestimmen sich λ, μ, ν aus den Gleichungen:

$$(16) \qquad \begin{cases} \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1, \\ x_1\lambda + y_1\mu + z_1\nu = 0, \\ x_2\lambda + y_2\mu + z_2\nu = 0. \end{cases}$$

Diese ergeben, wenn man:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}$$

setzt:

$$(17) \qquad \Delta\lambda = \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}, \quad \Delta\mu = \frac{\partial\Delta}{\partial\mu}, \quad \Delta\nu = \frac{\partial\Delta}{\partial\nu},$$

und hierdurch geht (14) über in:

$$\Delta N = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} x'', & y'', & z'' \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix}.$$

Die zweimalige Differentiation der Gleichungen (15) nach t giebt aber:

$$x'' = x_1 q_1'' + x_2 q_2'' + x_{11} q_1'^2 + 2x_{12} q_1' q_2' + x_{22} q_2'^2, \ \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die letzte Formel, so heben sich die zweiten Differentialquotienten von q_1 und q_2 von selbst weg. Führt man daher die Bezeichnungen ein:

$$(18) \qquad (hi) \equiv \begin{vmatrix} x_{hi}, & y_{hi}, & z_{hi} \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix},$$

so erhält man durch Entwickelung des letzten Gliedes:

$$(19) \qquad \Delta N = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} - m\{(11)q_1'^2 + 2(12)q_1'q_2' + (22)q_2'^2\}.$$

Hierin ist noch Δ selbst zu berechnen. Aus (17) folgt aber sofort:

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \nu}\right)^2$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 .$$

Setzt man also:

$$(20) \qquad \begin{cases} E \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 , \\ F \equiv x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 , \\ G \equiv x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 , \end{cases}$$

so erhält man:

$$\Delta^2 = EG - F^2 ,$$

und hat demnach in der Formel (19)

$$(21) \qquad \Delta = \pm \sqrt{EG - F^2}$$

zu setzen, je nachdem die rechte Seite gerade einen positiven oder einen negativen Werth besitzt[1]).

Findet nun zwischen dem Punkte und der festen Fläche *Reibung* statt, so treten an die Stelle der Gleichungen (13) die Gleichungen:

$$m x'' = X - N\left(\lambda + \alpha \frac{dx}{ds}\right) ,$$

$$m y'' = Y - N\left(\mu + \alpha \frac{dy}{ds}\right) ,$$

$$m z'' = Z - N\left(\nu + \alpha \frac{dz}{ds}\right) ,$$

in denen α den constanten Reibungscoefficienten der gegebenen Fläche bezeichnet. Nach (21) hat man zugleich für die lebendige Kraft T des Punktes:

$$(22) \qquad T = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(E q_1'^2 + 2 F q_1' q_2' + G q_2'^2) .$$

---

1) Bei der Anwendung auf ein bestimmtes Beispiel wird es natürlich bequemer sein, unter Vermeidung von Determinanten die Werthe von λ, μ, ν aus den Gleichungen (16) zu berechnen und sie zugleich mit den Werthen von x'', y'', z'', die man unter den Annahmen $q_1'' = q_2'' = 0$ aus den Gleichungen (15) der gegebenen Fläche erhält, in die Formel (14) einzusetzen.

Führt man also die Flächenparameter q_1, q_2 statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ein, so erhält man, nach der bekannten LAGRANGE'schen Umformung und unter Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen (16), als Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes auf der rauhen Fläche (15):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Xx_1+Yy_1+Zz_1-\alpha N\left(x_1\frac{dx}{ds}+y_1\frac{dy}{ds}+z_1\frac{dz}{ds}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Xx_2+Yy_2+Zz_2-\alpha N\left(x_2\frac{dx}{ds}+y_2\frac{dy}{ds}+z_2\frac{dz}{ds}\right).$$

Wegen:

$$\frac{dx}{ds}=x_1\frac{dq_1}{ds}+x_2\frac{dq_2}{ds},\quad\ldots$$

folgt aber aus (20) und (21)

$$x_1\frac{dx}{ds}+y_1\frac{dy}{ds}+z_1\frac{dz}{ds}=E\frac{dq_1}{ds}+F\frac{dq_2}{ds}=\frac{1}{v}(Eq_1'+Fq_2')=\frac{\partial v}{\partial q_1'},$$

$$x_2\frac{dx}{ds}+y_2\frac{dy}{ds}+z_2\frac{dz}{ds}=F\frac{dq_1}{ds}+G\frac{dq_2}{ds}=\frac{1}{v}(Fq_1'+Gq_2')=\frac{\partial v}{\partial q_2'},$$

was sich auch direct aus

$$v^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

durch partielle Differentiationen nach q_1' und q_2' ergiebt.

Nimmt man daher noch an, dass die bewegende Kraft des Punktes eine Kräftefunction U besitze, also:

$$X\equiv\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y\equiv\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z\equiv\frac{\partial U}{\partial z}$$

sei, so werden diese Differentialgleichungen:

$$(23)\qquad\begin{cases}\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial v^2}{\partial q_1'}\right)-\dfrac{\partial v^2}{\partial q_1}\right)=\dfrac{\partial U}{\partial q_1}-\alpha N\dfrac{\partial v}{\partial q_1'},\\[2ex]\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial v^2}{\partial q_2'}\right)-\dfrac{\partial v^2}{\partial q_2}\right)=\dfrac{\partial U}{\partial q_2}-\alpha N\dfrac{\partial v}{\partial q_2'},\end{cases}$$

worin:

$$v=\sqrt{Eq_1'^2+2Fq_1'q_2'+Gq_2'^2},$$

und für N sein Werth aus (19) und (21) zu setzen ist.

Aus den Gleichungen (23) ergiebt sich rückwärts wieder die der Gleichung (11) äquivalente Gleichung:

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{ds} = \frac{dU}{ds} - \alpha N. \tag{24}$$

Aber diese Gleichung hat hier durchaus nicht mehr die fundamentale Wichtigkeit, die sie für die Bewegung auf fester Curve besass.

Allerdings führt dieselbe, *so oft man die Bahn des Mobils auf der festen Fläche bereits gefunden hat*, zur vollständigen Lösung des Problems. Denn wenn man die Bahn kennt, so kann man q_1 und q_2, also auch U als Function von s (oder von irgend einem anderen Parameter θ) berechnen, und damit wegen:

$$(11)\, q_1'^2 + 2(12) q_1' q_2' + (22) q_2'^2$$
$$+ v^2 \left\{(11)\left(\frac{dq_1}{ds}\right)^2 + 2(12)\frac{dq_1}{ds}\frac{dq_2}{ds} + (22)\left(\frac{dq_2}{ds}\right)^2\right\},$$

aus (19) und (21) N in der Form erhalten

$$N = \varepsilon\{\psi(s) - mv^2\varphi(s)\}.$$

Wieder also wird dann die Gleichung (24) eine lineare Differentialgleichung 1. O. zwischen v^2 und s, nach deren Integration sich die Zeit t durch eine blosse Quadratur bestimmt.

Während man aber im Falle $\alpha = 0$ mit Hülfe des Integrales der lebendigen Kraft immer t aus den Gleichungen (23) ganz eliminiren und hierdurch diejenige Differentialgleichung 2. O. zwischen q_1 und q_2 aufstellen kann, welche die Bahncurven des Mobils auf der gegebenen Fläche bestimmt, ist dagegen, so oft eben Reibung stattfindet, kein einziges allgemeines Integral dieser Gleichungen bekannt. Und direct, d. h. ohne Integral, lässt sich die Differentialgleichung der Bahncurven nur dann aus den Gleichungen (23) gewinnen, wenn dieselben, nachdem man in ihnen die Differentialquotienten nach der Zeit durch vollständige Differentialquotienten nach q_1 und die beiden Grössen q_1'' und $q_1'^2$ ausgedrückt hat, homogen werden in Bezug auf q_1'' und $q_1'^2$. Dies aber wieder tritt nach (19) und (23) dann und nur dann ein, wenn die Kräftefunction U sich auf eine blosse Constante reducirt, d. h. wenn gar keine bewegende Kraft auf den Punkt wirkt und seine Bahncurven somit geodätische Linien der festen Fläche werden.

Im Allgemeinen gewährt also die Gleichung (24) nur den Nutzen, *dass man durch dieselbe die Bewegung eines Punktes ohne Kräfte auf einer solchen rauhen Fläche vollständig bestimmen kann, von der man bereits die geodätischen Linien kennt.*

Unmittelbar dagegen gestattet die Gleichung nur dann eine Integration, wenn der Druck eine blosse Constante wird, und hierauf gründet sich die eigenthümliche Methode, durch welche in dem Jellett'schen Werke *die Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen schiefen Ebene* bestimmt wird. Nach (19) kann aber der Fall $N = \text{const.}$ eben nur dann eintreten, wenn die feste Fläche sich auf eine Ebene reducirt. Schon aus diesem Grunde dürfte es naturgemässer sein, dieses Beispiel ganz unabhängig von der Gleichung (24) zu behandeln.

Stellt man bei vertical nach unten gelegter $+z$-Axe die schiefe Ebene durch die Gleichungen dar:

$$x = q_1, \quad y = q_2 \cos i, \quad z = q_2 \sin i,$$

so wird:

$$U = gmq_2 \sin i,$$
$$v^2 = q_1'^2 + q_2'^2,$$
$$N = gm \cos i,$$

und aus (23) ergeben sich daher für die Bewegung des schweren Punktes auf der rauhen schiefen Ebene die Differentialgleichungen:

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1'}{dt} = -\alpha g \cos i \dfrac{q_1'}{\sqrt{q_1'^2 + q_2'^2}}, \\ \dfrac{dq_2'}{dt} = g \sin i - \alpha g \cos i \dfrac{q_2'}{\sqrt{q_1'^2 + q_2'^2}}. \end{cases}$$

Das sind aber zwei Differentialgleichungen 1. O. zwischen q_1', q_2' und t, die sich überdies sofort auf die homogene Differentialgleichung zwischen q_1' und q_2':

$$\frac{dq_2'}{dq_1'} = \frac{q_2' - \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} i \sqrt{q_1'^2 + q_2'^2}}{q_1'}$$

oder:

$$\frac{d\frac{q_2'}{q_1'}}{dt} + \frac{\operatorname{tg} i}{\alpha} \frac{\sqrt{q_1'^2 + q_2'^2}}{q_1'^2} = 0$$

reduciren. Setzt man also:

$$(26)\quad \frac{q_2'}{q_1'} \equiv \frac{dq_2}{dq_1} = \omega\,, \quad \text{und damit: } \sqrt{q_1'^2 + q_2'^2} = \varepsilon q_1' \sqrt{1+\omega^2}\,,$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ zu nehmen ist, je nachdem $q_1' \gtrless 0$, so erhält man:

$$\frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{\varepsilon \operatorname{tg} i}{\alpha}\frac{dq_1'}{q_1'} = 0\,,$$

und daher durch Integration, wenn man

$$(27)\quad \frac{\varepsilon \operatorname{tg} i}{\alpha} = \varkappa\,, \quad \text{also } \frac{\varepsilon}{\alpha \cos i} = \frac{\varkappa}{\sin i}$$

setzt:

$$(28)\quad (\omega + \sqrt{1+\omega^2}) \cdot q_1'^{\varkappa} = c\,.$$

Hieraus folgt successive:

$$\omega + \sqrt{1+\omega^2} = \frac{c}{q_1'^{\varkappa}}\,, \quad \omega - \sqrt{1+\omega^2} = -\frac{q_1'^{\varkappa}}{c}\,,$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{q_1'^{\varkappa}} - \frac{q_1'^{\varkappa}}{c}\right), \quad \sqrt{1+\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{q_1'^{\varkappa}} + \frac{q_1'^{\varkappa}}{c}\right).$$

Aus (26) und aus der ersten Gleichung (25) ergiebt sich somit:

$$q_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{q_1'^{\varkappa-1}} - \frac{q_1'^{\varkappa-1}}{c}\right) \quad \text{und}$$

$$(29)\quad dt = -\frac{\varepsilon}{\alpha g \cos i}\sqrt{1+\omega^2}\, dq_1' = -\frac{\varkappa}{2g \sin i}\left(\frac{c}{q_1'^{\varkappa}} + \frac{q_1'^{\varkappa}}{c}\right) dq_1'\,,$$

und wenn man dies mit den Formeln verbindet:

$$dq_1 = q_1'\, dt\,, \quad dq_2 = q_2'\, dt\,,$$

so erhält man, so oft $[\varkappa]$ weder $= 1$ noch $= 2$ ist, ausgedrückt im Parameter q_1' sogleich als vollständige Lösungen des Problems:

$$(30)\quad \begin{cases} t - \tau = \dfrac{\varkappa}{2g \sin i}\left\{\dfrac{c}{(\varkappa-1)\, q_1'^{\varkappa-1}} - \dfrac{q_1'^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)\, c}\right\}, \\ q_1 - c_1 = \dfrac{\varkappa}{2g \sin i}\left\{\dfrac{c}{(\varkappa-2)\, q_1'^{\varkappa-2}} - \dfrac{q_1'^{\varkappa+2}}{(\varkappa+2)\, c}\right\}, \\ q_2 - c_2 = \dfrac{\varkappa}{4g \sin i}\left\{\dfrac{c^2}{(2\varkappa-2)\, q_1'^{2\varkappa-2}} + \dfrac{q_1'^{2\varkappa+2}}{(2\varkappa+2)\, c^2}\right\}. \end{cases} -$$

Genau in derselben Weise lässt sich auch *die Bewegung eines schweren Punktes auf einem rauhen Kreiscylinder mit verticaler Axe* mittelst blosser Quadraturen vollständig bestimmen, nur kann man hier die letzten Quadraturen nicht wirklich ausführen. In beiden Fällen wird die Integration eben wesentlich dadurch erleichtert, dass die Gleichungen (23) sich auf zwei Differentialgleichungen 1. O. zwischen q_1', q_2' und t reduciren.

Die Formeln (30) gestatten unmittelbar noch keinen Vergleich mit denen von JELLETT. Um aber die JELLETT'sche Lösung zu erhalten, braucht man nur:

$$\theta = \omega + \sqrt{1+\omega^2} \tag{31}$$

statt q_1' und:

$$n = 2\varepsilon\alpha \operatorname{cotg} i \tag{32}$$

statt $\varkappa$ einzuführen, wodurch

$$\varkappa = \frac{2}{n}, \quad \frac{\varepsilon}{\alpha \cos i} = \frac{2}{n \sin i}$$

wird. Aus (28) erhält man dann:

$$\theta^{\frac{n}{2}} q_1' = \gamma,$$

also

$$q_1' = \gamma\theta^{-\frac{n}{2}}, \quad dq_1' = -\frac{n\gamma}{2}\theta^{-\frac{n}{2}-1} \cdot d\theta,$$

und aus (31)

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\theta - \theta^{-1}), \quad \sqrt{1+\omega^2} = \tfrac{1}{2}(\theta + \theta^{-1}).$$

Nach (26) und (29) wird also:

$$q_2' = \frac{\gamma}{2}\left(\theta^{1-\frac{n}{2}} - \theta^{-1-\frac{n}{2}}\right),$$

$$dt = \frac{\gamma}{2g \sin i}\left(\theta^{-\frac{n}{2}} + \theta^{-\frac{n}{2}-2}\right) d\theta,$$

und an die Stelle der Formeln (30) treten daher jetzt die folgenden:

$$(33)\qquad \begin{cases} t-\delta = \dfrac{\gamma}{g\sin i}\left(\dfrac{\theta^{\frac{2-n}{2}}}{2-n} - \dfrac{\theta^{-\frac{2+n}{2}}}{2+n}\right), \\ q_1-\gamma_1 = \dfrac{\gamma^2}{2g\sin i}\left(\dfrac{\theta^{1-n}}{1-n} - \dfrac{\theta^{-1-n}}{1+n}\right), \\ q_2-\gamma_2 = \dfrac{\gamma^2}{4g\sin i}\left(\dfrac{\theta^{2-n}}{2-n} + \dfrac{\theta^{-2-n}}{2+n}\right), \end{cases}$$

von denen die beiden letzten bis auf die Bezeichnung der Constanten mit denen von JELLETT übereinstimmen, während die erste dort fehlt.

Elie Cartan, *Ueber die einfachen Transformationsgruppen.*

Die ausserordentliche Wichtigkeit, welche die Bestimmung aller *einfachen* endlichen, continuirlichen Gruppen besitzt, tritt schon in den grundlegenden Arbeiten des Herrn LIE (Gesellsch. d. Wiss. Christ. 1882), sowie auch neuerdings in den Arbeiten der Herren PICARD und VESSIOT über die Integration der Differentialgleichungen deutlich hervor.

Herr LIE hat schon längst (Math. Ann. Bd. 25) alle einfachen r-gliedrigen Gruppen bestimmt, deren grösste Untergruppen $r-1$ oder $r-2$ oder $r-3$ Parameter besitzen; er hat überdies *vier* grosse Classen von einfachen Gruppen angegeben, die Gruppen nämlich, die isomorph sind, bezüglich mit der allgemeinen projectiven Gruppe in n Variabeln, mit der Gruppe eines linearen Complexes in $2n+1$ Variabeln, und mit den allgemeinen projectiven Gruppen einer Fläche zweiten Grades in $2n$ und $2n+1$ Variabeln.

Herr KILLING hat in den Math. Ann. Bd. 31, 33, 34, 36 in der Frage nach allen einfachen Gruppen einen weiteren Schritt gethan, indem er zeigte, dass es ausser jenen vier grossen Classen von einfachen Gruppen, die Herr LIE angegeben hatte, nur *fünf* weitere einfache Gruppen giebt, nämlich eine mit 14, eine mit 52 bez. 78, 133, 248 Parametern.

Ich habe in einer kürzlich der Pariser »Académie des Sciences«[1]) vorgelegten Note die Theile der KILLING'schen Arbeit angegeben, die mir unexact erscheinen, und habe dabei ange-

1) C. R. t. CXVI (17 avril 1893).

kündigt, dass es mir gelungen ist, alle seine Ergebnisse auf einem strengen Wege zu beweisen. In der gegenwärtigen Note beabsichtige ich diese meine Ueberlegungen wenigstens in ihren Hauptzügen wiederzugeben.

§ 1.

Ich werde dabei die Begriffe: *charakteristische Gleichung. charakteristische Determinante* und *Rang* einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe G als bekannt voraussetzen, Begriffe, die den Untersuchungen KILLING's zu Grunde liegen. Ich erinnere kurz an ihre Bedeutung:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ gegeben und $\sum e_i X_i f$ eine *allgemein gewählte* infinitesimale Transformation der Gruppe ist, so tritt die charakteristische Gleichung auf, sobald man die Transformation $\sum \lambda_k X_k f$ sucht, für die

$$\left(\sum_1^r e_i X_i f\,,\ \sum_1^r \lambda_k X_k f\right) = \omega \sum_1^r \lambda_k X_k f$$

ist. Sie hat die Form

$$\omega^r - \Psi_1(e)\,\omega^{r-1} + \Psi_2(e)\,\omega^{r-2} + \dots + (-1)^{r-1}\Psi_{r-1}(e)\,\omega = 0\,.$$

Ihre Coefficienten sind ganze homogene Functionen von $e_1 \dots e_r$, insbesondere ist

$$\Psi_1(e) = \sum_{i\varrho}^{1\dots r} e_i\, c_{i\varrho\varrho}\,,$$

$$\Psi_2(e) = \sum_{ij\varrho\sigma}^{1\dots r} e_i\, e_j\, c_{i\varrho\sigma}\, c_{j\sigma\varrho}\,.$$

Diese Gleichung kommt übrigens schon viel früher bei LIE vor.

Der *Rang* der Gruppe ist nichts Anderes, als die Anzahl der von einander unabhängigen unter den Coefficienten Ψ.

Die Coefficienten Ψ sind natürlich *Invarianten der adjungirten Gruppe*, ebenso die Coefficienten der Potenzen von ω in jedem ganzen homogenen Factor der linken Seite der charakteristischen Gleichung.

Es gilt nun der Satz:

Wenn k die Anzahl der identisch verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung bei allgemeiner Wahl von $e_1 \dots e_r$

---

1) Vgl. KILLING, Z. v. G. Math. Ann. Bd. 34, p. 33.

ist, so gehört jede allgemeine infinitesimale Transformation, sagen wir etwa $X_r f$, einer gewissen k-gliedrigen Untergruppe vom Range Null, etwa $X_r f$, $X_{r-1} f$, ... $X_{r-k+1} f$, an.

Diese Untergruppe γ entsteht so: Zunächst wird eine infinitesimale Transformation $X_{r-1} f$ gesucht, so dass $(X_r X_{r-1}) \equiv 0$ ist, dann eine $X_{r-2} f$, so dass $(X_r X_{r-2}) = a X_r f + b X_{r-1} f$, darauf eine $X_{r-3} f$, so dass $(X_r X_{r-3}) = c X_r f + d X_{r-1} f + e X_{r-2} f$ ist, u. s. w. Dieser Process hat ein Ende, und zwar ergeben sich gerade so viele Xf, als die charakteristische Gleichung verschwindende Wurzeln hat.

Wir nennen diese Untergruppe die Untergruppe γ in Bezug auf die allgemeine Transformation $X_r f$.

Wenn man bei den gemachten Annahmen in der charakteristischen Gleichung den Grössen $e_1, \ldots e_{r-k}$ den Werth Null ertheilt, so zerfällt ihre linke Seite in ein Product von linearen Factoren in $\omega, e_{r-k+1}, \ldots, e_r$. Jeder dieser linearen Factoren liefert für ω eine *Wurzel* in Bezug auf die Untergruppe γ oder einfacher eine *Wurzel*.

Unter diesen Wurzeln kann eine p-fache Wurzel ω_α in Beziehung zu gewissen p von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_{\alpha_1} f, \ldots X_{\alpha_p} f$ der ganzen Gruppe gesetzt werden, derart dass die Schar Σ const. $X_{\alpha_i} f$ invariant bleibt gegenüber der Untergruppe γ, und dass die Determinante

$$\left| \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, e_{r-\varrho} c_{r-\varrho,\, \alpha_i,\, \alpha_j} - \varepsilon_{ij}\, \omega \right| = \left[\sum_0^{k-1}{}_\varrho \, e_{r-\varrho}\, \omega_\alpha^{(\varrho)} - \omega \right]^p$$

$$(i, j = 1, 2 \ldots p)$$

$$(\varepsilon_{ij} = 0, \quad \text{wenn } i \neq j, \quad \varepsilon_{ii} = 1)$$

ist. Insbesondere ist

$$p \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, e_{r-\varrho}\, \omega_\alpha^{(\varrho)} = \sum_{\varrho\, i} e_{r-\varrho} c_{r-\varrho,\, \alpha_i, \alpha_i} \cdot$$

Ferner existirt zu jeder beliebigen Transformation Xf von γ wenigstens eine Transformation Σ const. $X_{\alpha_i} f$, so dass der Klammerausdruck aus beiden gleich $\omega_\alpha \Sigma$ const. $X_{\alpha_i} f$ ist.

Endlich, wenn die Transformationen von γ mit einander vertauschbar sind, so existirt wenigstens eine Transformation $X_\alpha f$ der Schar Σ const. $X_{\alpha_i} f$, so dass

$$(X_r X_\alpha) = \omega_\alpha^{(0)} X_\alpha f, \quad (X_{r-1} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(1)} X_\alpha f, \ \ldots$$

ist.

Wir sagen, dass die Schar der Transformationen $X_{\alpha_1}f, \ldots X_{\alpha_p}f$ *zur Wurzel* ω_α *gehört.*

Sind $X_\alpha f$, $X_\beta f$ zwei infinitesimale Transformationen, die bez. zu den Wurzeln ω_α, ω_β gehören, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $\omega_\alpha + \omega_\beta = 0$, so ist $(X_\alpha X_\beta)$ linear ableitbar aus den Transformationen $X_r f, \ldots X_{r-k+1} f$ der Untergruppe γ.

2) Ist $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\gamma$, d. h. gleich einer dritten Wurzel, so ist $(X_\alpha X_\beta)$ linear ableitbar aus den zu ω_γ gehörigen infinitesimalen Transformationen.

3) In allen anderen Fällen ist $(X_\alpha X_\beta) = 0$.

Ich gehe auf die Begründung der soeben aufgestellten Behauptungen nicht näher ein, da KILLING die Beweise dafür gegeben hat (Math. Ann. Bd. 34, § 3, 8, und Bd. 33, § 10).

§ 2.

Ich gehe jetzt dazu über, einige Hülfssätze zu beweisen, sowie einige Formeln aufzustellen, die ich nachher benutzen werde.

Satz I. *Wenn $F(e)$ eine ganze homogene Invariante m^{ten} Grades der adjungirten Gruppe in $e_1, \ldots e_r$ bezeichnet, so definiren die linearen homogenen Gleichungen, die man durch Nullsetzen aller $(m-1)^{ten}$ partiellen Ableitungen von $F(e)$ nach $e_1 \ldots e_r$ erhält, eine invariante Untergruppe der Gruppe γ, vorausgesetzt dass sie nicht die Gleichungen: $e_1 = 0, \ldots, e_r = 0$ nach sich ziehen.*

Der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dass ich ihn hier nicht mitzutheilen brauche.

Wenn insbesondere $m = 1$ ist, so definirt die Gleichung $F(e) = 0$ selbst eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, der die erste derivirte Gruppe der gegebenen Gruppe angehört. Man kommt so wieder zu einem Theorem von LIE zurück, nach dem alle Transformationen der ersten derivirten Gruppe $\Psi_1(e)$ zum Verschwinden bringen, wenn $\Psi_1(e)$ nicht schon an sich identisch Null ist.

Satz II. *Wenn $X_r f$ und $X_{r-1} f$ irgend zwei infinitesimale Transformationen der Untergruppe γ sind, so sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu $(X_r X_{r-1})$ gehört, gleich Null.*

In der That, es sei

$$(X_r X_{r-1}) = \sum_0^{k-1} \varrho \; \lambda_{r-\varrho} X_{r-\varrho} f \,,$$

und ferner

$$\omega_\alpha = \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, e_{r-\varrho} \, \omega_\alpha^{(\varrho)}$$

irgend eine Wurzel der charakteristischen Gleichung in Bezug auf die Untergruppe γ; nehmen wir überdies an, dass $X_{\alpha_1} f \ldots X_{\alpha_p} f$ diejenigen Transformationen sind, die zu dieser Wurzel gehören, so haben wir

$$p \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, \lambda_{r-\varrho} \, \omega_\alpha^{(\varrho)} = \sum_{\varrho i} \lambda_{r-\varrho, i} c_{r-\varrho \, \alpha_i, \alpha_i}$$

$$= \sum_1^p{}_i \left[\sum_1^p{}_s \, c_{r-i, \alpha_i, \alpha_s} c_{r, \alpha_s, \alpha_i} - c_{r-i, \alpha_s, \alpha_i} c_{r, \alpha_i, \alpha_s} \right],$$

woraus unmittelbar folgt:

$$p \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, \lambda_{r-\varrho} \, \omega_\alpha^{(\varrho)} = 0 \, .$$

Satz III. *Wenn $X_\alpha f$ und $X_{\alpha'} f$ zwei infinitesimale Transformationen sind, die resp. zu den Wurzeln ω_α und $\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha$ gehören, so sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu $(X_\alpha X_{\alpha'})$ gehört, reelle und rationale Vielfache einer unter ihnen.*

In der That, betrachten wir irgend eine Wurzel ω_λ in Bezug auf die Untergruppe γ. Nehmen wir an, dass alle Wurzeln von der Form $\omega_\lambda + m\omega_\alpha$, wo m eine ganze Zahl bezeichnet, zwischen $\omega_\lambda + h\omega_\alpha$ und $\omega_\lambda - h'\omega_\alpha$ eingeschlossen sind, und dass die Wurzel $\omega_\lambda + i\omega_\alpha$ n_i-fach ist $(-h' \leqq i \leqq h)$. Nehmen wir endlich an, dass

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, c_{\alpha, \alpha', r-\varrho} X_{r-\varrho} f$$

ist.

Combiniren wir alsdann beide Seiten dieser Gleichung nach einander mit allen infinitesimalen Transformationen, die zu den Wurzeln $\omega_\lambda + i\omega_\alpha$ gehören, und wenden wir auf diese Klammern die JACOBI'sche Identität an, indem wir aber jedesmal nur die Coefficienten der benutzten Transformation ins Auge fassen, so ergiebt die Addition dieser Relationen die Gleichung:

$$0 = \sum_0^{k-1}{}_\varrho \, c_{\alpha, \alpha', r-\varrho} \left[\sum_{-h'}^{h}{}_i \, n_i (\omega_\lambda^{(\varrho)} + i\omega_\alpha^{(\varrho)}) \right],$$

das heisst:

$$\sum_{-h'}^{h} i\, n_i \cdot \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}\, c_{\alpha,\alpha',r-\varrho}\omega_{\lambda}^{(\varrho)} = -\sum_{-h'}^{h} i\, n_i \cdot \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}\, c_{\alpha,\alpha',r-\varrho}\omega_{\alpha}^{(\varrho)}.$$

In Folge dessen ist, in Bezug auf die betrachtete Transformation, die Wurzel ω_λ ein reelles und rationales Vielfaches der Wurzel ω_α. *Insbesondere, wenn diese Wurzel ω_α verschwindet, verschwinden gleichzeitig alle anderen Wurzeln*[1]).

Wir haben soeben die infinitesimalen Transformationen betrachtet, die zu den Wurzeln von der Form $\omega_\lambda + m\omega_\alpha$ gehören. Wir erhalten nun eine analoge Gleichung, wenn wir die infinitesimalen Transformationen betrachten, welche zu den Wurzeln von der Form $m\omega_\alpha$ gehören, wo m eine ganze *positive* Zahl bezeichnet. Ist nämlich $l\omega_\alpha$ die grösste Wurzel von dieser Form, und bezeichnet ν_i die Zahl der Transformationen, die zur Wurzel $i\omega_\alpha$ gehören, so erhalten wir die Formel

$$\sum_{1}^{l} \nu_i \cdot \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}\, c_{\alpha,\alpha',r-\varrho}\omega_{\alpha}^{(\varrho)} = \sum_{1}^{\nu_1}{}_{s} \sum_{0}^{k-1}{}_{\varrho}\, c_{r-\varrho,\alpha,\alpha_s} c_{\alpha_s,\alpha',r-\varrho}\,.$$

Satz IV. *Für eine perfecte Gruppe kann der Coefficient $\Psi_2(e)$ der charakteristischen Gleichung nicht identisch verschwinden.*

Herr LIE nennt eine Gruppe, die ihre eigene erste derivirte Gruppe ist, eine *perfecte* Gruppe.

Nach dem Satze I verschwindet der Coefficient $\Psi_1(e)$ der charakteristischen Gleichung einer perfecten Gruppe identisch. Wäre gleichzeitig $\Psi_2(e) \equiv 0$, so wären, nach einem Satze der Theorie der algebraischen Gleichungen, entweder alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung gleich Null, oder ihre Verhältnisse nicht alle *reell*.

Nehmen wir z. B. an, dass die charakteristische Gleichung k und nur k verschwindende Wurzeln besitze ($k < r$). Es sei etwa $X_r f$ irgend eine allgemeine infinitesimale Transformation der ganzen Gruppe. Wir betrachten die Untergruppe γ in Bezug auf diese Transformation. Da die Gruppe perfect ist, so ist $X_r f$ linear ableitbar aus den Transformationen $(X_{r-i}\, X_{r-j})$ $(i,j = 0, 1, \cdots k-1)$ und $(X_\alpha X_{\alpha'})$. Aber für jede dieser Transformationen

1) Vgl. für diesen Satz und den vorigen: KILLING, Z. v. G. III, § 19 und 20.

sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reelle Vielfache einer unter ihnen (Satz III); aber, da $\Psi_2(e) = 0$ ist, ist das nur möglich, wenn für jede dieser Transformationen alle Wurzeln verschwinden. Dasselbe findet für jede lineare Function dieser Transformationen statt, in Gemässheit der Eigenschaften der Untergruppe γ, und insbesondere für die infinitesimale Transformation $X_r f$. Also besitzt die charakteristische Gleichung in Bezug auf irgend eine allgemeine Transformation nur verschwindende Wurzeln, d. h. die Gruppe ist vom Range Null.

Aber Herr ENGEL hat gezeigt, dass die erste derivirte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe vom Range Null höchstens $(r-2)$-gliedrig ist [1]). Wir kommen also zu einem Widerspruch, mit andern Worten: $\Psi_2(e)$ *kann nicht identisch verschwinden.*

§ 3.

Wir können jetzt zu den einfachen Gruppen übergehen.

Bezeichnet zunächst G eine r-gliedrige einfache Gruppe, so ist G perfect, also nach dem Satze I $\Psi_1(e) = 0$, und nach dem Satze IV $\Psi_2(e) \not\equiv 0$.

Ich behaupte nun, dass der Coefficient $\Psi_2(e)$, der eine quadratische Form in $e_1, e_2 \ldots e_r$ ist, auf eine Summe von r von einander unabhängigen Quadraten reducibel ist. In der That, wenn es anders wäre, so besässe die Gruppe nach Satz I eine invariante Untergruppe.

Wir erhalten also das folgende

Theorem I. *Jede r-gliedrige einfache Gruppe ist perfect, der Coefficient $\Psi_1(e)$ ihrer charakteristischen Gleichung verschwindet identisch, und der Coefficient $\Psi_2(e)$ ist reducibel auf eine Summe von r von einander unabhängigen Quadraten.*

Betrachten wir die Form dieses Coefficienten $\Psi_2(e)$ etwas näher. Wir haben:

$$\Psi_2(e) = \sum_{i\,j\,\varrho\,\sigma}^{1\ldots r} e_i\, e_j\, c_{i\varrho\sigma}\, c_{j\sigma\varrho}\,.$$

Wir setzen wie immer voraus, dass die zu $X_r f$ gehörige Untergruppe γ gerade $X_r f$, $X_{r-1} f \ldots X_{r-k+1} f$ sei und dass jeder der Wurzeln ω_i, die sich auf diese Untergruppe beziehen,

1) UMLAUF, Ueber die Zus. der Gruppen vom Range Null. Leipzig 1894.

gerade die infinitesimale Transformation $X_i f$ entspricht ($i = 1, 2 \ldots r - k$). Wir wollen diese Form der Gruppe künftig kurz die reducirte Form nennen. Alsdann ist der Ausdruck

$$\sum_{\varrho\,\sigma} c_{i\varrho\sigma}\, c_{j\sigma\varrho}$$

nur in dem Fall, dass

$$\omega_i + \omega_j = 0$$

ist, von Null verschieden.

Wir sehen schon hieraus, dass $\Psi_2(e)$ von der Form

$$\sum A_\alpha e_\alpha e_{\alpha'} + \chi(e_r, e_{r-1} \cdots e_{r-k+1})$$

ist, wo χ eine quadratische Form in $e_r, \ldots e_{r-k+1}$ bezeichnet. Soll daher $\Psi_2(e)$ auf eine Summe von r von einander unabhängigen Quadraten reducibel sein, so müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1) Unter den Wurzeln, die sich auf die Untergruppe γ beziehen, giebt es k von einander unabhängige, d. h. es giebt keine Transformation in γ, für die alle Wurzeln Null sind. Anders ausgesprochen, nach Satz II, *alle Transformationen der Untergruppe γ sind mit einander vertauschbar*[1]).

2) Jeder Wurzel ω_α entspricht eine entgegengesetzt gleiche Wurzel ω'_α. Ich behaupte überdies, dass jeder Transformation $X_\alpha f$, die der Wurzel ω_α zugehört, wenigstens eine Transformation $X_{\alpha'} f$ entsprechen muss, die der Wurzel ω'_α zugehört, derart dass

$$\sum_0^{k-1} {}^{\varrho}\, c_{\alpha,\alpha',r-\varrho}\, \omega_\alpha^{(\varrho)} \neq 0$$

ist.

Denn wenn dem nicht so wäre, und wenn $X_{\alpha'} f$ irgend eine Transformation bezeichnete, die der Wurzel ω'_α zugehört, so hätten wir

$$\sum_1^r {}^{\sigma}\, c_{\alpha\varrho\sigma}\, c_{\alpha'\sigma\varrho} = \sum_1^r {}^{\sigma}\, c_{\alpha'\varrho\sigma}\, c_{\alpha\sigma\varrho} - \sum_0^{k-1} {}^{i}\, c_{\alpha,\alpha',r-i}\, c_{r-i,\varrho,\varrho}\,.$$

Summiren wir hierin über alle Werthe von ϱ, die derselben Wurzel ω_λ zugehören, so sehen wir, dass die linksstehende Summe

1) Es ist dies ein specieller Fall eines von KILLING ausgesprochenen Satzes (Z. v. G. III, § 19, p. 66) dessen Ungenauigkeit ich schon in den C. R. c. hervorgehoben habe.

sich nicht ändert, wenn wir anstatt der Wurzel ω_λ die Wurzel $\omega_\lambda - \omega_\alpha$ setzen und dass diese Summe gleich Null ist, wenn $\omega_\lambda - \omega_\alpha$ keine Wurzel ist, woraus leicht folgt, dass sie stets Null ist. Also könnte $\Psi_2(e)$ die Grösse e_α nicht enthalten; aber das ist unmöglich.

Andrerseits ist nun auch leicht einzusehen (§ 1), dass wenigstens eine Transformation $X_\alpha f$ vorhanden ist, die der Wurzel ω_α zugehört, derart dass für jedes i

$$(X_{r-i} X_\alpha) = \omega_\alpha^{(i)} X_\alpha f$$
$$(i = 0, 1, \ldots k-1)$$

ist.

Nach dem Vorhergehenden giebt es also auch wenigstens eine Transformation $X_{\alpha'} f$, so dass

$$\sum_0^{k-1} \varrho \; c_{\alpha, \alpha', r-\varrho} \, \omega_\alpha^{(\varrho)} \neq 0$$

ist.

Wenden wir auf die beiden so definirten Transformationen $X_\alpha f$ und $X_{\alpha'} f$ die zweite Formel des Satzes III an, so kommt:

$$\sum_1^l{}_i \; \nu_i \cdot \sum_0^{k-1} \varrho \; c_{\alpha, \alpha', r-\varrho} \, \omega_\alpha^{(\varrho)} = \sum_1^{\nu_1} s \sum_0^{k-1} \varrho \; c_{r-\varrho, \alpha, \alpha_s} c_{\alpha_s, \alpha', r-\varrho}$$
$$= \sum_0^{k-1} \varrho \; \omega_\alpha^{(\varrho)} \, c_{\alpha, \alpha', r-\varrho} \, ,$$

woraus

$$\sum_1^l{}_i \; \nu_i = 1 \, .$$

Also ist auch $l = 1$, $\nu_1 = 1$. Folglich *ist die Wurzel ω_α einfach und es giebt keine Wurzeln von der Form $2\omega_\alpha$, $3\omega_\alpha$*, u. s. w.

Theorem II. *Bei jeder einfachen Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$ sind die Transformationen der Untergruppe γ unter einander vertauschbar; die charakteristische Gleichung besitzt ferner nur einfache Wurzeln, die einander paarweise entgegengesetzt gleich sind; der Klammerausdruck zweier Transformationen, die zwei entgegengesetzt gleichen Wurzeln angehören, ist von Null verschieden. Ueberdies giebt es unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die sich auf die k-gliedrige Untergruppe γ beziehen, gerade k von einander unabhängige.*

Da die grössten nicht verschwindenden Unterdeterminanten der Determinante der adjungirten Gruppe offenbar hier $(r-k)$-

reihig sind, so folgt, dass die adjungirte Gruppe nur k Invarianten besitzt. Mithin ist der Rang der Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$, der nach dem letzten Theorem mindestens gleich k ist, gerade gleich k. Wir werden von jetzt ab überhaupt den Rang der gegebenen Gruppe mit l bezeichnen, wie es KILLING thut. Hier ist also $l = k$.

Künftig werden wir stets mit dem Buchstaben Y die Transformationen der Untergruppe γ, zum Unterschiede von den übrigen Transformationen, bezeichnen. Wenn ω_α eine Wurzel ist, die sich auf γ bezieht, und wenn $\omega'_\alpha = -\omega_\alpha$ ist, so wollen wir setzen:

$$Y_\alpha f = (X_\alpha X_{\alpha'}) .$$

Natürlich brauchen nicht alle $Y_\alpha f$ von einander unabhängig zu sein. Wir werden ferner voraussetzen, — was immer erlaubt ist — dass

$$(Y_\alpha X_\alpha) = -2 X_\alpha f ,$$

d. h. dass

$$\omega_\alpha^{(\alpha)} = -2$$

ist.

Wir wollen auch hier die Redeweise benutzen, dass die *so definirte Transformation $Y_\alpha f$ mit der Wurzel ω_α verbunden ist.*

§ 4.

Betrachten wir zwei Wurzeln ω_α und ω_β. Setzen wir überdies voraus, dass auch $\omega_\beta + \omega_\alpha, \ldots \omega_\beta + h\omega_\alpha$, ebenso $\omega_\beta - \omega_\alpha, \ldots \omega_\beta - h'\omega_\alpha$ Wurzeln sind, während $\omega_\beta + (h+1)\omega_\alpha$, $\omega_\beta - (h'+1)\omega_\alpha$ keine Wurzeln sein sollen. Es möge zur Wurzel $\omega_\beta + i\omega_\alpha$ gerade die Transformation $X_{\beta_i} f$ gehören. Alsdann giebt die schon früher durchgeführte Betrachtung (Satz III) die beiden Formeln:

$$\omega_\beta^{(\alpha)} = h - h'$$

$$c_{\alpha\beta_0\beta_1} c_{\alpha'\beta_1\beta_0} = -h(h'+1) \qquad (h > 0) .$$

Hieraus folgt ohne Mühe das

Theorem III. *Wenn ω_α und ω_β zwei solche Wurzeln sind, dass auch $\omega_\alpha + \omega_\beta$ eine Wurzel ist, so ist $(X_\alpha X_\beta)$ von Null verschieden. Ausserdem sind in*

$$(Y_\beta X_\alpha) = \omega_\alpha^{(\beta)} X_\alpha f , \quad (Y_\alpha X_\beta) = \omega_\beta^{(\alpha)} X_\beta f$$

$\omega_\alpha^{(\beta)}$ *und* $\omega_\beta^{(\alpha)}$ *zwei ganze Zahlen* $a_{\alpha\beta}$ *und* $a_{\beta\alpha}$, *sodass auch* $\omega_\beta + a_{\beta\alpha}\omega_\alpha$ *eine Wurzel ist, ebenso wie alle zwischen* ω_β *und* $\omega_\beta + a_{\beta\alpha}\omega_\alpha$ *gelegenen Grössen* $\omega_\beta \pm \omega_\alpha$, $\omega_\beta \pm 2\omega_\alpha \ldots$ [1]).

Der Bequemlichkeit halber soll im Folgenden unter a_{ii} die Zahl -2 verstanden werden; alsdann gilt nämlich nach dem Früheren das Theorem auch für diese.

Aus den Eigenschaften der ganzen Zahlen $a_{\alpha\beta}$ erhellt, dass, wenn:

$$\omega_\lambda = m\omega_\beta + n\omega_\gamma + \cdots$$

ist, auch

$$a_{\lambda\alpha} = m a_{\beta\alpha} + n a_{\gamma\alpha} + \cdots$$

sein muss, und dass, wenn

$$Y_\lambda f = p Y_\beta f + q Y_\gamma f + \cdots$$

ist, ebenfalls

$$a_{\alpha\lambda} = p a_{\alpha\beta} + q a_{\alpha\gamma} + \cdots$$

sein muss.

Die Eigenschaft der ganzzahligen Grössen $a_{\alpha\beta}$, *aus der Existenz zweier Wurzeln* ω_α *und* ω_β *die Existenz einer dritten Wurzel schliessen zu lassen, ist in dieser Theorie von grundlegender Bedeutung, wie Killing gezeigt hat.*

In der That, wenn wir p **unabhängige Wurzeln** $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ ins Auge fassen, so müssen die p^2 zugehörigen ganzen Zahlen a_{ij} so beschaffen sein, dass *die Anzahl der Wurzeln, die hiernach aus ihnen abgeleitet werden können, endlich ist.* KILLING folgert hieraus das

Theorem IV. [2]) *Wenn man p unabhängige Wurzeln* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ *betrachtet, so ist die Determinante der zugehörigen* a_{ij} *zwischen Null und* $(-2)^p$ *enthalten, und die erstere Grenze kann nie erreicht werden. Ebenso liegen alle ihre* ϱ*-reihigen Hauptunterdeterminanten zwischen* 0 *und* $(-2)^\varrho$, *wobei jedoch der Werth Null ausgeschlossen ist. Wenn überdies eine der* $a_{ij} = 0$ *ist, so ist auch* $a_{ji} = 0$. *Wenn endlich* $i, j, k \ldots g, h$ *irgend welche der Zahlen* $1, 2 \ldots p$ *bedeuten, so ist*

$$a_{ij}\, a_{jk} \cdots a_{gh} = a_{ji}\, a_{kj} \cdots a_{hg} .$$

---

1) Vgl. KILLING Z. v. G. § 42.

2) Vgl. KILLING Z. v. G. II, § 43. Ich führe von den Ergebnissen KILLING's nur solche an, die in der Folge gebraucht werden.

Insbesondere ergiebt sich aus diesem Theorem, dass, wenn ω_α und ω_β zwei unabhängige Wurzeln sind, das Product $a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha} = 0, 1, 2$ oder 3 ist. Hieraus werden wir eine neue und sehr wichtige Eigenschaft der ganzen Zahlen $a_{\alpha\beta}$ ableiten.

Ich bemerke zunächst, dass, wenn zwei Wurzeln ω_α, ω_β nicht von einander unabhängig sind, wenn z. B.

$$\omega_\alpha = m\omega_\beta$$

ist, hieraus die Gleichungen hervorgehen

$$-2 = m a_{\beta\alpha},$$

$$a_{\alpha\beta} = -2m,$$

$$a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha} = 4,$$

also

$$m = \pm\tfrac{1}{2},\ \pm 1 \text{ oder } \pm 2$$

ist.

Da keine Wurzeln $\pm 2\omega_\alpha$, $\pm 2\omega_\beta$ existiren können, so muss

$$\omega_\alpha = \pm\omega_\beta$$

sein.

Betrachten wir andererseits die Wurzeln ω_α, ω_β, ω_λ, für die

$$\omega_\lambda = \omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta$$

sei, so folgt leicht eine Formel von der Form

$$Y_\lambda f = m Y_\alpha f + n Y_\beta f,$$

wenn $Y_\alpha f$, $Y_\beta f$, $Y_\lambda f$ die mit ω_α, ω_β, ω_λ verbundenen Transformationen der Untergruppe γ bedeuten. Berechnen wir die Coefficienten m und n.

Setzen wir wie früher $a_{\gamma\gamma} = -2$, d. h.

$$m(a_{\alpha\alpha} + a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}) + n(a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}a_{\beta\beta}) = -2$$

oder

$$(a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha} - 2)m - a_{\alpha\beta}n = -2. \tag{1}$$

Um eine zweite Relation zu erhalten, bemerken wir, dass $a_{\alpha\lambda} = a_{\lambda\alpha}$ ist. Denn wenn

$$\omega_\lambda + h\omega_\alpha = (h+1)\omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta$$

eine Wurzel ist, so ist auch

$$\omega_\lambda + h\omega_\alpha + (a_{\lambda\beta} + h a_{\alpha\beta})\omega_\beta = (h+1)\omega_\alpha + h a_{\alpha\beta}\omega_\beta = \omega_\alpha + h\omega_\lambda$$

eine Wurzel, und umgekehrt. Es ist also wirklich $a_{\alpha\lambda} = a_{\lambda\alpha}$. Bringen wir dies zum Ausdruck, so erhalten wir

$$(2) \qquad -2m + a_{\alpha\beta} n = a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} - 2 .$$

Aus (1) und (2) folgt, da $a_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} \neq 4$ ist:

$$m = 1 , \quad a_{\alpha\beta}(n - a_{\beta\alpha}) = 0 .$$

Sobald also $a_{\alpha\beta} \neq 0$ ist, so ist $n = a_{\beta\alpha}$.

Wir haben demnach:

$$Y_\lambda f = Y_\alpha f + a_{\beta\alpha} Y_\beta f .$$

Diese Formel bleibt übrigens auch richtig, wenn $a_{\alpha\beta} = 0$ ist; ebenso wenn ω_α und ω_β nicht unabhängig sind.

Mithin ergiebt sich das

Theorem V. *Wenn $Y_\alpha f$ und $Y_\beta f$ die mit den Wurzeln ω_α und ω_β verbundenen Transformationen der Untergruppe γ sind, so ist die mit der Wurzel $\omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta$ verbundene Transformation: $Y_\alpha f + a_{\beta\alpha} Y_\beta f$.*

Entsprechend dem Theorem IV haben wir also das folgende

Theorem VI. *Wenn $Y_1 f, \ldots Y_p f$ p von einander unabhängige Transformationen der Untergruppe γ sind, die mit den Wurzeln ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_p$ verbunden sind, so ist die zugehörige Determinante der a_{ij} von Null verschieden, und folglich sind die p Wurzeln von einander unabhängig.*

Umgekehrt, wenn die p Wurzeln $\omega_1, \ldots \omega_p$ unabhängig sind, so sind die mit ihnen verbundenen Transformationen der Untergruppe γ auch unabhängig.

Aus allen diesem folgt dass, wenn wir irgend welche unabhängige Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_l$ auswählen, alsdann alle anderen Wurzeln sich als lineare homogene Functionen von $\omega_1 \ldots \omega_l$ mit *rationalen* Zahlencoefficienten ausdrücken. In der That, man kann immer schreiben

$$\omega_\alpha = \sum_1^l{}_i \, m_i \omega_i ,$$

also auch

$$a_{\alpha i} = \sum_1^l{}_\varrho \, m_\varrho a_{\varrho i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots l) .$$

Da nun die Determinante der $a_{ij} \neq 0$ ist, so hat man rationale Ausdrücke für die m_i[1]).

1) Vgl. Killing Z. v. G. II, p. 17.

§ 5.

Bestimmung aller aus den a_{ij} gebildeten Systeme, die dem Theorem IV genügen.

Wir haben gesehen, dass, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ p von einander unabhängige Wurzeln bezeichnen, das zugehörige System der a_{ij} den folgenden Bedingungen genügt:

Die Determinante der a_{ij} $(i, j = 1, 2 \ldots p)$ *ist nie gleich Null und ihr Werth liegt zwischen* 0 *und* $(-2)^p$; *die Werthe aller ihrer* ϱ*-reihigen Hauptunterdeterminanten liegen zwischen* 0 *und* $(-2)^\varrho$, *wobei jedoch der Werth* 0 *ausgeschlossen ist; endlich, wenn* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda$ *irgend welche unter den Zahlen* 1, 2, $\ldots p$ *bezeichnen, so besteht die Relation*

$$a_{\alpha\beta}\, a_{\beta\gamma} \cdots a_{\varkappa\lambda} = a_{\beta\alpha}\, a_{\gamma\beta} \cdots a_{\lambda\varkappa}\,.$$

Die Bestimmung aller diesen Bedingungen genügenden Systeme ist von KILLING geleistet worden[1]). Er hat sie vereinfacht durch ihre Eintheilung einerseits in *einfache* und *zusammengesetzte*, andererseits in *äquivalente* und *nicht äquivalente* Systeme.

Ein System aus p^2 ganzen Zahlen a_{ij} heisst *einfach*, wenn man mit irgend zweien unter den Zahlen 1, 2 $\ldots p$, etwa α, β eine gewisse Reihe $i_1, i_2, \ldots i_h$ dieser Zahlen verbinden kann, derart dass

$$a_{\alpha i_1}\, a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_h \beta} \neq 0$$

ist. Im entgegengesetzten Falle heisst das System zusammengesetzt[2]).

Wenn ein System $(1, 2 \ldots p)$ zusammengesetzt ist, so kann man die Marken 1, 2 $\ldots p$ in eine gewisse Anzahl, etwa $m > 1$ von Reihen eintheilen, derart dass $a_{\alpha\beta} = 0$ ist, sobald α und β zwei verschiedenen Reihen angehören, während die a_{ik}, in denen i und k derselben Reihe angehören, ein einfaches System bilden.

Daraus folgt, dass es genügt, alle einfachen Systeme zu bestimmen; alle anderen werden durch Zusammensetzung der so gefundenen Systeme erhalten.

Endlich vereinfacht auch noch die Einführung des Begriffs der äquivalenten Systeme[3]) unser Problem.

---

1) Vgl. KILLING Z. v. G. II, § 15.
2) Vgl. KILLING Z. v. G. II, § 14.
3) Vgl. KILLING Z. v. G. II, p. 24.

Die zu zwei Reihen von Wurzeln $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ *und* $\omega_i' = m_{i1}\omega_1 + m_{i2}\omega_2 + \cdots + m_{ip}\omega_p$ $(i = 1, 2 \ldots p)$ *gehörigen Systeme von Zahlen* a_{ij} *bez.* a'_{ij} *heissen äquivalent, wenn jede durch das eine System gelieferte Wurzel auch durch das andere geliefert wird, und umgekehrt.*

Es leuchtet ein, dass in der That für unsern Zweck zwei äquivalente Systeme nicht als verschieden zu betrachten sind.

Nun gilt der

Satz I. *Bezeichnet* Σ *das zu den von einander unabhängigen Wurzeln* $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ *gehörige System, so entspricht den v. e. unabhängigen Wurzeln*

$$\omega_1' = \omega_1 + a_{12}\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2 \cdots \omega_p' = \omega_p$$

ein mit Σ *äquivalentes System* Σ'.

Das Zeichen S_β möge ausdrücken, dass wir von der Wurzel ω_α zur Wurzel $\omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta$ übergehen, indem wir dies abgekürzt so schreiben:

$$S_\beta \omega_\alpha = \omega_\alpha + a_{\alpha\beta}\omega_\beta .$$

Betrachten wir eine durch das System Σ gelieferte Wurzel, etwa

$$\omega_\alpha = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_k} \omega_i .$$

Ist $i \neq 1$, so ersetzen wir ω_i durch ω_i', $S_\varkappa$ durch $S_\varkappa'$ $(\varkappa \neq 1)$, S_1 durch $S_2' S_1' S_2'$. Wir erhalten dann eine durch das System Σ' gelieferte Wurzel

$$\omega_\alpha' = S'_{j_1} \cdots S'_{j_k} \omega_i' ,$$

und man verificirt unmittelbar, dass $\omega_\alpha' = \omega_\alpha$ ist. Wenn im Gegentheil $i = 1$ ist, so genügt es, ω_1 durch $S_2'\omega_1'$, $S_\varkappa$ durch $S_\varkappa'$, $(\varkappa \neq 1)$ und S_1 durch $S_2' S_1' S_2'$ zu ersetzen. Man erhält dann eine durch Σ' gelieferte Wurzel $\omega_\alpha' = \omega_\alpha$.

Da

$$\omega_1 = \omega_1' + a_{12}'\omega_2', \quad \omega_2 = \omega_2' \cdots \omega_p = \omega_p'$$

ist, so sieht man, dass augenscheinlich auch das Umgekehrte gilt, und infolge dessen sind Σ und Σ' äquivalent.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dass Σ und Σ' gleichzeitig einfach oder zusammengesetzt sind.

Man kann die neuen a_{ij}' angeben, wenn man die alten kennt. Man hat nämlich:

$$a_{ij}' = a_{ij} \qquad (i, j \neq 1) .$$

Ferner ist:

$$a'_{1i} = a_{1i} + a_{12}a_{2i} \qquad (i \neq 1).$$

Da (Theorem V)

$$Y'_1 f = Y_1 f + a_{21} Y_2 f$$

ist, hat man auch:

$$a'_{i1} = a_{i1} + a_{i2}a_{21} \qquad (i \neq 1).$$

Der Satz I wird genügen, um künftig die äquivalenten Systeme herausgreifen zu können.

Das Problem ist also auf die Bestimmung aller einfachen nicht äquivalenten Systeme zurückgeführt. Herr KILLING hat gezeigt, dass diese Bestimmung nach und nach ausgeführt werden kann; es gilt nämlich der

Satz II. *Jedes einfache System p^{ter} Ordnung enthält mindestens ein einfaches Untersystem $(p-1)^{ter}$ Ordnung.*

Der Beweis dieses Satzes bietet keine Schwierigkeiten dar.

Wenn man alsdann alle einfachen Systeme $(p-1)^{ter}$ Ordnung kennt, so genügt es, für ein jedes dieser Systeme etwa a_{ij} $(i, j = 1, 2 \ldots p-1)$ in allgemeinster Weise $2(p-1)$ ganze Zahlen a_{ip}, a_{pi} $(i = 1, 2 \ldots p-1)$ zu bestimmen, derart, dass die zugehörige Determinante den Bedingungen des Theorems IV genügt; man behält so alle möglichen einfachen Systeme p^{ter} Ordnung.

In Folge dessen bietet die Bestimmung aller einfachen nicht äquivalenten Systeme keine besonderen Schwierigkeiten dar. Sie ist von KILLING ausgeführt worden.

Jedoch ist das Verfahren KILLING's darin unvollständig, dass er annimmt, *alle Zahlen a_{ij} seien negativ.* Diese Behauptung ist im Allgemeinen richtig, d. h. man kann meistens statt $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ andere Wurzeln $\pm\omega_1, \pm\omega_2 \cdots \pm\omega_p$ wählen, derart dass alle $a_{ij} \leqq 0$ sind. Es beruht darauf, dass, wenn i, j, k drei verschiedene unter den Zahlen $1, 2 \ldots p$ bezeichnen, alsdann

$$a_{ij}\, a_{jk}\, a_{ki} \leqq 0$$

ist (infolge des Theorems IV).

Ich gehe nicht näher auf die Bestimmung der einfachen Systeme ein. Die Resultate, die KILLING erhält, sind äusserst wichtig:

Für ein gegebenes p giebt es im Allgemeinen vier einfache nicht äquivalente Systeme p^{ter} Ordnung, nämlich die folgenden:

A) $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1$ $(i \neq j;\ i,j = 1,2 \cdots p)$

B) $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1$ $(i \neq j)$, $a_{ip} = -2$, $a_{pi} = -1$
$(i,j = 1,2 \cdots p-1)$

C) $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1$ $(i \neq j)$, $a_{ip} = -1$, $a_{pi} = -2$
$(i,j = 1,2 \cdots p-1)$

D) $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1\,(i \neq j)$; jedoch: $a_{p-1p} = a_{pp-1} = 0$
$(i,j = 1,2 \cdots p)$.

Für $p = 2$ reduciren sich diese vier Systeme auf nur zwei: das System D) ist dann nicht mehr einfach und die Systeme B) und C) sind einander äquivalent.

Für besondere Werthe von p ist diesen allgemeinen Systemen ein specielles System hinzuzufügen, nämlich:

für $p = 2$: IIC), $a_{11} = a_{22} = -2$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = -1$;

für $p = 4$: IVE)[1]), $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1$, ausser $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = -2$;

für $p = 6, 7, 8$: E), $a_{ii} = -2$, $a_{ij} = -1$, ausser $a_{pp-1} = a_{pp-2} = a_{p-1p} = a_{p-2p} = 0$.

Natürlich giebt es für $p = 1$ nur ein System, nämlich: $a_{11} = -2$.

Alle diese Resultate können allerdings *nachträglich* verificirt werden, wenn man sich auf den Satz II stützt, denn sie sind richtig für $p = 2$.

§ 6.

Wir wollen jetzt das folgende Theorem beweisen:

Theorem VII. *Bezeichnet l den Rang einer einfachen Gruppe, so kann man immer l von einander unabhängige Wurzeln finden, derart dass alle anderen Wurzeln der charakteristischen Gleichung durch das zugehörige System der a_{ij} geliefert werden.*

Vorher wollen wir einige Hülfssätze beweisen.

Hülfssatz I. *Sind p Wurzeln $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ durch eine und nur eine Relation verbunden, die wirklich alle $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$*

1) Für $p = 4$ giebt KILLING *zwei* specielle Systeme an, die er mit IVE) und IVF) bezeichnet; aber jene zwei Systeme sind äquivalent, was einleuchtet, wenn man ω_1 und ω_3, ω_2 und ω_4 vertauscht (Z. v. G. II, p. 80).

enthält, so ist die Determinante der zugehörigen a_{ij} gleich Null und das System dieser a_{ij} einfach.

Der erste Theil des Satzes ist evident. Bemerken wir nun, dass nach den Theoremen IV und VI p Wurzeln von einander unabhängig sind, dann und nur dann, wenn die zugehörige Determinante der a_{ij} von Null verschieden ist. Demnach, wäre das betrachtete System $(1, 2 \cdots p)$ aus etwa zwei einfachen Systemen $(1, 2 \cdots h)$, $(h+1, \cdots p)$ gebildet, so wäre mindestens eine der diesen beiden Systemen zugehörigen Unterdeterminanten gleich Null, und in Folge dessen hätten wir eine Relation etwa zwischen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_h$, und diese Relation enthielte keine Wurzel $\omega_{h+1}, \ldots \omega_p$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. Der Satz ist daher bewiesen.

Hülfssatz II. *Bezeichnet Σ das System der a_{ij}, das den von einander unabhängigen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_l$ entspricht, so liefert das den l von einander unabhängigen Wurzeln*

$$\omega_1' = m_1\omega_1 + \cdots + m_l\omega_l, \quad \omega_2' = \omega_2 \cdots \omega_l' = \omega_l$$

zugehörige System Σ' der a'_{ij} alle durch Σ gelieferten Wurzeln, vorausgesetzt nur, dass ω_1 durch Σ' geliefert ist.

Dieser Hülfssatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes I (§ 5) und wird analog bewiesen. Es möge nämlich

$$\omega_1 = S'_{\alpha_1} S'_{\alpha_2} \cdots S'_{\alpha_p} \omega'_\alpha$$

$$(\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_p = 1, 2 \cdots l)$$

sein. Wenn

$$\omega_\lambda = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_h} \omega_i$$

eine durch Σ gelieferte Wurzel bezeichnet, so genügt es, ω_i durch ω_i' $(i \neq 1)$, ω_1 durch $S'_{\alpha_1} S'_{\alpha_2} \cdots S'_{\alpha_p} \omega'_\alpha$, S_j durch S_j' $(j \neq 1)$, S_1 durch $S'_{\alpha_1} S'_{\alpha_2} \cdots S'_{\alpha_p} S'_\alpha S'_{\alpha_p} \cdots S'_{\alpha_1}$ zu ersetzen, um eine Wurzel ω_λ' zu erhalten, die gleich ω_λ ist, was zu beweisen war.

Hülfssatz III. *Sind p Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ durch eine und nur eine Relation verbunden*

$$m_1\omega_1 + \cdots + m_p\omega_p = 0,$$

und ist das Product $m_1 m_2 \cdots m_p \neq 0$, so wird mindestens eine der p Wurzeln durch das den $p-1$ anderen Wurzeln zugehörige System der a_{ij} geliefert.

In der That, nach Hülfssatz I ist das ganze System der a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots p)$ einfach; dieses System (Satz II, § 5) enthält

daher mindestens ein einfaches Untersystem $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, das $(p-1)$ von einander unabhängigen Wurzeln entspricht. Es genügt dann, jedes der schon (in § 5) gefundenen einfachen Systeme $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu nehmen, etwa a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots p-1)$, und in allgemeinster Weise $2(p-1)$ ganze Zahlen a_{ip}, a_{pi} so zu bestimmen, dass die p-reihige Determinante der a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots p)$ gleich Null ist. Jeder Lösung des Problems entspricht eine Relation zwischen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$; es sind die Fälle auszuschliessen, in denen diese Relation nicht alle ω_i enthält, oder eine der Wurzeln als ein Vielfaches einer durch die $p-1$ anderen gelieferten Wurzel darstellbar ist (§ 3, Th. I, 2). Man verificirt nun, dass mindestens eine der p Wurzeln durch die $p-1$ andern geliefert ist. Die Rechnungen sind ganz analog denjenigen, die für die Bestimmung der einfachen Systeme dienen.

Jetzt kommen wir zum Beweise des fraglichen Theorems VII.

Es mögen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_l$ irgend welche l von einander unabhängige Wurzeln sein. Liefert das zugehörige System Σ der a_{ij} alle Wurzeln, so ist das Theorem bewiesen. Nehmen wir daher an, dass eine gewisse Wurzel ω_α durch dieses System nicht geliefert werde. Wir können dann immer setzen:

$$\omega_\alpha = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_p\omega_p$$
$$(p \leqq l, \quad m_1 m_2 \cdots m_p \neq 0).$$

Nach Hülfssatz III wird mindestens eine der $p+1$ Wurzeln $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_p, \omega_\alpha$ durch die p andern geliefert, etwa ω_1. Betrachten wir alsdann die l von einander unabhängigen Wurzeln:

$$\omega_1' = \omega_\alpha, \quad \omega_2' = \omega_2, \quad \cdots \omega_p' = \omega_p, \quad \cdots \omega_l' = \omega_l.$$

Es entspricht ihnen ein gewisses System Σ', und *die Wurzel ω_1 wird durch dieses System geliefert*; in Folge dessen wird nach Hülfssatz II jede durch Σ gelieferte Wurzel auch durch Σ' geliefert; wir sehen überdies, dass Σ' auch irgend eine gewisse Wurzel ω_α der charakteristischen Gleichung giebt. Indem wir so nach und nach fortfahren, erhalten wir ein System, das alle Wurzeln liefert.

Das Theorem ist also bewiesen.

Anmerkung. Der Beweis ist anwendbar für jede r-gliedrige perfecte Gruppe, bei welcher der Coefficient $\Psi_2(e)$ der charakteristischen Gleichung auf eine Summe von r von einander unabhängigen Quadraten reducibel ist.

§ 7.

Fassen wir jetzt kurz die Ergebnisse zusammen.

Bezeichnet G eine r-gliedrige perfecte Gruppe von der Beschaffenheit, dass der Coefficient $\Psi_2(e)$ ihrer charakteristischen Gleichung auf eine Summe von r unabhängigen Quadraten reducibel ist, so gehört jede allgemeine infinitesimale Transformation von G einer l-gliedrigen Untergruppe γ: $\eta_1 Y_1 f + \cdots + \eta_l Y_l f$ an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind, wobei l den Rang der Gruppe bezeichnet. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in Bezug auf die Untergruppe γ, etwa:

$$\omega_\alpha = \eta_1 \omega_\alpha^{(1)} + \cdots + \eta_l \omega_\alpha^{(l)}$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots),$$

sind einfach, und paarweise entgegengesetzt gleich; überdies kann man l solche von einander unabhängige Wurzeln ω_1, ω_2, $\ldots$ ω_l wählen, dass das zugehörige System Σ der a_{ij} alle andern liefert. Ein solches System Σ wollen wir ein *Hauptsystem* nennen.

Endlich verbinden wir mit jeder Wurzel ω_α zwei infinitesimale Transformationen, von denen die eine, etwa $Y_\alpha f$, der Untergruppe γ angehört, die andere, etwa $X_\alpha f$ von der Beschaffenheit ist, dass:

$$(\Sigma \eta_i Y_i, X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha f = \Sigma \eta_i \omega_\alpha^{(i)} X_\alpha f .$$

Es existiren zwischen $Y_\alpha f$, $X_\alpha f$ und $X_{\alpha'} f$ $(\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha)$ die Relationen:

$$Y_\alpha f = (X_\alpha X_{\alpha'}) ,$$
$$(Y_\alpha X_\alpha) = -2 X_\alpha f , \quad (Y_\alpha X_{\alpha'}) = 2 X_{\alpha'} f .$$

Die Transformationen $X_\alpha f$ sind alle von einander und von den $Y_i f$ unabhängig, während es unter den $Y_i f$ nur l, etwa $Y_1 f$, $Y_2 f$, $\ldots$ $Y_l f$, unabhängige giebt (und ferner ist $Y_{\alpha'} f = -Y_\alpha f$).

Ist endlich $\omega_\alpha + \omega_\beta$ gleich einer andern Wurzel ω_λ, so ist $(X_\alpha X_\beta) = c X_\lambda f$, $(c \neq 0)$.

Wir wollen jetzt das folgende Theorem beweisen:

Theorem VIII. *Ist das Hauptsystem Σ der a_{ij} einer so definirten Gruppe G einfach, so ist G einfach; ist Σ zusammengesetzt, so ist G aus mehreren einfachen invarianten, unter einander vertauschbaren Untergruppen zusammengesetzt* [1]).

---

1) Vgl. KILLING Z. v. G. II, § 16, und III, § 21.

Zunächst ein Hülfssatz:

Hülfssatz I. *Enthält eine invariante Untergruppe der Gruppe G eine infinitesimale Transformation von der Form*

$$\sum_1^l{}^i a_i Y_i f + \sum{}^\alpha \lambda_\alpha X_\alpha f,$$

so enthält sie auch $\Sigma a_i Y_i f$ und jedes $X_\alpha f$, für das λ_α verschieden von Null ist[1]).

Der Beweis bedarf keiner Ausführung.

Es möge alsdann g eine invariante Untergruppe von G sein. Enthält g eine infinitesimale Transformation $\Sigma \eta_i Y_i f$, so enthält sie mindestens eine der Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $\ldots X_l f$, denn mindestens eine der Grössen

$$\sum_1^l{}^\varrho \eta_\varrho \omega_i^{(\varrho)} = \sum{}^\varrho \eta_\varrho a_{i\varrho} \quad (i = 1, 2, \cdots l)$$

ist von Null verschieden. Wenn z. B. die Untergruppe g die infinitesimale Transformation $X_1 f$ enthält, so enthält sie auch $(X_1 X_{1'}) = Y_1 f$, ferner $(Y_1 X_{1'}) = 2 X_{1'} f$ und ebenso alle $X_\alpha f$, für die

$$(Y_1 X_\alpha) = a_{\alpha 1} X_\alpha f \neq 0$$

ist, d. h. alle $X_\alpha f$, für die $a_{\alpha 1} \neq 0$ ist. Wenn also die ganzen Zahlen a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots h)$ das kleinste System σ bilden, das die Marke 1 umfasst, so enthält g alle $X_\alpha f$ und $Y_\alpha f$, für welche ω_α von der Form

$$\omega_\alpha = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \cdots + m_h \omega_h$$

ist. Wenn also das System Σ einfach ist, so ist G einfach; wenn im Gegentheil Σ aus einer gewissen Anzahl einfacher Untersysteme zusammengesetzt ist, so enthält G eben so viele invariante Untergruppen, und man sieht unmittelbar, dass diese Untergruppen keine gemeinsamen Transformationen besitzen und mit einander vertauschbar sind.

Wir haben angenommen, dass jede invariante Untergruppe g eine Transformation von der Form $\Sigma \eta_i Y_i f$ enthält; aber wenn dem nicht so wäre, so enthielte g nach dem Hülfssatze mindestens eine Transformation $X_\alpha f$ und auch $(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha f$, was zu einem Widerspruche führt.

1) Vgl. KILLING Z. v. G. III, § 21.

Das Theorem VIII ist also bewiesen.

Suchen wir alle einfachen Gruppen vom Range l, so genügt es daher, für jedes mögliche einfache System l^{ter} Ordnung Σ zu untersuchen, ob eine Gruppe existirt, die Σ als Hauptsystem zulässt.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass jedem einfachen System eine und nur eine Gruppe entspricht, so haben wir das wichtige

Theorem IX. *Die Anzahl der einfachen Gruppen vom Range l ist endlich, und zwar im Allgemeinen gleich vier. Sie ist gleich*

$$\begin{aligned} &1 \text{ für } l = 1, \\ &3 \text{ für } l = 2, \\ &5 \text{ für } l = 4, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

§ 8.

Wir müssen also jetzt alle einfachen nichtäquivalenten Systeme l^{ter} Ordnung nach einander betrachten, und zeigen, dass einem jeden dieser Systeme Σ eine und nur eine Gruppe entspricht, die Σ als Hauptsystem zulässt. Ueberdies haben wir die Zusammensetzung dieser Gruppe zu bestimmen.

Es möge Σ irgend eines der in § 5 angezeigten einfachen Systeme l^{ter} Ordnung sein. Wir berechnen alle durch dieses System gelieferten Wurzeln, etwa

$$\pm\omega_1, \quad \pm\omega_2, \quad \cdots \pm\omega_l, \quad \cdots$$

Jeder dieser Wurzeln ω_α entspricht eine Transformation $X_\alpha f$ und diesen Transformationen $X_\alpha f$ fügen wir l paarweis vertauschbare Transformationen $Y_1 f \ldots Y_l f$ hinzu. Wir können überdies immer annehmen, dass die folgenden Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} (Y_i X_\alpha) &= a_{\alpha i} X_\alpha f, \\ (X_i X_{i'}) &= Y_i f \quad (i = 1, 2, \cdots l), \end{aligned}$$

und wenn

$$\omega_\alpha = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_h} \omega_i$$

ist, auch

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha f = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_h} Y_i f$$

ist, wobei zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned} S_i \omega_k &= \omega_k + a_{ki} \omega_i, \\ S_i Y_k f &= Y_k f + a_{ik} Y_i f. \end{aligned}$$

Wir haben nun die Coefficienten $c_{\alpha\beta\gamma}$ in den Relationen

$$(X_\alpha X_\beta) = c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma f$$

nur in den Fällen zu berechnen, in denen $\omega_\alpha + \omega_\beta$ gleich einer andern Wurzel ω_γ ist. Wir können überdies diese Coefficienten normiren, indem wir $X_\alpha f$ durch $\lambda_\alpha X_\alpha f$, ebenso $X_{\alpha'} f$ durch $\lambda_{\alpha'} X_{\alpha'} f$ ersetzen, wobei $\lambda_\alpha \lambda_{\alpha'} = 1$ ist. Die Gleichungen, welche die $c_{\alpha\beta\gamma}$ bestimmen, erhält man durch Benutzung der Identitäten:

$$((X_\alpha X_\beta) X_\lambda) + ((X_\beta X_\lambda) X_\alpha) + ((X_\lambda X_\alpha) X_\beta) = 0 ,$$

für den Fall, dass $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\lambda$ gleich Null oder gleich einer Wurzel ω_μ ist.

Die Rechnungen werden symmetrischer, wenn man den durch Σ gelieferten Wurzeln gewisse canonische Formen giebt, die Killing, wenigstens für die Systeme A, B, C, D, IIC, IVE, aufgestellt hat. Man findet so, dass jedem einfachen System eine und nur eine Gruppe entspricht. Wir wollen jetzt diese Gruppen nach einander genau betrachten.

Für die *vier* allgemeinen Systeme A), B), C) und D) erhält man schon längst bekannte Gruppen [1]). Es sind:

A) die $l(l+2)$-gliedrigen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_l;

B) die $l(2l+1)$-gliedrigen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im R_{2l}, also auch mit der grössten Gruppe von conformen Transformationen im R_{2l-1};

C) die $l(2l+1)$-gliedrigen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der allgemeinen projectiven Gruppe eines linearen Complexes im R_{2l-1}, also auch mit der Gruppe von Berührungstransformationen im R_l:

$$\sqrt{p_i p_k},\ x_i \sqrt{p_i p_k},\ x_i x_k \sqrt{p_i p_k} ;$$

(für $l = 2$ sind die Gruppen B) und C) gleichzusammengesetzt);

D) die $l(2l-1)$-gliedrigen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im R_{2l-1}, also auch mit der grössten Gruppe von conformen Transformationen im R_{2l-2} $(l > 2)$.

---

1) Vgl. Killing Z. v. G. II, § 17.

Wir finden also die vier grossen Classen von einfachen Gruppen, die LIE längst angegeben hat.

Die speciellen einfachen Gruppen. Es giebt, wie schon gesagt, nur *fünf* specielle einfache nicht gleichzusammengesetzte Gruppen, die resp. den Systemen II C), IV E), VI E), VII E), VIII E) entsprechen.

Das System II C liefert 14-gliedrige Gruppen von einer bestimmten Zusammensetzung, die KILLING schon vollständig gegeben hat[1]). Herr ENGEL und ich haben überdies gleichzeitig[2]) zwei Gruppen gegeben, die diese Zusammensetzung besitzen. Ich will daher auf diese Gruppen nicht näher eingehen.

Dem System IV E entspricht eine 52-gliedrige Zusammensetzung. Die Wurzeln können, wie KILLING gezeigt hat, in folgender Weise geschrieben werden:

$$\pm\omega_i\,,\quad \pm\omega_i\pm\omega_k\,,\quad \frac{(\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4)}{2}\,,$$
$$(i\neq k;\quad i,k=1,2,3,4)\,,$$

mit den entsprechenden Transformationen Yf:

$$\pm Y_i f\,,\quad \frac{\pm Y_i f\pm Y_k f}{2}\,,\quad \frac{\pm Y_1 f\pm Y_2 f\pm Y_3 f\pm Y_4 f}{2}\,,$$

oder auch wie folgt:

$$\pm\varpi_i\,,\quad \frac{\pm\varpi_i\pm\varpi_k}{2}\,,\quad \frac{\pm\varpi_1\pm\varpi_2\pm\varpi_3\pm\varpi_4}{2}\,,$$

mit

$$\pm\bar{Y}_i f\,,\quad \pm\bar{Y}_i f\pm\bar{Y}_k f\,,\quad \frac{\pm\bar{Y}_1 f\pm\bar{Y}_2 f\pm\bar{Y}_3 f\pm\bar{Y}_4 f}{2}\,.$$

Ich schreibe die vollständige Zusammensetzung nicht hin. Ich habe zwei Gruppen gefunden, welche diese Zusammensetzung besitzen. Die erste ist eine gewisse Berührungstransformationsgruppe im R_6. Die andere ist eine Gruppe des R_{15}, welche ein System von sieben PFAFF'schen Gleichungen invariant lässt. Bezeichnen $z, x_i, y_i, x_{ij}=-x_{ji}$ $(i\neq j;\ i,j=1,2,3,4)$ die 15 Veränderlichen im R_{15}, so lautet das PFAFF'sche System:

$$dz=\sum_1^4{}_\varrho\, y_\varrho\, dx_\varrho\,,$$
$$dx_{ij}=x_i\,dx_j-x_j\,dx_i+y_h\,dy_k-y_k\,dy_h\,,$$

1) KILLING Z. v. G. II, § 18, p. 44. 2) C. R. t. CXVI, loc. cit.

wobei $ijhk$ eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet.

Den Systemen VI E, VII E entspricht eine 78-gliedrige und eine 133-gliedrige Zusammensetzung. Die Wurzeln können in folgender Weise geschrieben werden:

$$\omega_i - \omega_k,\ \pm(\omega_i+\omega_k+\omega_h),\ \pm(\omega_i+\omega_k+\omega_h+\omega_\lambda+\omega_\mu+\omega_\nu)$$

mit

$$Y_if - Y_kf,\ \pm(Y_if+Y_kf+Y_hf),$$
$$\pm(Y_if+Y_kf+Y_hf+Y_\lambda f+Y_\mu f+Y_\nu f),$$

wobei die Indices alle verschieden sind und die Werthe $1, 2, \dots l$ annehmen können.

Die infinitesimalen Transformationen können in folgender Weise bezeichnet werden:

1) *wenn* $l = 6$ *ist*:

$X_{ii}f = Y_if$ $(i = 0, 1, \cdots 6)$ mit $X_{11}f + \cdots + X_{66}f + 3X_{00}f = 0$,
$X_{ik}f$ $(i \neq k;\ i, k = 1, 2 \cdots 6)$,
$X_{000}f$, $X'_{000}f$,
$X_{ikh}f$, $X'_{ikh}f$ $(i \neq k \neq h;\ i, k, h = 1, 2, \cdots 6)$,
wenn man noch $X_{ikh}f = -X_{ihk}f = -X_{kih}f$ annimmt;

2) *wenn* $l = 7$ *ist*:

$X_{ii}f = Y_if$ $(i = 0, 1, \cdots 7)$ mit $X_{11}f + \cdots + X_{77}f + 2X_{00}f = 0$,
$X_{ik}f$ $(i \neq k;\ i, k = 1, 2, \cdots 7)$,
$X_{i00}f$, $X'_{i00}f$ $(i = 1, 2, \cdots 7)$,
$X_{ikh}f$, $X'_{ikh}f$ $(i \neq k \neq h;\ i, k, h = 1, 2, \cdots 7)$,
wenn man ebenfalls $X_{ikh}f = -X_{ihk}f = -X_{kih}f$ annimmt.

Man hat alsdann als einzige nicht verschwindende Klammerausdrücke diese:

$$(X_{ij}\,X_{jk}) = X_{ik}f, \qquad (X_{ij}\,X_{ji}) = X_{ii}f - X_{jj}f,$$
$$(X_{ii}\,X_{ijk}) = \tfrac{2}{3}X_{ijk}f, \qquad (X_{ii}\,X_{jkh}) = -\tfrac{1}{3}X_{jkh}f,$$
$$(X_{ii}\,X'_{ijh}) = -\tfrac{2}{3}X'_{ijk}f, \qquad (X_{ii}\,X'_{jkh}) = \tfrac{1}{3}X'_{jkh}f,$$
$$(X_{ij}\,X_{jkh}) = X_{ikh}f, \qquad (X_{ij}\,X'_{ikh}) = -X'_{jkh}f,$$
$$(X_{ijk}\,X'_{ijk}) = X_{ii}f + X_{jj}f + X_{kk}f,$$
$$(X_{ijk}\,X'_{hjk}) = X_{ih}f,$$
$$(X_{ijk}\,X_{\lambda\mu\nu}) = -(ijk\lambda\mu\nu\varrho\sigma\tau)\,X'_{\varrho\sigma\tau}f,$$
$$(X'_{ijk}\,X'_{\lambda\mu\nu}) = +(ijk\lambda\mu\nu\varrho\sigma\tau)\,X_{\varrho\sigma\tau}f.$$

In diesen Formeln bedeuten ϱ, σ, τ die drei Zahlen, welche mit $i, j, k, \lambda, \mu, \nu$ die Permutation 1 2 3 4 5 6 0 0 0, wenn $l = 6$ ist, oder 1 2 3 4 5 6 7 0 0, wenn $l = 7$ ist, vervollständigen. Ueberdies ist $(\alpha\beta \ldots \lambda) = 1$ oder -1, je nachdem das Product $(\alpha - \beta) \ldots (\alpha - \lambda) \ldots (\varkappa - \lambda)$ positiv oder negativ ist.

Für das System VIII E erhält man ganz analoge Resultate; man muss den Wurzeln

$$\omega_i - \omega_k, \quad \pm(\omega_i + \omega_k + \omega_h), \quad \pm(\omega_i + \omega_k + \omega_h + \omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu)$$

die folgenden hinzufügen:

$$\pm\left(\omega_i + \sum_1^8{}_\varrho\, \omega_\varrho\right)$$

$$(i, k, h, \cdots = 1, 2, \cdots 8).$$

Man erhält eine 248-gliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformationen in folgender Weise bezeichnet werden können:

$$X_{ii}f \quad (i = 0, 1, \cdots 8) \text{ mit } X_{00}f + X_{11}f + \cdots + X_{88}f = 0,$$

$$X_{ik}f \quad (i \neq k;\ i, k = 0, 1, 2, \cdots 8),$$

$$X_{ikh}f, \quad X'_{ikh}f \quad (i \neq k \neq h;\ i, k, h = 0, 1, 2, \cdots 8),$$

wobei $X_{ikh}f = -X_{ihk}f = -X_{kih}f$ anzunehmen ist. Die schon geschriebenen Formeln, welche die Zusammensetzungen der 78- und 133-gliedrigen Gruppen bestimmen, dienen auch für die Zusammensetzung der 248-gliedrigen Gruppe. Hier bezeichnet $ijk\lambda\mu\nu\varrho\sigma\tau$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, 1, 2, \ldots 7, 8$.

Ich habe eine einfache G_{78} im R_{16} und eine G_{133} im R_{27} gefunden. Die G_{78} enthält die 16 infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung, $p_1, \ldots p_{16}$, 16 homogene Transformationen erster Ordnung und 16 homogene Transformationen zweiter Ordnung. Die G_{133} enthält die 27 Transformationen nullter Ordnung $p_1, \ldots p_{27}$, 79 homogene Transformationen erster Ordnung, und 27 homogene Transformationen zweiter Ordnung.

Endlich habe ich eine einfache 248-gliedrige Berührungstransformationsgruppe G_{248} im R_{29} gefunden.

Diese drei Gruppen sind ihre eigenen dualistischen Gruppen.

Die fünf speciellen einfachen Gruppen mit 14 bez. 52, 78, 133, 248 Parametern können in weniger als 5 bez. 15, 16, 27, 57 Veränderlichen nicht existiren.

SITZUNG VOM 3. JULI 1893.

Professor **Pfeffer** spricht, auf Grund der von Herrn Barthold Hansteen im botanischen Institut ausgeführten Untersuchungen, *über die Ursachen der Entleerung der Reservestoffe aus Samen.*

Allgemein arbeitet die Pflanze in der Art regulatorisch, dass bei der Entleerung von gespeicherten Reservestoffen der Consum oder die Fortführung der diosmirenden Producte eine Bedingung für die Continuität der auf die Entleerung berechneten Processe ist, dass demgemäss diese Entleerung unterbleibt, wenn die nöthige Bedingung nicht realisirt ist [1]).

Dieses Princip ist ebenso bei dem Keimungsprocess der Samen ausgesprochen, gleichviel ob die Reservestoffe in den Cotyledonen aufgespeichert oder aus dem Endosperm in die Keimpflanze überzuführen sind. Dieser letztere Fall bietet aber für ein Studium der Causalverhältnisse den entschiedenen Vortheil, dass alle diejenigen Wechselwirkungen zwischen Keimpflanze und Nährgewebe ausgeschlossen sind, welche eine Continuität des lebendigen Protoplasten fordern. Dabei besteht aber eine Wechselbeziehung jedenfalls, da die Entleerung des Endosperms von der Fortentwicklung der Keimpflanze abhängig ist. Indess setzt ein solches Verhältniss keine Secretion von Enzymen u. s. w. von Seite des Embryos voraus, da die mangelnde Fortführung der selbstthätig erzeugten Reactionsproducte vollständig ausreichen kann, um zu bewirken, dass die angestrebte,

---

1) Vgl. Pfeffer, Physiologie Bd. I. p. 56, 334.

aber regulatorisch gelenkte Reaction einen auffälligen Erfolg nicht erzielt. In der That ist diese Beziehung z. B. in dem Endosperm der Gramineen geboten, und dem entsprechend kommt es zum Auswandern der Stärke aus dem isolirten Endosperm, wenn für dauernde Abfuhr des Zuckers gesorgt wird, dessen Gegenwart eben die Weiterbildung dieses Stoffes aus Stärke verhindert.

Um diese Bedingung herzustellen wurde dem isolirten Endosperm von Zea mais oder Hordeum vulgare Gips derart angegossen, dass die erstarrte Masse an Stelle des Schildchens dem Endosperm angeschmiegt war. Dieses lag nunmehr dem Scheitel eines Gipssäulchens auf, welches mit der Basis entweder in einer relativ sehr grossen oder in einer minimalen Wassermenge stand. Durch geeignetes Sterilisiren wurde erreicht, dass an den im dampfgesättigten Raum gehaltenen Präparaten, selbst im Verlauf einiger Wochen, weder Bacterien noch Schimmelpilze auftraten.

In den Versuchen mit viel Wasser schritt die Lösung der Stärke, von dem Gipsschildchen beginnend, in normaler Weise fort. Schon nach 10 bis 13 Tagen hatten die dem Schildchen näheren Zelllagen die gesammte, die fernsten Zelllagen des Endosperms aber den grössten Theil der Stärke verloren und die noch vorhandenen Körner waren in üblicher Weise angefressen. Inzwischen war der Zucker durch die Gipssäule in das Wasser gelangt und bei der grossen Menge dieses dauernd abgeleitet worden. Nach dem Abdampfen auf ein kleines Volumen ergab sich für das Wasser ein im Verhältniss zu den angewandten Endospermen sehr ansehnlicher Gehalt an Glucose (d. h. einer Kupferoxyd reducirenden Zuckerart).

Bei nur geringer Wassermenge kam es zu keiner Entleerung, und höchstens in den dem Gipsschildchen nächsten Zellen machte sich eine gewisse Corrosion an einzelnen Stärkekörnchen bemerklich. Da alle übrigen Versuchsbedingungen dieselben waren, so geht aus diesen Erfahrungen mit aller Evidenz hervor, dass mit der Ansammlung einer gewissen Zuckermenge in dem Wasser der fernere Umsatz von Stärke in Glucose gehemmt wird. Deshalb kommt es in dem isolirten Endosperm, und ebenso in dem, welches auf ein sehr kleines Gipssäulchen aufgesetzt und mit einer sehr geringen Wassermasse in Berührung ist, zu keinem merklichen oder nennenswerthen Stärkeumsatz, da

schon ziemlich geringe Concentration der Zuckerlösung ausreicht, um die Fortbildung von Glucose zu sistiren.

Zu solcher activen und regulatorischen Thätigkeit ist das isolirte Endosperm befähigt und es bedarf keiner Einwirkung, durch Secrete oder auf andere Weise, von Seiten des Embryos, um die volle Entleerung des Endosperms zu erzielen. Denn beim Keimen des intacten Samens wird der Zucker durch das Schildchen der wachsenden Pflanze zugeleitet, die durch den Stoffverbrauch die Fortführung der Glucose und damit die Continuität des Stärkeumsatzes im Endosperm nothwendig herbeiführen muss. Diese Entleerung ist auch keineswegs in der sich entwickelnden Keimpflanze beschleunigt, ja thatsächlich geht jene, bei gleicher Temperatur, in der normalen Keimung langsamer von statten, als in unseren Gipsversuchen.

Ist somit für die Entleerung des Endosperms die Secretion von Diastase durch das Schildchen des Embryos nicht nothwendig, so ist die Fähigkeit zu solcher Secretion thatsächlich vorhanden. Bringt man nämlich an Stelle des Endosperms einen ähnlich geformten Guss aus viel Stärke und wenig Gips, so schreitet von dem Schildchen aus die Corrosion der Stärkekörner sehr energisch weiter und die Keimpflanze gewinnt jetzt durch ihre secretorische Thätigkeit die in dem todten Endospermersatz gebildete Glucose. In dem isolirt gehaltenen Endospermersatz bleibt, auch in Berührung mit viel Wasser, die Stärke völlig unverändert, und da Bacterien und Pilze gänzlich ausgeschlossen waren[1]) so ist demgemäss die Secretion von Diastase aus dem Schildchen völlig sicher gestellt[2]). Fraglich bleibt nur, ob diese Diastaseausscheidung auch bei normaler Entwickelung der Keimpflanzen mitwirkt, oder ob — was sehr möglich ist — ein solches Verhältniss vorliegt, dass der Mangel des Stärkeumsatzes, resp. das Fehlen des Zuckerzuflusses von dem Endo-

---

1) In welcher Weise die Stärke ohne Erhitzen sterilisirt wurde, wird in der ausführlichen Arbeit berichtet werden.

2) Ueber diese streitige Frage vgl. Krabbe, Jahrb. f. wiss. Bot. 1890, Bd. 21, 598; Gaüss, Berichte d. bot. Gesellschaft 1893, p. 286. — So gut wie das Auswandern kann natürlich auch Aufnahme von Diastase stattfinden, wie denn überhaupt die Wanderung von Colloiden keineswegs unmöglich ist. Speciell der Protoplasmakörper vermag Stoffe von beliebiger Molekulargrösse aufzunehmen, vgl. Pfeffer, Zur Kenntnis d. Plasmahaut und der Vacuolen 1890, p. 279.

spermersatz den Reizanstoss abgiebt, welcher die Ausscheidung von Diastase veranlasst.

In dem Endosperm ist aber nicht, wie es HABERLANDT[1]) ohne einen stichhaltigen Grund annimmt, die Kleberschicht das speciell Diastase secernirende Gewebe. Denn nach dem Abschälen dieser Kleberschicht, mitsammt dem anstossenden Gewebe, entleert der dem Gipscylinder aufgesetzte Endospermrest die Stärke in vortrefflicher Weise, sofern durch viel Wasser für Abfuhr der Glucose gesorgt ist. Demgemäss ist der Stärkeumsatz auch nicht an einen von dem Schildchen oder von der Kleberschicht ausgehenden Reizanstoss gekettet. Und da gar nichts auf eine Arbeitstheilung in diesen inneren, sämmtlich Stärke führenden Endospermzellen hindeutet, so ist wohl kein Zweifel, dass jede einzelne dieser lebenden Zellen die Fähigkeit besitzt, die Stärke in Glucose zu verwandeln und diese Verwandlung in der besagten regulatorischen Weise durchzuführen.

Die von dem lebenden Schildchen und ebenso von dem Gipse aus fortschreitende Stärkelösung wird vielleicht allein durch die nach dieser Seite hin zielende Abführung des Zuckers bedingt, doch ist nicht ausgeschlossen, dass bis zu einem gewissen Grade anderweitige Wirkungen der Zellen aufeinander mit betheiligt sind. Jedenfalls setzt sich aber dieser Lösungsmodus in gleicher Weise von dem lebenden, wie von dem Gips-Schildchen aus fort. Analog rückt die Stärkelösung von der dem Schildchen gegenüber liegenden Seite vor, wenn an diese, nach entsprechender Freilegung, der abführende Gipsguss angesetzt ist. Allein von diesem Punkte aus geschieht solches, wenn der Keimling entfernt war, während bei dessen Gegenwart die Lösung von zwei Seiten vorrückt und so der durch den Gips abgeführte Theil der Glucose der sich entwickelnden Keimpflanze entzogen wird.

Die normale Entleerung des Endosperms ist nach Obigem an den Consum von Zucker in der Keimpflanze geknüpft. Demgemäss wird in der That die Stärkeauflösung auf ein sehr geringes Maass reducirt, wenn man nach dem Ankeimen so eingipst, dass das Schildchen die normale Lage behält, das Fortwachsen von Wurzel, Stengel und Blättern aber mechanisch gehemmt und eine Ableitung durch den Gips ausgeschlossen ist. Der Consum

1) Berichte d. botan. Gesellschaft 1890, p. 40.

in der Athmung des kleinen Keimlings nimmt eben nur sehr wenig Zucker in Anspruch, während in der wachsenden Keimpflanze für dauernde Entführung des Zuckers gut gesorgt ist.

Aller Voraussicht nach werden für die Auswanderung der Stärke aus dem Endosperm anderer Pflanzen ähnliche Verhältnisse obwalten. Ebenso ist wahrscheinlich, dass für andere Reservestoffe principiell Aehnliches gilt, ohne dass die Möglichkeit besonderer Verhältnisse geleugnet werden soll.

Nach bisherigen Erfahrungen wird z. B. bei Tetragonolobus purpureus durch die Gipsmethode die Entleerung der Reservecellulose erreicht. Ebenso gelingt vielleicht auf diese Weise die in Bezug auf die Vermittlung noch näher zu studirende Entleerung des fetten Oeles aus dem Endosperm von Pinus pinea. Zweifellos kommt es so auch zur Entleerung von Eiweissstoffen und die mit ihrer Schnittfläche auf Gips gesetzten Samenlappen von Lupinus ergaben, dass Asparagin in das Wasser reichlich übertrat, d. h. derjenige Körper, welcher in dieser Pflanze in dem Transport der Eiweissstoffe eine hervorragende Rolle spielt. Bei dieser Gelegenheit sei daran erinnert, dass die Anhäufung von Asparagin, Zucker u. s. w. in der Keimpflanze noch nicht die dauernde Abführung aus dem Endosperm oder den Cotyledonen ausschliesst. Denn diese Entziehung, d. h. die Bedingung für die Continuität, ist Thatsache, sobald die Körper in irgend einer Weise in der Pflanze gespeichert werden und solche Speicherung wird damit erwiesen, dass der Wurzel Asparagin, Zucker u. s. w. durch Wasser nicht entzogen werden.

Die schon erwähnten Beispiele zeigen, dass auch die Entleerung der Samenlappen in gleicher Weise geregelt sein kann. Wie weit indess keine weiteren Momente hinzukommen, muss für die Cotyledonen (und ebenso für die Erklärung anderer Reservestoffbehälter) von Fall zu Fall entschieden werden, da bei der lebendigen Continuität der Glieder derselben Pflanze besondere Wechselbeziehungen und Reizwirkungen mehr oder weniger mitspielen können.

Welche besonderen Verhältnisse im Einzelnen durch fernere Studien aufgedeckt werden mögen, soviel ist jedenfalls gewiss, dass das Endosperm auch da activ den für die Entleerung entscheidenden Stoffwechsel besorgen kann, wo im isolirten Zustand (bei Mangel der Ableitung) eine Stoffmetamorphose nicht deutlich hervortritt. Es ist deshalb auch nicht zulässig, auf dieses

Symptom hin mit VAN TIEGHEM[1]) zwischen activem und inactivem Endosperm zu unterscheiden. Uebrigens ist einleuchtend, dass eine geringe Stärkebildung in einem ölhaltigen Endosperm leichter bemerkt wird, als eine geringe Zuckerbildung und dass ferner in den etwas wachsenden isolirten Endospermen eben durch dieses Wachsen die Ursache eines gewissen Stoffconsums gegeben ist.

Die hier besprochene Entleerung schliesst sich also, wie schon einleitend bemerkt wurde, ganz dem in der Stoffwanderung uns allgemein entgegentretenden Regulationsprincip an, und zwar konnten wir als Ursache dieser Regulation in diesem Falle nachweisen, dass die Ansammlung des einen Reactionsproductes bis zu einem gewissen Grenzwerth die weitere Production dieses Stoffes und damit die Fortführung der Umsetzung hemmt. Dem Wesen der Sache nach entspricht dieses dem allgemeinen Princip der sog. Massenwirkung, deren hohe und immer noch nicht gebührend gewürdigte Bedeutung für den gesammten Stoffumsatz im Organismus ich an verschiedenen Stellen hervorhob[2]). Bei solcher Gelegenheit habe ich ferner auseinandergesetzt, wie und warum in den Zellen besondere Bedingungen schon deshalb geboten sind, weil die diosmotische Entfernung eines Reactionsproductes von den gelöst in der Zelle zurückbleibenden Körpern und in dieser Weise die Continuität der Reaction möglich ist.

In Hinsicht auf die zunächst massgebenden Factoren können wir auch in unserem Falle vollständig mit der Hemmung der Reaction durch eines der Producte und der Fortführung der Umsetzung, bei diosmotischer Entfernung des fraglichen Productes, als Thatsachen rechnen. Dabei ist aber zunächst ganz unbestimmt gelassen, in welcher Weise die regulatorische Hemmung zu Stande kommt und in dieser Hinsicht können in dem Organismus und ebenso in der einzelnen lebenden Zelle verwickelte Verhältnisse vorliegen. Denn es kommt nun auch die Gesammtheit der mit der Stoffproduction zusammenhängenden nd ebenso der durch Reizverkettungen oder in anderer Weise regulatorisch gelenkten Thätigkeiten des Organismus in Betracht.

---

1) PFEFFER, Physiologie Bd. I, p. 341.

2) Osmotische Untersuchungen 1877, p. 163; Physiologie 1881, Bd. I, p. 343; Unters. a. d. bot. Institut in Tübingen 1886, Bd. II, p. 293.

Es genügt hier daran zu erinnern, wie jede Sistirung des Wachsens durch Verminderung des Stoffconsums wirkt, und wenn z. B. die Alkoholgährung aufhört, nachdem die Flüssigkeit einen gewissen Gehalt an Alkohol erreichte, so liegt hier keine einfache chemische Reaction, sondern ein Erfolg vor, welcher daraus resultirte, dass die Gesammtthätigkeit der lebendigen Hefezelle in andere Bahnen gelenkt wurde.

Anderseits vermochte ich in der diosmotischen Entfernung gespeicherter Anilinfarben ein Beispiel zu demonstriren, in welchem eine besondere vitale Thätigkeit unmittelbar nicht mitspielt, da die Production einer gewissen Säuremenge genügt, um, im Verein mit der Exosmose des Productes, durch die partielle Reaction die totale Umsetzung zu erzielen. In einem solchen Sinne könnte unter Umständen auch Diastase oder ein anderes Enzym wirksam sein, doch ist nicht zu vergessen, dass die Production der Diastase (und ebenso der Säure im Experimente mit den Anilinfarben) regulatorisch in der Zelle gelenkt wird. Ferner besitzt der Protoplasmakörper z. B. die Fähigkeit seine diosmotischen Eigenschaften zu modificiren, und wenn etwa mit solcher Veränderung die weitere Entfernung des Reactionsproductes sistirt wird, so muss deshalb die ganze von dieser Entfernung abhängige Zersetzung zum Stillstand kommen.

Diese und ähnliche Erwägungen lassen keinen Zweifel, dass das regulatorisch geleitete Auswandern von Stoffen sich als Erfolg aus verschiedenen Combinationen ergeben kann und dieses auch dann noch, wenn, wie in unserem Falle, das eine Reactionsproduct, die Glucose, fortwährend zu diosmiren vermag.

Insbesondere ist auch die reale Production von Glucose in causaler Hinsicht mehrdeutig und aus der nackten Thatsache dieser Production ist nicht zu entnehmen, ob der Stärkeumsatz mit oder ohne Diastase vermittelt wurde. Zwar ist die Bildung und Secretion von Diastase Thatsache, doch folgt daraus nicht, dass diese auch innerhalb des Protoplasmaorgans dienstbar ist. Ja es wäre biologisch sehr wohl verständlich, wenn Diastase (oder andere Enzyme) in der Pflanze speciell da nutzbar gemacht würde, wo es sich um Actionen ausserhalb des Protoplasmakörpers dreht. Denn es kann doch nicht Wunder nehmen, wenn der Protoplasmakörper in seinem eignen Innern sich des Hilfsmittels und Umwegs der Diastase nicht bedient, die doch ebenfalls in noch unerkannten internen Umlagerungen erzeugt werden muss.

Anderseits ist das Verhalten der Endosperme mit diastatischem Umsatz der Stärke vereinbar. Denn einmal wird die Diastase nachweislich in concreten Fällen regulatorisch von dem Organismus producirt und zudem hemmen die Reactionsproducte den ferneren Umsatz durch Enzyme[1]). Ein näheres Studium dieser Hemmung unter den in der Zelle gebotenen Bedingungen dürfte in der That, unter Erwägung aller obwaltenden Verhältnisse, eine definitive Beantwortung der Frage gestatten, ob in diesem speciellen Falle die Umwandlung der Stärke mit oder ohne Diastase ausgeführt wird. In jedem Falle ist aber die diastatische Wirkung keine umkehrbare Reaction, d. h. die Anhäufung von Glucose führt nicht durch Rückbildung von Stärke zu einem Gleichgewichtszustand. Wo also durch die Zugabe von Glucose nicht nur die fernere Production von Glucose unterdrückt, sondern auch Veranlassung zur Regeneration von Stärke gegeben ist, wird diese in einem besonderen Process gebildet und der Gleichgewichtszustand ist das Resultat zweier sich gleichzeitig abspielender, aber specifisch verschiedener Reactionen. Dagegen ergiebt sich z. B. als einfache Folge der Umkehrung, dass mit Neuzufuhr von Methylenblau die Menge des in einer Zelle gespeicherten gerbsauren Methylenblaus zunimmt, wenn gleichzeitig durch das Vorhandensein von Säure die Bedingungen dafür gegeben sind, dass die ganze Farbstoffmenge exosmiren würde, wenn das umgebende Wasser frei von Methylenblau wäre[2]).

---

1) Vgl. TAMMAN, Zeitschrift f. physikalische Chemie 1889, Bd. III, p. 32.

2) PFEFFER, Unters. a. d. botan. Institut in Tübingen 1886, Bd. II, p. 286.

INHALT.

Seite

W. Pfeffer berichtete über Untersuchungen des Herrn Dr. MIYOSHI aus Tokio, betreffend die chemotropischen Bewegungen von Pilzfäden 319

R. Leukart, Ueber den Infundibularapparat der Hirudineen. 325

P. Stäckel, Ueber dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine infinitesimale Transformation gestatten. Vorgelegt von Herrn LIE 331

Sophus Lie, Ueber Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen 341

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. II. . . 349

F. Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. VIII. . . 360

Sophus Lie, Ueber die Gruppe der Bewegungen und ihre Differentialinvarianten 370

A. Mayer, Ueber die unfreie Bewegung eines materiellen Punktes unter Berücksichtigung der Reibung 379

Elie Cartan, Ueber die einfachen Transformationsgruppen. Vorgelegt von Herrn LIE 395

W. Pfeffer spricht, auf Grund der von Herrn BARTHOLD HANSTEEN im botanischen Institut ausgeführten Untersuchungen, über die Ursachen der Entleerung der Reservestoffe aus Samen 421

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

SITZUNG VOM 3. JULI 1893.

C. Neumann, *Zur Theorie des Magnetismus. Vorläufige Mittheilung.*

Sind beliebig viele magnetische Körper $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, die *ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs* zu berechnen, welche alle diese Körper zusammengenommen auf einen derselben z. B. auf $\mathfrak{M}$ ausüben.

Auf Grund gewisser Vorstellungen, die im Wesentlichen mit den Poisson'schen übereinstimmen, ist es mir gelungen, diese Aufgabe zu lösen. Und zwar habe ich gefunden, dass die in Rede stehenden Kräfte *erstens* in solche zerfallen, die auf alle *Volumelemente* $d\tau$ des Körpers $\mathfrak{M}$ einwirken, und zweitens in solche, die speciell auf seine *Oberflächenelemente* $d\sigma$ ausgeübt werden.

Bezeichnet man diese Kräfte respective mit

$$A d\tau,\ B d\tau,\ C d\tau \quad \text{und} \quad \overline{A} d\sigma,\ \overline{B} d\sigma,\ \overline{C} d\sigma,$$

so haben z. B. $A d\tau$ und $\overline{A} d\sigma$ nach meiner Rechnung folgende Werthe:

$$(1) \qquad A d\tau = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\beta + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}\gamma\right) d\tau,$$

$$(2) \qquad \overline{A} d\sigma = -2\pi[\alpha\cos(n,x) + \beta\cos(n,y) + \gamma\cos(n,z)]^2 \cos(n,x)\, d\sigma.$$

Dabei bezeichnen α, β, γ die auf die Volumeinheit bezogenen magnetischen Momente respective an den Stellen $d\tau$ und $d\sigma$. Ferner bezeichnet in (1) (x, y, z) irgend einen Punkt des Elementes $d\tau$, und $\Phi = \Phi(x, y, z)$ das magnetische Gesammtpotential, d. h. das von allen Körpern $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... zusammen-

genommen auf den Punkt (x, y, z) ausgeübte magnetische Potential. Endlich bezeichnet in (2) der Buchstabe n die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale.

Wir wollen jetzt insbesondere voraussetzen, der Körper $\mathfrak{M}$ sei *weiches Eisen*, und denjenigen Zustand in Betracht ziehen, den dieses Eisen unter der Einwirkung der übrigen magnetischen Körper $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ annimmt. Alsdann gelten für α, β, γ die POISSON'schen Formeln:

$$(3) \qquad \alpha = -k\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \beta = -k\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma = -k\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

wo k den Inductionscoefficienten bezeichnet.

In diesem Fall nehmen daher die Formeln (1), (2) folgende Gestalt an:

$$(I) \qquad A\,d\tau = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

$$(II) \qquad \bar{A}\,d\sigma = -2\pi k^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 \cdot \cos(n, x)\, d\sigma.$$

Die Resultate (1), (2) haben sich mir durch *directe* Rechnung ergeben; wie z. B. schon daraus deutlich hervorgeht, dass das Inductionsgesetz erst *später*, in (3) eingeführt wird. Auf einem weiten Umwege, nämlich unter Anwendung jenes Inductionsgesetzes und gleichzeitiger Anwendung des Princips der Energie, sind nun die in Rede stehenden ponderomotorischen Kräfte bekanntlich schon früher, namentlich von THOMSON, MAXWELL, KORTEWEG, HELMHOLTZ, KIRCHHOFF und LORBERG zu bestimmen versucht worden.

Die KIRCHHOFF'schen Formeln sind mit drei Coefficienten k, k', k'' behaftet. Sie lauten (KIRCHHOFF's Ges. Abhandlungen, 1891, Seite 103 und 104) folgendermassen:

$$(Ik) \quad A\,d\tau = \left(\frac{k'}{2} + \frac{k''}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

$$(IIk) \quad \bar{A}\,d\sigma = \left\{\begin{array}{l} -2\pi k^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 \cos(n, x) \\ -\frac{k-k'}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]\cos(n, x) + \frac{k''}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial n} \end{array}\right\} d\sigma.$$

Mit ihnen übereinstimmend sind die Lorberg'schen Resultate (Vgl. Kirchhoff's Ges. Abh., 1891, Seite 92, Note).

Aus diesen Kirchhoff-Lorberg'schen Formeln ergeben sich die Helmholtz'schen, wenn man $k''=0$ macht, (l. c. Seite 114). Und setzt man überdies noch $k'=k$, so verwandeln sich diese Kirchhoff-Lorberg'schen Formeln (Ik), (IIk) geradezu in die von mir gefundenen Formeln (I.), (II.)

Eine solche Annahme aber, dass $k''=0$ und $k'=k$ sei, dürfte nichts gegen sich haben. Denn über die Werthe von k' und k'' hat man, wie Kirchhoff mit Bezug auf Eisen bemerkt (l. c. pag. 129), bis jetzt noch gar keine Erfahrung.

Widerspruch allerdings würde dabei eintreten gegenüber der Thomson-Maxwell'schen Theorie. Denn nach dieser müsste $k''=0$ und k' ebenfalls $=0$ sein. (Vgl. Kirchhoff's Ges. Abh. 1891, Seite 114.)

Leipzig, 3. Juli 1893.

W. Scheibner, *Ueber eine Methode von C. G. J. Jacobi zur Bestimmung des Restes unendlicher Reihen.*

Im Winterhalbjahre 1845—46 setzte JACOBI in seinen an der Berliner Universität über Abschnitte aus der Differential- und Integralrechnung gehaltenen Vorlesungen eine neue Methode für die Restbestimmung unendlicher Reihen auseinander, über welche, soviel mir bekannt, späterhin Nichts veröffentlicht worden ist. JACOBI selbst legte einen gewissen Werth auf die betreffenden, an sich elementaren Betrachtungen, da er mich wenige Wochen vor seinem im Februar 1851 erfolgten Hinscheiden um einen Auszug aus meinem früher geführten Hefte ersuchte. Ein solches Résumé habe ich einige Jahre darauf an die Redaction des Crelle'schen Journals gesandt, jedoch später erfahren, dass das Manuscript nicht in BORCHARDT's Hände gelangt sei. Da der Gegenstand auch jetzt noch nicht ohne Interesse sein dürfte, so erlaube ich mir den nachstehenden Auszug mitzutheilen, indem ich zur Erklärung des elementaren Charakters bemerke, dass ich dabei auf eine möglichst getreue Reproduction bedacht gewesen bin.

1.

»Wenn $y = \sin x$, so hat man

$$J_m = \int_0^x \sin^m x\,dx = \int_0^y \frac{y^m\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Die bekannte und leicht beweisbare Reductionsformel, welche für $m + 1 > 0$ gilt:

$$J_m = \frac{1}{m+1}\cos x \sin^{m+1} x + \frac{m+2}{m+1} J_{m+2}$$

führt bei wiederholter Anwendung sogleich auf den Ausdruck

$$J_m = \frac{y^{m+1}}{m+1}\sqrt{1-y^2}\left\{1 + \frac{m+2}{m+3}y^2 + \frac{m+2\cdot m+4}{m+3\cdot m+5}y^4 + \cdots + \frac{m+2\cdots m+2n-2}{m+3\cdots m+2n-1}y^{2n-2}\right\} + \frac{m+2\cdot m+4\cdots m+2n}{m+1\cdot m+3\cdots m+2n-1} J_{m+2n}$$

oder

$$\int_0^y \frac{y^m dy}{\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1-y^2}\,\frac{y^{m+1}}{m+1}\left\{1 + \frac{m+2}{m+3}y^2 + \cdots + \frac{m+2\cdots m+2n-2}{m+3\cdots m+2n-1}y^{2n-2}\right\} = \frac{m+2\cdot m+4\cdots m+2n}{m+1\cdot m+3\cdots m+2n-1}\int_0^y \frac{y^{m+2n}dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Es ist also der Rest der auf n Glieder ausgedehnten Reihenentwickelung der Function J_m ausgedrückt durch ein einfaches unbestimmtes Integral, während in den allgemeinen Formeln, welche man für den Rest solcher Entwickelungen hat, bestimmte Integrale erscheinen, die von den n^{ten} Differentialquotienten der zu entwickelnden Functionen abhängen.

Für $m = 0$ folgt die Bestimmung des Restes der Entwickelung von $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$, wenn man diese Entwickelung so vornimmt, dass dabei $\sqrt{1-y^2}$ als Factor der Reihe stehen bleibt. Setzt man dagegen $m = 1$ und dividirt durch $\sqrt{1-y^2}$, so wird

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \left\{1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdots 2n}y^{2n}\right\} = \frac{3\cdot 5\cdots 2n+1}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{y^{2n+1}dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

also ein Restausdruck für die Entwickelung von $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ erhalten.

Um jetzt allgemein den Rest der binomischen Reihe

$$R = (1-x)^{-m} - \left\{1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\cdot m+1}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m\cdot m+1\cdots m+n-1}{1\cdot 2\cdots n}x^n\right\}$$

zu untersuchen, setzen wir

$$u = R(1-x)^m = 1 - (1-x)^m\left\{1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\cdot m+1}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m\cdot m+1\cdots m+n-1}{1\cdot 2\cdots n}x^n\right\}.$$

Die Differentiation ergibt

$$\frac{du}{dx} = m(1-x)^{m-1}\left[\left\{1 + \frac{m}{1}x + \cdots + \frac{m\cdots m+n-1}{1\cdots n}x^n\right\}\right.$$

$$\left. - (1-x)\left\{1 + \frac{m+1}{1}x + \cdots + \frac{m+1\cdots m+n-1}{1\cdots n-1}x^{n-1}\right\}\right]$$

$$= m(1-x)^{m-1}\left\{\frac{m\cdot m+1\cdots m+n-1}{1\cdot 2\cdots n} + \frac{m+1\cdots m+n-1}{1\cdots n-1}\right\}x^n$$

oder

$$u = \frac{m\cdot m+1\cdots m+n}{1\cdot 2\cdots n}\int_0^x x^n(1-x)^{m-1}\,dx,$$

weil u für $x = 0$ verschwindet. Damit folgt endlich der gesuchte Rest

$$R = \frac{m\cdot m+1\cdots m+n}{1\cdot 2\cdots n}(1-x)^{-m}\int_0^x x^n(1-x)^{m-1}\,dx.$$

Dieser Ausdruck hat den Vortheil, dass für wachsende Werthe von n sein Werth wegen des kleinen Factors x^n unter dem Integralzeichen leicht zu schätzen ist.

2.

Die bisherigen Ausdrücke würde man aus den bekannten Restformeln, welche durch Anwendung der von D'Alembert und Lagrange für die Entwickelung beliebiger Functionen gegebenen allgemeinen Methoden folgen, mit Hülfe einiger Transformationen

auch ableiten können. Schwieriger möchte dies der Fall sein, wenn statt des Restes einer binomischen Entwickelung der Rest der Potenz eines beliebigen Polynoms, z. B. des Trinoms $y = a + bx + cx^2$ gefunden werden soll. Unsere Methode führt auch hier auf einen einfachen Integralausdruck.

Sei

$$y^m = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

die m^{te} Potenz eines beliebigen Polynoms

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

so findet zwischen den Coefficienten A_n eine recurrirende Relation statt, welche zuerst wohl von Euler aufgestellt worden ist. Differentiirt man nämlich das Product der beiden angeführten Reihen, so erhält man dasselbe, als wenn man y^m mit dem $m+1$-fachen Differentialquotienten von y multiplicirt. Es wird damit

$$\frac{d}{dx}\{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \cdots)\}$$
$$= (m+1)(a_1 + 2a_2 x + \cdots)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \cdots)$$

und wenn man die Coefficienten von x^{n-1} auf beiden Seiten gleichsetzt:

$$n(a_0 A_n + a_1 A_{n-1} \cdots + a_n A_0)$$
$$= (m+1)(a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \cdots + n a_n A_0).$$

Setzt man

$$S_n = A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1},$$

also

$$R = y^m - S = A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} \cdots$$

und schreibt

$$u = 1 - S y^{-m},$$

so folgt

$$\frac{du}{dx} = y^{-m-1}\left\{m S_n \frac{dy}{dx} - y \frac{dS_n}{dx}\right\}.$$

Der Ausdruck in der Parenthese ist natürlich Function von n, und es wird z. B. die Differenz $m A_n x^n \frac{dy}{dx} - n A_n x^{n-1} y$ hinzukommen, wenn man $n+1$ statt n schreibt. In keinem Falle können durch eine Vergrösserung von n Glieder hinzutreten, welche in eine niedrigere Potenz von x als x^{n-1} multiplicirt

sind. Lässt man n aber unbestimmt wachsen, so müssen sich zuletzt alle Glieder identisch aufheben, weil in diesem Falle $S = y^m$ und $u = 0$ wird.

Daraus schliessen wir, dass in der Differenz

$$mS_n \frac{dy}{dx} - y \frac{dS_n}{dx}$$

von vornherein keine Glieder unter x^{n-1} vorkommen können, da es nicht möglich ist, dass sich Glieder von niedrigerer Dimension mit höheren compensiren, wenn S ins Unendliche fortgesetzt wird. Nehmen wir aber der Kürze halber y als Trinom vom 2. Grade in Bezug auf x, so kann derselbe Ausdruck auch nicht über die n^{te} Dimension steigen und muss folglich die Form haben

$$mS_n \frac{dy}{dx} - y \frac{dS_n}{dx} = \alpha_n x^{n-1} + \beta_n x^n .$$

Die Coefficienten α_n und β_n müssen durch die in S mit x^{n-2} und x^{n-1} multiplicirten Glieder entstanden sein, so wie ihre entgegengesetzten Werthe erzeugt werden, wenn man zu S die Glieder $A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1}$ hinzufügt.

Diese Betrachtung zeigt, dass, um die Werthe von α_n und β_n zu bestimmen, nur der Ausdruck

$$m(A_{n-2} x^{n-2} + A_{n-1} x^{n-1}) \frac{dy}{dx}$$
$$- ((n-2) A_{n-2} x^{n-3} + (n-1) A_{n-1} x^{n-2}) y$$

oder der andere

$$(nA_n x^{n-1} + (n+1) A_{n+1} x^n) y - m(A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1}) \frac{dy}{dx}$$

zu untersuchen ist. Die Substitution von

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{und folglich} \quad \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

ergibt sofort

$$\alpha_n = 2ma_2 A_{n-2} + ma_1 A_{n-1} - a_2(n-2) A_{n-2} - a_1(n-1) A_{n-1}$$
$$= (2m - n + 2) a_2 A_{n-2} + (m - n + 1) a_1 A_{n-1} = naA_n ,$$
$$\beta_n = 2ma_2 A_{n-1} - (n-1) a_2 A_{n-1} = na_1 A_n + (n+1) aA_{n+1} - ma_1 A_n$$
$$= (2m - n + 1) a_2 A_{n-1} = -(m-n) a_1 A_n + (n+1) aA_{n+1} .$$

Die Identität dieser doppelten Werthe ergibt sich leicht durch

Benutzung der früher abgeleiteten recurrenten Formel. Wir haben folglich

$$\frac{du}{dx} = y^{-m-1}(\alpha_n x^{n-1} + \beta_n x^n)$$

und wenn wir integriren und durch y^m multipliciren:

$$R = y^m - S = uy^m =$$

$$= (a+a_1x+a_2x^2)^m \int_0^x \frac{n a A_n x^{n-1} + (2m-n+1) a_2 A_{n-1} x^n}{(a+a_1x+a_2x^2)^{m+1}} dx.$$

Ein nicht minder einfaches Resultat liefert die Anwendung derselben Methode auf die Exponentialreihe. Sei

$$S = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$

und der Rest der Entwickelung von e^x zu finden, so ist

$$R = e^x - S.$$

Setzt man S ins Unendliche fort, so hat man $\frac{dS}{dx} = S$, geht man bis zum n^{ten} Gliede, so wird

$$S - \frac{dS}{dx} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$u = \frac{R}{e^x} = 1 - e^{-x}S,$$

so ergibt die Differentiation

$$\frac{du}{dx} = e^{-x}\left(S - \frac{dS}{dx}\right) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}$$

und

$$u = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x e^{-x}x^{n-1}\,dx,$$

weil u mit x verschwindet, folglich

$$R = \frac{e^x}{(n-1)!}\int_0^x e^{-x}x^{n-1}\,dx.$$

Man kann aus dieser Formel die Reste der Sinus- und Cosinusreihen ableiten, wenn man $t\sqrt{-1}$ statt x schreibt, und erhält mit leichter Mühe, wegen

$$\frac{du}{dt} = e^{-ti}\left(iS - \frac{dS}{dt}\right) = i^n e^{-ti}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$R = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^t e^{(t-x)i}\,x^{n-1}\,dx.$$

Durch Zerfällung dieser Gleichung in den reellen und imaginären Theil gehen die gesuchten Ausdrücke hervor, wenn man die Fälle unterscheidet, in denen n eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet.

3.

Im Vorhergehenden sind wir, von der Restformel für $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ ausgehend, durch Anwendung unserer Methode dahingelangt, den Rest einer beliebigen polynomischen Entwickelung y^m darzustellen. Wir können analog die Restformel für das Integral $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$, bei dessen Entwickelung $\sqrt{1-y^2}$ als Factor heraustrat, dahin verallgemeinern, dass wir den Rest von $\int_0^x y^m\,dx$ suchen, wo y ein beliebiges Polynom bedeutet und die Entwickelung des Integrals mit dem Factor y^{m+1} versehen wird. Man erhält diese Entwickelung ohne Schwierigkeit, wenn man setzt

$$\int_0^x y^m\,dx = y^{m+1}w,$$

woraus durch Differentiation für w die linearische Differentialgleichung hervorgeht

$$1 = y\frac{dw}{dx} + (m+1)\,w\frac{dy}{dx}.$$

Betrachten wir der Kürze halber ein Trinom

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

und setzen

$$w = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \cdots ,$$

wo kein constantes Glied A_0 vorkommt, weil für $x = 0$ das Integral verschwindet, so folgt

$$1 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \cdots)$$
$$+ (m+1)(a_1 + 2a_2 x)(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \cdots) ,$$

folglich

$$1 = a_0 A_1 , \quad 0 = 2a_0 A_2 + (m+2) a_1 A_1 ,$$
$$0 = 3a_0 A_3 + (m+3) a_1 A_2 + (2m+3) a_2 A_1 ,$$

allgemein

$$0 = n a_0 A_n + (m+n) a_1 A_{n-1} + (2m+n) a_2 A_{n-2} ,$$

so dass sich jeder Coefficient A_n aus den beiden vorhergehenden finden lässt. Setzen wir jetzt

$$S = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} ,$$

$$R = \int_0^x y^m dx - y^{m+1} S ,$$

so ist

$$\frac{dR}{dx} = y^m \left(1 - y \frac{dS}{dx} - (m+1) S \frac{dy}{dx}\right) .$$

Hier kann man wieder a priori schliessen, dass der Ausdruck in der Parenthese von der Form $\alpha_n x^{n-1} + \beta_n x^n$ sein muss, weil für $w = S$ sich alle Glieder aufheben, die Glieder aber, die durch das Hinzukommen der Differenz

$$w - S = A_n x^n + \cdots$$

in der Parenthese erzeugt werden, auf das Verschwinden nur der in x^{n-1} und x^n multiplicirten Terme influiren können. Deshalb müssen alle niedrigeren Potenzen von selbst wegfallen, während andrerseits höhere Potenzen als x^n wegen des Grades von S nicht vorkommen. Folglich

$$R = \int_0^x y^m (\alpha_n x^{n-1} + \beta_n x^n) \, dx ,$$

wo α_n und β_n aus der Entwickelung folgen entweder von

$$-(a_0+a_1x+a_2x^2)((n-2)A_{n-2}x^{n-3}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2})$$
$$-(m+1)(a_1+2a_2x)(A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-1}x^{n-1})$$

oder von

$$+(a_0+a_1x+a_2x^2)(nA_nx^{n-1}+(n+1)A_{n+1}x^n)$$
$$+(m+1)(a_1+2a_2x)(A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}).$$

Hiermit wird

$$\alpha_n=-(m+n)a_1A_{n-1}-(2m+n)a_2A_{n-2}=na_0A_n,$$
$$\beta_n=-(2m+n+1)a_2A_{n-1}=(n+1)a_0A_{n+1}+(m+n+1)a_1A_n$$

und endlich

$$R=\int_0^x(a_0+a_1x+a_2x^2)^m\{na_0A_n-(2m+n+1)a_2A_{n-1}x\}x^{n-1}dx,$$

ein Ausdruck, der die nämlichen Vortheile bietet, wie der oben für den Rest von y^m abgeleitete, da sich dessen Form für ein wachsendes n nicht complicirt.

Man kann auch $\int_0^x y^m x^l dx=y^{m+1}w$ setzen, wo

$$w=A_1x^{l+1}+A_2x^{l+2}\ldots,$$

und als Beispiele die Reste der elliptischen Integrale

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-\varkappa^2x^2}}\text{ und }\int_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-\varkappa^2x^2}}$$

für $m=-\frac{1}{2}$, $l=2$, $y=1-(1+\varkappa^2)x^2+\varkappa^2x^4$ untersuchen.

Die gefundenen Formeln sind deshalb merkwürdig, weil sie nicht allein von den allgemeinen Restausdrücken verschieden sind, sondern auch nicht aus jenen abzuleiten. Es scheint also, als ob diese elementare Betrachtungsweise etwas wesentlich Neues gibt und zugleich Wichtiges, da sie lauter Fundamentalprobleme löst. Aber sie lässt sich auch anwenden auf Entwickelungen, für die es bis jetzt noch gar keine Restformeln gibt, nämlich auf die nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Entwickelungen.

4.

Wenn eine beliebige Potenz eines Polynoms

$$y = a_0 + 2a_1 \cos\varphi + 2a_2 \cos 2\varphi + \cdots + 2b_1 \sin\varphi + 2b_2 \sin 2\varphi \cdots$$

in eine Reihe von derselben Form entwickelt wird, so löst unsere Methode die Aufgabe, den Rest einer solchen Entwickelung zu finden.

Um für diesen Fall ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir

$$y = 1 - 2a\cos\varphi + aa$$

setzen und den Rest der nach den Cosinus der Vielfachen von φ vorgenommenen Entwickelung von $(1 - 2a\cos\varphi + aa)^{m-1}$ ausdrücken. Sei

$$y^{m-1} = A_0 + 2A_1 \cos\varphi + 2A_2 \cos 2\varphi \cdots,$$

so findet zwischen den Coefficienten A_n eine bekannte recurrente Relation statt, welche sich durch Entwickelung der identischen Gleichung

$$\frac{d}{d\varphi}(y \cdot y^{m-1}) = m y^{m-1} \frac{dy}{d\varphi}$$

ableiten lässt. In der Gleichung

$$\frac{d}{d\varphi}\{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)(A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi \cdots)\}$$
$$= 2ma\sin\varphi\,(A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi \cdots)$$

schreiten beide Seiten nach den Sinus der Vielfachen von φ fort. Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\sin n\varphi$ folgt sogleich

$$0 = n(1 + a^2) A_n - (n - m)\, aA_{n-1} - (n + m)\, aA_{n+1}.$$

Sei jetzt

$$S = A_0 + 2A_1\cos\varphi + \cdots + 2A_{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$

$$R = y^{m-1} - S, \quad u = \frac{R}{y^{m-1}} = 1 - y^{1-m} S,$$

so ist

$$\frac{du}{d\varphi} = y^{-m}\left(2(m-1)\, a\sin\varphi\, S - y\frac{dS}{d\varphi}\right),$$

und es lässt sich wiederum erkennen, dass der Ausdruck in der Parenthese nur Glieder enthalten kann, welche in $\sin(n-1)\varphi$

und $\sin n\varphi$ multiplicirt sind. Denn einerseits erhellt aus der Beschaffenheit von S und y, dass höhere Glieder oder Vielfache von φ unter den Sinuszeichen nicht vorkommen, andererseits müssen auch die früheren verschwinden, wenn man die Reihe für S weiter fortsetzt. Durch das Hinzutreten der Glieder $2A_n \cos n\varphi + 2A_{n+1} \cos(n+1)\varphi \cdots$ aber werden keine Terme erzeugt, welche unter $\sin(n-1)\varphi$ liegen, es muss folglich eine Gleichung von der Form existiren:

$$2(m-1)a \sin\varphi S - y\frac{dS}{d\varphi} = 2(\alpha_n \sin(n-1)\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

wo α_n und β_n aus der Bildung der Aggregate

$$2(m-1)a \sin\varphi (A_{n-2} \cos(n-2)\varphi + A_{n-1} \cos(n-1)\varphi)$$
$$+(1+a^2-2a\cos\varphi)((n-2)A_{n-2} \sin(n-2)\varphi + (n-1)A_{n-1} \sin(n-1)\varphi)$$

oder

$$-2(m-1)a \sin\varphi (A_n \cos n\varphi + A_{n+1} \cos(n+1)\varphi)$$
$$-(1+a^2-2a\cos\varphi)(nA_n \sin n\varphi + (n+1)A_{n+1} \sin(n+1)\varphi)$$

erhalten werden. Damit folgen die Werthe

$$\alpha_n = (m-n+1)aA_{n-2} + (n-1)(1+a^2)A_{n-1} = (m+n-1)aA_n,$$
$$\beta_n = (m-n)aA_{n-1} = (m+n)aA_{n+1} - n(1+a^2)A_n,$$

welche mittelst der früher entwickelten Coefficientengleichung auf einander reductibel sind. Hieraus erhält man weiter

$$u = 2\int \frac{\alpha_n \sin(n-1)\varphi + \beta_n \sin n\varphi}{y^m} d\varphi$$

und den vollständigen Rest

$$R = 2a(1-2a\cos\varphi + aa)^{m-1} \times$$
$$\int \frac{(m+n-1)A_n \sin(n-1)\varphi + (m-n)A_{n-1} \sin n\varphi}{(1-2a\cos\varphi + aa)^m} d\varphi.$$

Mit einer Schwierigkeit eigenthümlicher Art ist hier die Bestimmung der diesem Integrale hinzuzufügenden willkürlichen Constante, mit anderen Worten die Bestimmung der unteren Grenze der Integration verbunden. Der Werth von φ, für welchen der Rest verschwindet, lässt sich nicht näher definiren als durch die Bedingung, dass in der nach den Cosinus der Vielfachen von φ vorgenommenen Entwickelung von R keine nicht

periodischen Glieder vorkommen dürfen. Wenn man sich einer in der Astronomie bei der Bestimmung der elliptischen Elemente der Himmelskörper gebräuchlichen Terminologie bedienen wollte, so könnte man etwa sagen, das Integral sei so zu nehmen, dass der *mittlere Werth* des Restes R verschwinde. Die Schwierigkeit hört augenblicklich auf, sobald man die Differenz zweier Ausdrücke $u = \frac{R}{y^{m-1}}$ für zwei verschiedene Werthe von φ haben will, denn in diesem Falle geht die willkürliche Constante von selbst heraus.«

P. Stäckel in Halle a/S., *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien.*

I. Die allgemeine Theorie der geodätischen Linien bis Gauss.

Am Ende des 17. Jahrhunderts erregten das Interesse der Mathematiker vorzugsweise Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima, welche Gelegenheit gaben den neuen Infinitesimalcalcül anzuwenden und seine Kraft zu erproben. Unter diesen Aufgaben verdient vor allen das Problem der Brachistochrone genannt zu werden, das zur Ausbildung eines besonderen Zweiges der Analysis, der Variationsrechnung, geführt hat.

Nach damaliger Gelehrtensitte legte JOHANN BERNOULLI im Juni 1696 den Geometern die Frage nach der Curve des schnellsten Falles vor, zu deren Beantwortung er eine Frist von sechs Monaten gewährte[1]). Als ihm während dieser Zeit nur LEIBNIZ die Lösung brieflich mitgetheilt hatte[2]), wiederholte er seine Aufforderung in einem Programme, welches an die »scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises« gerichtet war[3]), und nun gaben nach kurzer Zeit NEWTON[4]), L'HOSPITAL[5]) und JOHANN's älterer Bruder JACOB[6]) die richtige Lösung, nämlich die Cycloide. JACOB BERNOULLI geht dabei über die Aufgabe seines Bruders hinaus. Er erkennt, dass es sich dort nur um einen besonderen Fall einer grossen Classe von Problemen handelt, wo nicht nach dem Maximum oder Minimum in einer gegebenen Curve gefragt wird, sondern wo aus unendlich vielen unbekannten Curven diejenige herausgesucht werden soll, der eine gewisse Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt,

und als eine schwierige Aufgabe dieser Art nennt er das isoperimetrische Problem, zu dessen Lösung er seinen Bruder herausfordert.

Es ist bekannt, dass sich nun zwischen beiden Brüdern ein erbitterter Streit entspann, und dass es Johann trotz vieler Bemühungen nicht gelang jene Aufgabe in befriedigender Weise zu lösen. Aber während Jacob hier Sieger blieb war er wiederum nicht glücklich bei der Behandlung eines Problems, welches ihm nunmehr sein Bruder erst für einen speciellen Fall, dann ganz allgemein stellte.

Im August 1697 lud Johann Bernoulli die Geometer, »welche glaubten Methoden für alle Fragen dieser Art zu besitzen«, zur Lösung einer Aufgabe ein, welche den Beginn der Geschichte der kürzesten Linien bildet[7]). Diese Aufgabe lautete: .

»Deux points étant donnés sur une superficie convexe, on demande une maniére d'y décrire géométriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte; supposé que cette surface soit géométrique, telles que celles de la Sphère, du Cone, du Cylindre, dans lesquelles le Probléme est fort facile, de quelque maniére que les points soient situés; mais dans les Conoïdes et dans les Sphéroïdes, il devient très difficile. C'est pourquoi on propose pour exemple la superficie du Conoïde parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte, qui joint deux points situés, non pas dans le même Méridien, [ce qui serait encore facile, puisque la ligne recherchée serait la portion du même Méridien comprise entre ces deux points;] mais situés dans des Méridiens différens: J'appelle ici Méridien toute parabole tirée du sommet du Conoïde jusqu'à sa base.«

Zur Erläuterung sei bemerkt, dass nach damaligem Sprachgebrauche unter Sphäroid eine geschlossene Rotationsfläche, unter Conoid eine nicht geschlossene Fläche derselben Art zu verstehen ist[8]).

Johann Bernoulli, welcher bekanntlich mit Leibniz in lebhaftem, lange fortgesetztem Briefwechsel stand, übersandte diesem mit einem Briefe vom 4. December 1697[9]) die Aufgabe der kürzesten Linie und forderte ihn zur Lösung derselben auf. Er fügte hinzu: »L'Hospital hat daran verzweifelt. Ich aber habe sie auf eine Differentialgleichung zurückgeführt.« Leibniz antwortete am 17. December[10]), dass er sich mit diesem Problem schon früher einmal beschäftigt und bei Gelegenheit seiner

Untersuchungen über die Brachistochrone eine Methode zu seiner Lösung gefunden habe; zur wirklichen Durchführung der Rechnung sei er aber nicht gekommen. Als BERNOULLI im nächsten Briefe bittet, ihm seine Gedanken über diesen Gegenstand ausführlicher mitzutheilen, äussert sich LEIBNIZ in einem Schreiben vom 29. Juli 1698[11]) folgendermassen: er denke sich die Fläche zusammengesetzt aus unendlich kleinen Flächenstücken oder Elementen, für welche man die kürzesten Linien bereits kennt. Diese Elemente könnten etwa Stücke von Ebenen oder Kugeln[12]) sein. Nun muss die Eigenschaft des Minimums auch für beliebig kleine Stücke der kürzesten Linien gelten. Legt man also in zwei benachbarten Punkten R und S der Fläche die Tangentialebenen an diese, so muss man, um die kürzeste Linie zwischen R und S zu erhalten, auf der Schnittlinie der beiden Ebenen einen Punkt T so bestimmen, dass die Summe der Entfernungen dieses Punktes von R und S ein Minimum ist. LEIBNIZ schliesst: »Wenn Du einen andern Weg gefunden hast, wird es mir um so lieber sein. Wenn Du aber gerade diesen verfolgt hast, wird es mich auch freuen es zu erfahren. Denn der Gegenstand, dessen Untersuchung Du angeregt hast. ist schön und Deiner würdig.«

JOHANN BERNOULLI antwortet am 16./26. August 1698[13]): »Deine Methode, oder genauer Grundlage einer Methode, ist richtig und hat sich auch mir zuerst dargeboten, mich aber bis jetzt nicht zum Ziele geführt. Dagegen habe ich eine andere Methode gefunden, welche ganz allgemein ist, und welche sich darauf gründet, *dass die Ebene durch drei benachbarte Punkte der gesuchten Curve auf der Tangentialebene der krummen Oberfläche an dieser Stelle senkrecht steht.* Hieraus nämlich habe ich die allgemeine Gleichung für alle Flächen ermittelt, und diese lässt sich für Rotationsflächen leicht integriren.« Die Lösung des Problems für Rotationsflächen war übrigens inzwischen schon von JACOB BERNOULLI veröffentlicht worden. Auf diesen Brief antwortet LEIBNIZ sofort[14]), dass seine Methode durchaus brauchbar sei, und dass man mit ihrer Hilfe ebenfalls zur Differentialgleichung gelange. Er erkennt aber BERNOULLI's Theorem als elegant und nützlich an. Hiermit schliesst die Discussion dieses Gegenstandes, und weder LEIBNIZ noch BERNOULLI ist später auf die Theorie der kürzesten Linien zurückgekommen.

Aus diesem interessanten Briefwechsel geht hervor, dass

Johann Bernoulli zu der Lösung seiner Aufgabe nicht mittelst der allgemeinen Methode der Maxima und Minima, sondern durch andersartige Betrachtungen gelangt ist. Das kann bei ihm nicht überraschen. Er liebte und verstand es Probleme ganz verschiedener Gebiete mit einander in Beziehung zu setzen, wie seine geniale Lösung des Problems der Brachistochrone mittelst optischer Ueberlegungen zeigt[15]). Was hat ihn nun zu der Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linien geführt, welche darin besteht, dass die Schmiegungsebene einer solchen Curve stets senkrecht zur Tangentialebene der Fläche ist? Hierüber giebt uns eine Abhandlung Auskunft, welche Johann Bernoulli im October 1698 in den Acta Eruditorum veröffentlichte[16]), nachdem im Mai dieses Jahres sein Bruder Jacob die Lösung der Aufgabe für Rotationsflächen — und nur diese hatte Johann Bernoulli im August 1697 verlangt — allerdings ohne Beweis angegeben hatte[17]). In dieser Abhandlung war von Jacob getadelt worden, dass sein Bruder bei der Formulirung der Aufgabe das Wort géométriquement gebraucht habe, denn es sei zweideutig. Fasse man geometrisch als gleichbedeutend auf mit algebraisch, was nach dem Vorgange von Descartes damals vielfach üblich war, so sei die Lösung der Aufgabe schon für Kegel und Cylinder unmöglich. Bezeichne man aber, nach dem Vorgange von Leibniz, eine Construction als geometrisch, wenn sie nur Quadraturen erfordere, so lasse sich die Lösung der Aufgabe für beliebige Rotationsflächen geometrisch durchführen. Hierauf antwortet Johann, dass er unter geometrisch dasselbe verstehe wie sein Bruder. Er habe aber dieses Wort absichtlich hinzugefügt: »*um die einfachste, leichteste und allgemeinste Construction auszuschliessen, welche wie ich vorhersah hätte angegeben werden können, nämlich die mechanische, dass man auf der convexen Fläche einen Faden von dem einen zu dem andern Punkt ausspannt und fest anzieht, denn auf diese Weise wird er zwischen den beiden Punkten die kürzeste Lage annehmen*«.

Beachtet man jetzt noch, dass Johann Bernoulli bei Gelegenheit des Problems der Kettenlinie (1691) die Spannungsverhältnisse in einem Faden studirt hatte[18]), und dass die Betrachtung der Spannung des Fadens und seines Druckes auf die Fläche leicht zu der Einsicht führt, welche durch den Satz über die Schmiegungsebene ausgesprochen wird, so wird man als nahezu gewiss annehmen dürfen, dass die mecha-

nische Lösung ihm den Schlüssel zur analytischen Lösung gegeben hat.

In jener Abhandlung begnügt sich jedoch Johann mit den eben erwähnten Aeusserungen und fährt dann fort: »wenn man die unendliche Menge und Mannigfaltigkeit der krummen Oberflächen betrachtet, welche weder Conoide noch Sphäroide sind, so erkennt man, dass mein Bruder mit der Lösung der Aufgabe für Rotationsflächen wenig geleistet hat.« Er schliesst mit den Worten, welche seinen älteren Bruder und Lehrer in der Mathematik nicht wenig verdriessen mussten: »daher glaube ich etwas Grosses gethan zu haben, wenn ich eine allgemeine Methode gefunden habe, um bei jeder gegebenen Oberfläche, mag sie conoidisch sein oder nicht, zu der Gleichung zu gelangen. Aber ich überlasse es meinem Bruder diese aufzufinden, sodass er Zeit hat seine Lösung durchzuführen und dem Probleme vollständig Genüge zu leisten.«

Dieser Aufforderung ist Jacob, der schon damals kränklich war und 1705 starb, nicht nachgekommen. Dass er sich mit der Lösung der allgemeinen Aufgabe, freilich ohne Erfolg beschäftigt hat, darf man annehmen, da sich in seinem Nachlass verschiedene Bruchstücke gefunden haben, welche sich auf die Theorie der kürzesten Linien beziehen [19]).

Aber selbst wenn es Jacob gelungen wäre die von seinem Bruder entdeckte Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien zu finden, so würde doch der Weg von dieser zu der Differentialgleichung keineswegs ein leichter gewesen sein. Vielmehr bestand die Schwierigkeit der Aufgabe gerade darin, dass es damals an Mitteln zur analytischen Formulirung solcher Eigenschaften gänzlich fehlte. Zwar hatte schon Descartes [20]) in seiner Géométrie (1637) darauf hingewiesen, dass die Metheode der Coordinaten auch dazu dienen könne Raumcurven zu untersuchen, doch war dieser kurze Hinweis unbeachtet geblieben [21]). Dass freilich Leibniz und Johann Bernoulli bereits am Ende des 17. Jahrhunderts in Besitze der Einsicht waren, eine krumme Oberfläche lasse sich durch eine Gleichung zwischen drei Coordinaten darstellen, geht aus ihrem Briefwechsel unzweifelhaft hervor [22]), und es ist daher das Problem der kürzesten Linien das erste Problem der Raumgeometrie, welches mit Hilfe der Coordinatenmethode behandelt worden ist. Von einem bald vergessenen Versuche Parent's 1700 abgesehen [23]), sind es

dann erst Euler und Clairaut gewesen, welche die Behandlung solcher Aufgaben mit Hilfe von Coordinaten durchgeführt haben. Euler hat 1728 in einer Abhandlung über die kürzesten Linien, die unten genauer besprochen werden wird [24]), ausführlich auseinandergesetzt, wie es seine Art war und wie es die Neuheit der Sache verlangte, dass man jede Fläche im Raume durch eine Gleichung zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, eine Curve im Raume durch zwei solche Gleichungen darstellen könne, und Clairaut behandelte in seinen berühmten Recherches (1731)[25]) mittelst der Coordinatenmethode eine grosse Anzahl von Aufgaben der Infinitesimal-Geometrie des Raumes genau in der Weise wie es auch heute noch zu geschehen pflegt. Zur weiteren Verbreitung dieser neuen Methode trug aber wesentlich bei, dass Euler sie in seiner Mechanik (1736)[26]) auf das Problem der Bewegung eines Punktes im Raume und auf einer Oberfläche anwandte, und dass er in einem Anhange zu seiner Introductio (1748)[27]) die ersten Elemente einer analytischen Geometrie des Raumes gab.

Johann Bernoulli hat ausser jener kleinen Abhandlung vom October 1698 über die Theorie der kürzesten Linien erst wieder etwas veröffentlicht, als er 1742 seine gesammelten Werke herausgeben liess. Im vierten Bande, welcher die *Ἀνέκδοτα* enthält, findet sich auch eine Abhandlung über diesen Gegenstand[28]), in welcher, ohne jeden Beweis, die Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie mitgetheilt und gezeigt wird, wie man daraus eine Differentialgleichung zweiter Ordnung herleiten kann, die zusammen mit der Gleichung der Fläche deren kürzeste Linien bestimmt.

Wenn Johann Bernoulli in einer Anmerkung sagt, diese Lösung sei der Abdruck einer Aufzeichnung, die A. Klingenstjerna, Professor der Mathematik in Upsala, auf Grund seiner Mittheilungen 1728 gemacht habe, so geschah dies wohl, weil er sich das Recht der Priorität gegenüber zwei jüngeren Mathematikern, Euler und Clairaut, sichern wollte.

Der zwanzigjährige Clairaut hatte 1733 in einer Abhandlung über Aufgaben der Maxima und Minima[29]) auch das Problem der kürzesten Linien behandelt; es genügt zu sagen, dass er die Lösung genau auf dem Wege gefunden hat, den Leibniz in seinem Briefe auseinandersetzt. Von grösserem Interesse ist die Arbeit

des ebenfalls zwanzigjährigen Euler[30]). Sie ist eine der ersten, welche er in Petersburg verfasste, wohin er 1727 als Akademiker berufen worden war, und zeigt schon die unvergleichliche Klarheit und Durchsichtigkeit der Schreibweise, welche das Studium Euler'scher Arbeiten so anziehend macht. Euler geht davon aus, dass in der Ebene die Geraden und auf der Kugel die grössten Kreise die kürzesten Linien sind, und berichtet, dass ihn sein Lehrer, Johann Bernoulli, veranlasst habe, die entsprechende Aufgabe für beliebige Oberflächen zu untersuchen. Mechanisch wird das Problem sofort dadurch gelöst, dass man einen Faden zwischen den beiden gegebenen Punkten der convexen Oberfläche ausspannt. Aber der Mathematiker kann damit nicht zufrieden sein, er verlangt eine analytische Lösung. Diese wird vorbereitet durch die schon erwähnte ausführliche Erklärung der rechtwinkligen Coordinaten im Raume und ihrer Anwendungen auf Oberflächen und Raumcurven. Dann folgt die Lösung der Aufgabe durch die Methode der Maxima und Minima, welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert. Der Rest der Arbeit betrifft die Integration dieser Differentialgleichung für besondere Flächen.

Die Theorie der kürzesten Linien hat Euler auch in seiner Methodus inveniendi (1744) behandelt[31]) und ist in einer nachgelassenen Abhandlung von 1779 auf diesen Gegenstand zurückgekommen[32]), ohne jedoch seinen Sätzen von 1728 etwas Neues hinzuzufügen. Dagegen finden sich neue Resultate in seiner Mechanik (1736)[33]). Er gelangt zu ihnen durch die Aufgabe, die Bewegung eines materiellen Punktes zu bestimmen, der gezwungen ist auf einer krummen Oberfläche zu bleiben. Euler findet, dass der Punkt, wenn keine beschleunigenden Kräfte auf ihn wirken, eine kürzeste Linie beschreibt. Der Beweis hierfür gestaltet sich folgendermassen: Die Geschwindigkeit des Punktes wird in bekannter Weise in die Normal- und Tangential-Componente zerlegt, wodurch bewiesen wird, dass der Krümmungsradius der Bahncurve mit der Flächennormale zusammenfallen, oder was dasselbe ist, dass die Schmiegungsebene der Curve senkrecht auf der Fläche stehen muss. Hieraus ergiebt sich eine Differentialgleichung für die Bahncurve und nun stellt es sich heraus, dass diese Differentialgleichung identisch ist mit derjenigen, welche Euler 1728 für die kürzesten Linien auf der betrachteten Fläche gefunden hatte. Man

verdankt also Euler nicht nur die Einsicht, dass die geodätischen Linien auf einer Fläche als die Trägheitsbahnen eines materiellen Punktes aufgefasst werden können, sondern auch den ersten Beweis für die Fundamentaleigenschaft dieser Linien, die Johann Bernoulli 1697 entdeckt hatte.

Euler's Beweis befriedigt insofern nicht, als eine so wichtige Eigenschaft sich nur nebenbei, auf Grund mechanischer Betrachtungen, ergiebt, und es blieb zu wünschen übrig, dass der Satz über die Schmiegungsebene direct aus der geometrischen Definition der kürzesten Linien hergeleitet würde. Dieser wesentliche Fortschritt wurde aber erst 1806 von Lagrange gemacht[34]), welcher die Gleichungen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene der kürzesten Linie aufstellte und nachwies, dass die Bedingung der Orthogonalität vermöge der Differentialgleichung der kürzesten Linien identisch erfüllt wird.

Es erscheint auffallend, dass weder Euler noch Lagrange das Problem der kürzesten Linien als eine Aufgabe des relativen Minimums angesehen und zu ihrer Lösung die Methode der Multiplicators benutzt haben[35]), bei dessen Einführung der Beweis der Fundamentaleigenschaft so einfach und elegant wird[36]).

Eine neue Periode für die Theorie der geodätischen Linien beginnt 1827 mit den klassischen Disquisitiones generales circa superficies curvas von Gauss, von denen fast die Hälfte den geodätischen Linien gewidmet ist. Die neuen Gedanken, welche bei Gauss auftreten, haben ihre Vorgeschichte. Eine eindringende Beschäftigung mit den geodätischen Linien besonderer Flächen, bei denen es möglich ist ihre Eigenschaften zu übersehen, musste vorhergehen, ehe die allgemeine Theorie Fortschritte machen konnte. Dies im Einzelnen nachzuweisen soll in den beiden nächsten Abschnitten versucht werden, von denen der erste die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen und den damit eng verbundenen Begriff der Flächenbiegung behandelt, während der zweite den geodätischen Linien der Rotationsflächen gewidmet ist, deren Beziehung zur Gradmessung die Theorie der geodätischen Dreiecke auf krummen Oberflächen ihren Ursprung verdankt.

II. Die kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen.

In seiner Abhandlung vom Mai 1698 hatte Jacob Bernoulli die kürzesten Linien auf einem Kreiskegel mittelst Quadraturen bestimmt und aus den gefundenen Gleichungen geschlossen, dass sie sich schlangenförmig um den Kegel herum winden[38]). Johann Bernoulli zeigte aber im October 1698, dass dieses Problem sich viel einfacher lösen lässt[39]), indem man die Kegelfläche auf eine Ebene abwickelt. Es müssen nämlich kürzeste Linien bei der Abwickelung kürzeste Linien bleiben, und dabei gehen die gesuchten Curven in gerade Linien der Ebene über. Zeichnet man also eine gerade Linie in der Ebene, und wickelt diese auf den Kreiskegel auf, so erhält man unmittelbar eine kürzeste Linie auf dem Kegel und erkennt ihre schlangenförmige Gestalt.

Auch diese Lösung beweist Johann Bernoulli's ausserordentliche Erfindungskraft. Eine krumme Oberfläche sich als biegsam vorzustellen war ihm freilich nicht fremd, wie das Problem der Segelfläche zeigt, welches er 1692 untersucht hatte[40]). Aber hier wird zum ersten Male die Abwickelung krummer Oberflächen zur Lösung einer Aufgabe verwendet.

Jacob Bernoulli hat, wie eine Abhandlung aus seinem Nachlasse zeigt[41]), die Idee seines Bruders verallgemeinert, indem er bei einem beliebigen Kegel das Problem der kürzesten Linien mit Hilfe des Princips der Abwickelung löste und Euler hat es 1728 nicht nur für den allgemeinen Kegel, sondern auch für den allgemeinen Cylinder benutzt[42]).

Noch weiter aber ging Johann Bernoulli in einem Zusatz, welchen er jener Abhandlung vom Jahre 1728 in seinen gesammelten Werken hinzugefügt hat[43]); er hatte nämlich die kühne Idee auch eine Rotationsfläche zu biegen, oder genauer, einen sehr schmalen Streifen dieser Fläche auf eine Ebene abzuwickeln. Zu diesem Zwecke denkt er sich die Fläche durch Meridiane und Parallelkreise in kleine ebene Elemente zerlegt, und sie längs einer kürzesten Linie durch Drehungen um die Tangenten der Meridiancurven in einen ebenen Streifen übergeführt. Hierbei muss die kürzeste Linie wieder in eine Ge-

rade übergehen und aus dieser Forderung lässt sich ihre Differentialgleichung herleiten. Bernoulli glaubte, dass ein solches Verfahren nur bei einer Rotationsfläche anwendbar sei, aber auch bei einer beliebigen Fläche führt es zum Ziele und liefert sogar einen elementaren geometrischen Beweis dafür, dass die Schmiegungsebene der kürzesten Linie die Flächennormale enthält [44]).

Dass die Abwickelung von Flächen die Mathematiker des 18. Jahrhunderts interessirte, zeigen Untersuchungen von Pitot, Clairaut und Frezier. Pitot behandelte 1724 die Abwickelung des Kreiscylinders auf die Ebene [45]) und fand den schönen Satz: Die Ellipse, welche ein Kreiscylinder aus einer Ebene ausschneidet, die mit seiner Axe den Winkel von 45° bildet, ergiebt bei Abwickelung des Cylinders auf eine Ebene die Sinuslinie. Clairaut hat später in seinen Recherches 1731 die allgemeine Aufgabe gelöst [46]), die Gleichung der ebenen Curve zu bestimmen, in welche eine auf einem Cylinder befindliche Raumcurve bei dessen Biegung in eine Ebene übergeht. Ganz ausführlich aber hat Frezier in seinem grossen Werke über Architektur 1737 die Abwickelung von krummen Flächen behandelt, nachdem bereits Derand 1643 in einem Werke über denselben Gegenstand krumme Oberflächen als biegsame, dünne Platten aufgefasst hatte [47]). Frezier versteht unter développement immer Abwickelung auf eine Ebene und zeigt zum Beispiel, dass eine Schraubenlinie auf einem Kreiscylinder durch développement in eine gerade Linie übergeht. Aber auch eine Kugel wickelt er auf eine Ebene ab, indem er sie »hinreichend genau für die Bedürfnisse der Praxis« durch ein Polyeder ersetzt, und dieses so zerschneidet, dass die einzelnen Streifen auf eine Ebene abwickelbar sind [48]).

Dass es ausser Kegeln und Cylindern noch andere Flächen giebt, welche sich ohne Unterbrechung ihres Zusammenhanges auf eine Ebene abwickeln lassen, haben Euler und Monge 1771 unabhängig von einander gefunden. Monge [49]) wollte der Theorie der Evoluten ebener Curven, auf welche Huygens durch die Aufgabe des tautochronen Pendels geführt worden war [50]), eine entsprechende Theorie für Raumcurven an die Seite stellen. Zu diesem Zwecke bildet er sich die Fläche, welche von den Normalebenen der Raumcurve umhüllt wird und zeigt, dass gewisse Curven auf dieser Fläche den Evoluten der ebenen Curven ent-

sprechen. Diese Evoluten sind kürzeste Linien jener Fläche, weil sie bei der Abwickelung auf eine Ebene in gerade Linien übergehen. Darauf wendet sich MONGE zur allgemeinen Theorie der abwickelbaren Flächen. Es ist augenscheinlich, meint er, dass jede solche Fläche unendlich viele gerade Linien enthält, von denen je zwei aufeinander folgende in einer Ebene liegen. Der Ort der Schnittpunkte dieser Geraden ist eine Raumcurve, die Rückkehrkante, in welcher die beiden Schalen (nappes) der Fläche sich vereinigen, und die Geraden der Fläche sind identisch mit den Tangenten der Rückkehrkante[51]).

EULER[52]) geht direct von der Aufgabe aus, dass alle Flächen ermittelt werden sollen, welche sich auf eine Ebene abwickeln lassen, und indem er der Anschauung entnimmt, dass diese Flächen geradlinig sein müssen, gelingt es ihm ihre allgemeinen Gleichungen herzustellen. EULER's Abhandlung veranlasste MONGE zu einer zweiten Untersuchung, welche er 1775 der Pariser Akademie vorlegte[53]); in dieser findet sich zum ersten Male die bekannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch welche die abwickelbaren Flächen charakterisirt werden. Die Ableitung dieser partiellen Differentialgleichung war von grosser Bedeutung für die Betrachtungsweise der krummen Oberflächen, welche MONGE in seinen späteren Arbeiten anwandte. Er suchte nämlich auch für andere geometrisch definirte Familien von Flächen partielle Differentialgleichungen zu finden und ordnete umgekehrt jeder partiellen Differentialgleichung eine Flächenfamilie zu.

Vollständig erledigt wurde die Frage nach allen abwickelbaren Flächen erst 1827, als GAUSS, ohne die Geradlinigkeit vorauszusetzen, bewies, dass jede abwickelbare Fläche nothwendig das Krümmungsmaass Null hat und daher jener partiellen Differentialgleichung genügt[54]).

GAUSS wendet hierbei sein allgemeines Theorem an, dass das Krümmungsmaass einer Fläche bei ihrer Biegung unverändert bleibt. Bei der Wichtigkeit, welche der Begriff der Biegung für die geodätischen Linien hat, ist es angebracht auf seine Geschichte näher einzugehen. Wenn auch im 18. Jahrhundert wiederholt Biegungen von Flächen betrachtet werden waren, so hatte man sich doch durchaus auf die Abwickelung auf eine Ebene beschränkt. Eine allgemeinere Auffassung aber sollte sich auf ganz unerwartete Weise aus Untersuchungen der

mathematischen Physik ergeben. Es ist bekannt, dass Chladni's akustische Versuche, bei denen die Schwingungen tönender Platten sichtbar gemacht wurden, am Anfange dieses Jahrhunderts grosses Aufsehen machten[55]), und als Chladni nach Paris kam, interessirte sich Napoléon so sehr für diese Experimente, dass er das Institut National zu der Preisaufgabe veranlasste, man solle die mathematische Theorie der Schwingungen von Platten entwickeln[56]). Die Lösung dieser Aufgabe, welche Lagrange als ausserordentlich schwierig bezeichnet hatte, in Angriff zu nehmen wagte Sophie Germain, die ihre erste Arbeit über diesen Gegenstand 1811 zur Preisbewerbung einreichte, ohne jedoch den Preis zu erhalten, da ihre Beweise nicht völlig genügten. Als indess die Aufgabe wiederholt wurde, gelang es ihr 1815 eine befriedigende Lösung derselben zu liefern[57]).

Diese Untersuchungen, welche damals die allgemeine Aufmerksamkeit erregten, wurden die Veranlassung, dass Lagrange in der zweiten Auflage seiner analytischen Mechanik (1811) das Problem behandelte[58]): man solle die Gestalt bestimmen, welche eine elastische Fläche annimmt, um sich gegenüber der Einwirkung von Kräften ins Gleichgewicht zu setzen. Nachdem Lagrange die Bedingungen hierfür aufgestellt hat, specialisirt er die Aufgabe dahin, dass die Fläche zwar noch biegsam aber nicht mehr ausdehnbar sei, und gelangt so zu der Frage nach der Gleichgewichtsgestalt einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche, welche bald darauf auch von Poisson[59]) behandelt wurde und in neuester Zeit Gegenstand interessanter Untersuchungen geworden ist[60]).

Lagrange verdankt man ferner ein wichtiges Theorem über die Biegung krummer Flächen, welches besagt, dass eine geschlossene und convexe Fläche als Ganzes nicht biegsam ist[61]). Dieses Theorem ist die Consequenz eines Satzes über das Polyeder, welchen Cauchy (1812) bewiesen hatte[62]), des Satzes nämlich, dass zwei convexe Polyeder, welche dieselbe Anzahl von Seitenflächen haben, und deren entsprechende Seitenflächen paarweise congruent sind, mit einander identisch sein müssen, was bereits Euklid behauptet hatte.

Der Begriff der Biegung krummer Oberflächen ist demnach keineswegs in den Disquisitiones generales zuerst aufgetreten. Aber auch in anderer Richtung haben Gauss' Unter-

suchungen Berührungspunkte mit älteren Ideen. Sein Krümmungsmaass findet sich nämlich, allerdings in ganz anderem Zusammenhange, bereits in einer Abhandlung von OLINDE RODRIGUES[63]) von 1815. Dieser zeigte, dass die Abbildung eines Flächenelementes auf die Kugel vom Radius 1 mittelst paralleler Normalen sich zu dem Flächenelement verhält, wie das Product der beiden zugehörigen Hauptkrümmungen zu Eins. Er folgert daraus, dass das Doppelintegral, welches GAUSS später als curvatura integra bezeichnete, den Inhalt des Stückes der Kugeloberfläche angiebt, welches durch jene Abbildung erhalten wird.

Freilich, dass das Product der Hauptkrümmungen zu der Biegung von Flächen eine Beziehung habe, hat RODRIGUES nicht geahnt, und einen so tiefliegenden Zusammenhang zu entdecken war dem gewaltigen Genie von GAUSS vorbehalten. Erst GAUSS erkannte — vermuthlich auf Grund seiner Untersuchungen über conforme Abbildung —, dass es Eigenschaften krummer Oberflächen giebt, welche nur von der Form ihres Linienelementes abhängen und daher Biegungen gegenüber invariant sind. Eine solche Biegungsinvariante ist das GAUSS'sche Krümmungsmaass. Aber auch die kürzesten Linien auf einer Fläche behalten, wie GAUSS ausdrücklich hervorgehoben hat, bei dieser Transformation die Minimaleigenschaft. Kennt man daher die geodätischen Linien einer Fläche, so sind diese Linien auch für ihre Biegungsflächen bestimmt. Im Besonderen sind also die geodätischen Linien der auf eine Ebene abwickelbaren Flächen als bekannt anzusehen.

III. Ueber die geodätischen Linien auf Rotationsflächen.

Eine zweite Flächenfamilie, bei welcher die Bestimmung der geodätischen Linien gelingt, bilden die Rotationsflächen. Es ist schon erwähnt worden, das JACOB BERNOULLI in seiner Abhandlung vom Mai 1698 die Ermittelung dieser Linien auf Quadraturen zurückführte[64]). Die Methode, welche ihn zu seinem Resultate führte, das er ohne Beweis veröffentlichte, war allerdings, was bereits von dem Herausgeber seines Nachlasses bemerkt worden ist[65]), fehlerhaft, indess das Resultat ist durchaus richtig.

Nach JACOB BERNOULLI hat sich CLAIRAUT[66]) (1733) mit den geo-

dätischen Linien der Rotationsflächen beschäftigt und das wichtige Theorem bewiesen, dass für jede solche Linie das Product aus dem Radius des Parallelkreises und dem Sinus des Winkels, den ihre Tangente mit dem Meridian bildet, einen constanten Werth hat. Clairaut wurde zu diesen Untersuchungen veranlasst durch seine Theilnahme an den grossen Gradmessungen, welche seit 1669 in Frankreich vorgenommen worden sind, und die zu dem Resultate führten, dass die Gestalt der Erde merklich von der Kugelform abweiche. Man glaubte aber mit grosser Näherung als Gestalt der Erde ein Rotationsellipsoid annehmen zu dürfen, und es war daher für die geodätischen Messungen von fundamentaler Bedeutung, die kürzesten Linien einer solchen Fläche zu bestimmen. Clairaut hat diesem Gegenstande noch eine zweite Abhandlung von 1739 gewidmet[67]), in welcher er zeigte, wie man die kürzesten Linien eines Rotationsellipsoids, welches wenig von der Kugelgestalt abweicht, durch Entwickelung nach Potenzen der Exentricität näherungsweise bestimmen kann.

Die grossen Gradmessungen in Lappland (1736)[68]) und Peru (1735/45)[69]) gaben Gelegenheit zur Anwendung der von Clairaut entwickelten Theorie. Das Ergebniss dieser mühevollen Beobachtungen war die Einsicht, dass die Erde nicht, wie Cassini (1718) auf Grund der französischen Gradmessungen angenommen[70]), ein gestrecktes sondern ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei, was Newton bereits 1686 aus der Hypothese eines ehemaligen flüssigen Zustandes der Erde gefolgert hatte[71]). Um die Grösse der Abplattung genauer zu bestimmen, waren indess neue schärfere Gradmessungen erforderlich, und diese wurden in Frankreich gegen Ende des Jahrhunderts unter der Leitung von Legendre ausgeführt. Die Grundlage dieser Messungen musste eine Theorie der geodätischen Dreiecke auf Sphäroiden sein, welche wenig von der Kugelgestalt abwichen. Diesem Gegenstand hatte bereits Euler 1753[72]) eine längere Abhandlung gewidmet, in welcher er die Elemente einer sphäroidischen Trigonometrie mit besonderer Rücksicht auf ihre praktischen Anwendungen entwickelt hatte; und ähnliche Untersuchungen waren 1778 von Dyonis du Séjour angestellt worden[73]). Von Legendre besitzen wir hierüber eine schöne Abhandlung vom Jahre 1787[74]), in welcher er ein nach ihm benanntes Theorem herleitet, welches sich auf die Zurückführung

sphäroidischer Dreiecke auf ebene Dreiecke bezieht; dieses Theorem lehrt, welche Winkel das ebene Dreieck hat, dessen Seiten ebenso lang sind wie diejenigen des sphäroidischen Dreiecks.

Eine ganz neue Bedeutung gewannen diese Untersuchungen, als es sich 1791 um die Einführung des neuen Maasssystems handelte. Als Grundeinheit wurde der zehnmillionste Theil des Erdquadranten definirt, und zur genauen Bestimmung des Meters eine neue grosse Gradmessung, nämlich die des Meridians zwischen Dünkirchen und Barcelona vorgenommen [75]; die theoretischen Betrachtungen, zu welchen Legendre hierbei angeregt wurde, sind in einer zweiten Abhandlung von 1806 niedergelegt [76].

Es ist bekannt, dass im Laufe des Jahrhunderts diese Gradmessungen über ganz Europa ausgedehnt wurden, und dass sich recht erhebliche Abweichungen der Erdgestalt vom Rotationsellipsoid ergaben. An diesen Messungen war auch Gauss betheiligt, und er hat ihnen viel Zeit und Mühe gewidmet [77]. Die Geodäsie verdankt ihm die Erfindung des Heliotropen (1821), welche Beobachtungen von einer Genauigkeit gestattete, wie man sie früher nicht für möglich gehalten hatte [78], die Einführung der Methode der kleinsten Quadrate, welche die beste Verwerthung der Beobachtungen ermöglichte [79], und endlich die Sicherstellung ihrer theoretischen Grundlagen, welche sie unabhängig macht von der Hypothese des Rotationsellipsoids [80].

Es ist von mathematischer Seite bedauert worden, dass das Interesse für Geodäsie Gauss von mathematischen Speculationen abgehalten hat. Indess hat die Entwickelung der Mathematik immer die fruchtbarsten Anregungen durch die Fragen erfahren, welche von Seiten anderer Disciplinen an sie gestellt wurden. Es genügt an die Zusammenhänge zu erinnern, welche zwischen Malerei und Perspective, Architektur und beschreibender Geometrie, Mechanik und Infinitesimalcalcül bestehen, und man darf wohl sagen, dass die Forderungen, welche die Gradmessungen an die Mathematik stellten, zur Ausbildung der Flächentheorie erheblich beigetragen haben [81]. Um einen Punkt hervorzuheben, verlangte die Praxis eine Theorie der geodätischen Dreiecke auf Flächen, von denen man nur weiss, dass sie wenig von der Kugelgestalt abweichen, und die Verallgemeinerung des Legendre'schen Satzes auf solche Dreiecke ist gewiss für Gauss

ein Zielpunkt der Forschung gewesen. Hiermit soll nicht geleugnet werden, dass auch noch andere Gedankenreihen für die Entstehung der Disquisitiones generales von Bedeutung waren; zum Beispiel dürften Gauss' Ansichten über die Axiome der Geometrie mitgewirkt haben.

Der tiefgreifende Einfluss, welchen die Beziehung zur Gradmessung auf die Theorie der geodätischen Linien gehabt hat, kommt zum Ausdruck in dem Sprachgebrauche, welcher allen kürzesten Linien den eben gebrauchten Namen beilegt. Wie diese Bezeichnungsweise sich allmählich entwickelt hat, soll zum Schluss dargelegt werden.

Das Wort γεωδαισία kommt gelegentlich schon bei Aristoteles vor, der es statt γεωμετρία gebraucht[82]). In mittelalterlichen Schriften findet sich nach Du Cange geodaesia nicht vor[83]), und es tritt erst wieder auf, als zur Zeit der Renaissance das Studium der griechischen Schriftsteller in griechischer Sprache von neuem aufgenommen wurde. Ich finde, dass schon Conrad von Ulm (1580) das Wort Geodäsie für Feldmessung gebraucht[84]). Auch Thomas Fink (1583)[85]), und Bartholomäus Pitiscus (1595)[86]) wenden es in dieser Bedeutung an. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurde es dann gebräuchlich, die Operationen der Gradmessung zum Unterschied von den astronomischen Beobachtungen als geodätische zu bezeichnen; zum Beispiel spricht schon Du Séjour in seiner Abhandlung von 1778 von opérations géodésiques[87]). Da es sich nun bei diesen Messungen wesentlich um die Länge von kürzesten Linien des Erdsphäroids handelte, nannte man diese kürzesten Linien auch geodätische Linien[88]), eine Bezeichnung, welche sich zum Beispiel in Puissant's grossem Traité de Géodésie (1805) findet[89]). Ebenso wendet Bessel (1825)[90]) das Wort geodätische Linie an, es ist ihm gleichbedeutend mit der kürzesten Linie eines Rotationsellipsoids. Dass aber die Bezeichnung geodätische Linie durchaus auf diese Flächen beschränkt war, zeigt eine Berliner Dissertation von Michaelis aus dem Jahre 1837, welche den Titel führt: De lineis brevissimis in datis superficiebus, inprimis de linea geodetica. Jacobi nannte dann in seiner berühmten Note vom Jahre 1839 die kürzesten Linien des dreiaxigen Ellipsoids ebenfalls geodätische Linien[91]). Seine schöne Entdeckung, dass diese Linien mittelst Quadraturen bestimmt werden können, wurde die Veranlassung zu einer Reihe wichtiger Arbeiten

über die kürzesten Linien der Flächen zweiter Ordnung; es genügt hier die Namen Joachimsthal[92]), Chasles[93]), Liouville[94]) und Michael Roberts[95]) zu nennen. In naheliegender Verallgemeinerung übertrug man jetzt den Namen »geodätische Linien« zunächst auf die kürzesten Linien der Flächen zweiter Ordnung, und dann hat Liouville seit 1844 die kürzesten Linien auf einer beliebigen Oberfläche als geodätische Linien bezeichnet.

Liouville drückt sich an der Stelle, wo er diese Bezeichnung zum ersten Male in der verallgemeinerten Bedeutung gebraucht[96]), sehr vorsichtig aus; er definirt nämlich die geodätische Linie einer beliebigen Oberfläche als eine Linie, deren Krümmungsradius stets senkrecht auf der Oberfläche steht. Es ist nicht schwer, den Grund hierfür zu entdecken. Jacobi hatte 1837 in einer Abhandlung über Variationsrechnung[97]), welche für die weitere Entwickelung dieser Disciplin von entscheidender Bedeutung geworden ist, nachgewiesen, dass die Curven, welche der Differentialgleichung der kürzesten Linien genügen, im Allgemeinen nur in einem beschränkten Bereiche die Eigenschaft des Minimums besitzen. Es war daher wünschenswerth einen Namen zu haben, welcher den durch jene Differentialgleichung definirten Curven unabhängig von ihrer Minimaleigenschaft zukommt.

Hieraus erklärt sich, dass der von Liouville vorgeschlagene Name: geodätische Linien allgemeine Annahme gefunden hat.

Die Theorie der geodätischen Linien hat sich seit Gauss, Jacobi und Liouville zu einem umfangreichen und interessanten Kapitel der Infinitesimalgeometrie ausgestaltet. Da aber für die neueren Untersuchungen die ausgezeichnete Darstellung vorliegt, welche Herr Darboux in seinem grossen Werke über Flächentheorie gegeben hat, so will ich hier abbrechen.

Anmerkungen.

1) Johann Bernoulli, Acta Eruditorum, Juni 1696, Seite 264: Problema novum mathematicis propositum; wiederabgedruckt in Johannis Bernoulli Opera omnia, Lausannae et Genevae 1742, T. I, Seite 161.

2) Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum, Lausannae et Genevae 1745, T. I, Seite 172; wieder abgedruckt und vervollständigt in Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, 1. Abth. Bd. III, Halle 1855, Seite 288. Die Lösung wurde veröffentlicht in den Acta Eruditorum, Mai 1697, Seite 201.

3) Johann Bernoulli, Programma editum Groningae, 1697; Opera T. I, Seite 166.

4) Newton, Philosophical Transactions, Januar 1697, Seite 384; wiederabgedruckt Acta Eruditorum, Mai 1697, Seite 223; diese Lösung erschien anonym, es unterliegt aber keinem Zweifel, dass sie von Newton herrührt, vgl. Johann Bernoulli Opera, T. I. Seite 196.

5) L'Hospital, Acta Eruditorum, Mai 1697, Seite 217.

6) Jacob Bernoulli, Acta Eruditorum, Mai 1697, Seite 211; wiederabgedruckt in Jacobi Bernoulli Opera, Genevae 1744, Bd. II, Seite 768.

7) Johann Bernoulli, Journal des Savans, 26. August 1697, Seite 394; Joh. Bernoulli Opera, T. I, Seite 204, Jac. Bernoulli Opera, Bd. II Seite 795.

8) Die Benennungen Conoid und Sphäroid rühren von Archimedes her (*Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*, Ausgabe von Heiberg, Bd. I, Seite 274), welcher damit die Körper bezeichnete, die beziehungsweise durch Rotation einer Ellipse um eine ihrer beiden Axen und einer Parabel um ihre Axe, oder einer Hyperbel um ihre reelle Axe entstehen. Die Unterscheidung der beiden letzten Körper als parabolisches und hyperbolisches Conoid stammt von F. Commandinus (Archimedis Opera nonnulla a Federico Commandino nuper in latinum conversa et commentariis illustrata, Venetiis 1558, Blatt 26).

9) Johann Bernoullis Brief, Commercium Seite 338; Gerhardt, Seite 470.

10) Leibnizens Brief, Commercium Seite 343; Gerhardt, Seite 475.

11) Leibnizens Brief, Commercium Seite 387; Gerhardt, Seite 526.

12) Der Irrthum, dass eine krumme Oberfläche in jedem Punkte eine osculirende Kugel besitze, wurde erst von Euler beseitigt (Histoire de l'Académie royale, année 1760, Berlin 1767, Seite 119: Recherches sur la courbure des surfaces); aber noch 1784 suchte d'Alembert in der Encyclopédie (Abtheilung Mathematik, Art. Courbe, T. I, Seite 464) die Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linien, dass ihre Schmie-

gungsebene senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche steht, dadurch zu beweisen, dass er das Flächenelement durch ein Stückchen Kugeloberfläche ersetzt.

13) JOHANN BERNOULLIS Brief, Commercium, Seite 393, GERHARDT, Seite 532, Ich lasse die Hauptstelle wörtlich folgen: Alium praeterea inveni solvendi modum qui generalissimus est quique in eo fundatur quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum.

14) LEIBNIZENS Brief, Commercium, Seite 397, GERHARDT, Seite 555.

15) JOHANN BERNOULLI, Acta Eruditorum, Mai 1697, Seite 206; Opera, T. I, Seite 187.

16) JOHANN BERNOULLI, Acta Eruditorum, October 1698, Seite 466; Opera, T. I, Seite 262.

17) JACOB BERNOULLI, Acta Eruditorum, Mai 1698, Seite 223; JAC. BERNOULLI, Opera, Bd. II, Seite 796; JOH. BERNOULLI, Opera, T. I, Seite 253, wo als Datum fälschlich Mai 1697 angegeben ist.

18) JOHANN BERNOULLI, Acta Eruditorum, Juni 1691, Seite 274; Opera, T. I, Seite 48.

19) JACOB BERNOULLI, Opera postuma, Art. 6, 7 und 8: Opera, Bd. II, S. 1023—1029.

20) DESCARTES, Géométrie, 1637, Schlussabschnitt des zweiten Buches; DESCARTES denkt sich eine Raumcurve auf zwei zu einander senkrechte Ebenen projicirt, und die ebenen Projectionscurven durch Gleichungen zwischen zwei rechtwinkligen Coordinaten dargestellt, wobei jedesmal die Schnittlinie der beiden Ebenen als die eine Coordinatenaxe zu wählen ist.

21) CHASLES, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Paris 1837, Seite 98 sagt: SCHOOTEN écrivit un commentaire étendu sur la Géométrie de DESCARTES et fit de nombreuses applications de cette méthode dans plusieurs parties de ces Exercitationes Geometricae principalement dans le livre IIIe et dans le livre Ve intitulé: De lineis curvis superiorum generum ex solidi sectione ortis. C'est là que nous trouvons le premier exemple de la méthode des coordonnées appliquée aux courbes considérées dans l'espace; mais il est vrai qu'il y ait question seulement de courbes planes et que SCHOOTEN n'a besoin d'employer que deux coordonnées. Dazu ist zu bemerken: SCHOOTEN's Werk heisst Exercitationes mathematicae (Leyden 1657), das fünfte Buch führt den Titel: Sectiones triginta miscellaneae, jene angebliche Ueberschrift gehört nur dem kurzen Abschnitte 22 des fünften Buches an, in diesem Abschnitt wird die Methode von DESCARTES nicht auf Curven im Raume angewendet, und endlich rührt er gar nicht von SCHOOTEN her, sondern ist ein Brief, den sein Landsmann HUDDE 1654 an ihn gerichtet hatte.

22) Es war also keineswegs, wie CHASLES, Aperçu historique Seite 138 meint, PARENT (1700) der erste, welcher eine Oberfläche durch eine Gleichung zwischen drei Coordinaten darstellte, vielmehr sind bereits

am Ende des 17. Jahrhunderts Leibniz und Johann Bernoulli im Besitze dieser Einsicht gewesen. Für die weitere Ausbildung der analytischen Geometrie des Raumes ist ferner neben Clairaut, welchen Chasles allein nennt, Euler von mindestens ebenso grosser Bedeutung gewesen.

23) Parent, Essais et recherches de Mathématique et de Physique, nouvelle édition, Paris 1715, Bd. II, Seite 181: Des affections des superficies.

24) Leonhard Euler, Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, T. III, ad annum 1728, Petersburg 1732, Seite 110: De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente.

25) Clairaut, Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731.

26) Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita, Petersburg 1736.

27) Euler, Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748, T. II, Appendix de superficiebus.

28) Johann Bernoulli, Opera, T. IV, Seite 108.

29) Clairaut, Mémoires de l'Académie royale, année 1733, Paris 1735, Seite 186: Sur quelques Questions de Maximis et Minimis.

30) Euler, vgl. 24).

31) Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae et Genevae, 1744, Seite 138.

32) Euler, Nova Acta Academiae Petropolitanae, T. XV für 1799, Petersburg 1806, Seite 44: Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda, verfasst Januar 1779.

33) Euler, Mechanica, vgl. 26), T. II, Vorrede, Kap. I, prop. 7 und 8 und Kap. IV: De motu puncti super data superficie.

34) Lagrange, Calcul des fonctions, Paris 1806, Leçon 22; Œuvres publiés par les soins de M. Serret, T. X, Seite 136.

35) Die Zurückführung der Probleme relativer Maxima und Minima auf solche absolute Maxima und Minima mittelst der Methode der Multiplicatoren hatte Euler bereits 1732 auseinandergesetzt: Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, T. VI ad annos 1732/33, Petersburg 1738, Seite 123: Problematum isoperimetricorum in latissimo sensu acceptorum solutio generalis.

36) Vergl. etwa: Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, Seite 139.

37) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, zuerst veröffentlicht in den Commentationes Gottingenses recentiores, Vol. VI, Göttingen 1828, Seite 99; Gauss' Selbstanzeige dieser Arbeit erschien bereits November 1827 in den Göttinger Anzeigen.

38) Jacob Bernoulli, vgl. 17: tota curva conum serpentis in modum ambit.

39) Johann Bernoulli, vgl. 16.

40) Johann Bernoulli, Journal des Savans, April 1692; Opera, T. I, Seite 59: Solution du problème de la courbure, que fait une voile enflée par le vent, vergl. auch die Lectiones mathematicae (1691/92), Opera T. III, Seite 540: De curvatura veli a vento inflati und Seite 542: De curvatura lintei a fluido incumbente. Beide Aufgaben waren übrigens von Jacob Bernoulli gestellt worden.

41) Jacob Bernoulli, vgl. 19, Art. VII.

42) Euler, vgl. 24.

43) Johann Bernoulli, Opera, T. IV, Seite 442.

44) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Theil, 3. Auflage, Leipzig 1880, Seite 62.

45) Pitot, Mémoires de Paris, année 1724, Paris 1726, Seite 107: Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs appellée la compagne de la cycloïde.

46) Clairaut, vgl. 24, S. 74.

47) Derand, L'Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupie des voûtes, Paris 1643, part. I, Chap. 5: Les traits exprimez sur la superficie plane donnent toutes les mesures des paneaux .... lever un paneau ce n'est autre chose que de façonner quelques matière mince comme seroit du fer-blanc ou du carton ... en une figure telle quelle convienne de tous poincts avec la surface du ioient du voulsoir auquel le paneau est destiné.

48) Frezier, La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois ou Traité de Stéréometrie à l'usage de l'Architecture, Bd. I, Strassburg 1737, Seite 349. Die Abwicklung einer Kugel auf eine Ebene tritt übrigens schon bei Flamsteed (1646—1719) auf, welcher behufs Herstellung von Sternkarten eine schmale Zone zwischen zwei Parallelkreisen näherungsweise durch den Mantel eines abgestumpften Kegels ersetzt und diesen auf eine Ebene abwickelt; vergl. Marie, Histoire des Sciences mathématiques et physiques. T. 7. Paris 1885. Seite 56.

49) Monge, Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie des sciences, T. X, Paris 1785, S. 536: Sur les développées et les points singuliers de courbes à double courbure.

50) Huygens, Horologium oscillatorium, Paris 1673, Pars III: De evolutione et dimensione linearum curvarum.

51) Untersuchungen über denselben Gegenstand wurden auch von Monge's Schülern angestellt; Tinseau, Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie des sciences, T. IX, Paris 1780, Seite 593: Sur les surfaces courbes (vorgelegt 1774) und Meusnier, ebendaselbst, T. X, Paris 1785, Seite 477: Sur la courbure des surfaces (vorgelegt 1776).

52) Euler, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, T. XVI für 1771, Petersburg 1772 Seite 3: De solidis quorum superficiem in planum explicare licet.

53) Monge, Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie des sciences, T. IX, Paris 1780, Seite 382: Sur les surfaces développables.

54) Gauss, vgl. 36, Art. XII.

55) Chladni, Akustik, Leipzig 1802, die von ihm selbst verfasste französische Uebersetzung erschien als Traité d'acoustique, Paris 1809.

56) Nouvelle Biographie générale, T. XIX, Paris 1877, Seite 248.

57) Sophie Germain, Recherches sur la théorie des surfaces élastiques, Paris 1820; Sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, Paris 1826.

58) Lagrange, Mécanique analytique, 2. Ausgabe Bd. I, 1811; Statique, sect. V, Chap. 3: De l'équilibre d'un fil ou d'une surface flexible et en même temps extensible et contractible. Man beachte auch, wie klar Lagrange in den Fonctions analytiques (1813) die Ueberführung einer abwickelbaren Fläche in eine Ebene beschreibt (vergl. Œuvres, T. IX, Seite 279).

59) Poisson, Mémoires de l'Institut, année 1812, part. II, Seite 167: Mémoire sur les surfaces élastiques; und Bulletin de la Société Philomatique de Paris, année 1814, S. 47.

60) Lecornu, Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 48, 1880, Seite 1: Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles; Beltrami, Memorie di Bologna, serie VI, T. III, Januar 1882, S. 218: Sul equilibrio delle superficie flessibile ed inextensibile; Kötter, Ueber das Gleichgewicht biegsamer, unausdehnbarer Flächen, Dissertation, Halle 1883, vgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103, S. 44.

61) Lagrange theilte Cauchy dies Theorem 1812 mit, wie dieser Comptes rendus, T. XXI, 1845, S. 564 berichtet. Uebrigens sagt Minding am Schlusse seiner bekannten Abhandlung: Ueber die Biegung krummer Flächen (Crelles Journal, Bd. 18, 1838, S. 368): »Um Missverständnissen vorzubeugen bemerke ich noch, dass bekanntlich eine in sich geschlossene convexe Fläche als unverändertes Ganzes unbiegsam ist.«

62) Cauchy, Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 16, 1813, S. 87: Sur les polygones et les polyèdres.

63) Olinde Rodrigues, Correspondance sur l'Ecole polytechnique, T. III, 1815, S. 162 und Bulletin de la Société philomatique de Paris, année 1815, S. 34: Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces.

64) Jacob Bernoulli, vgl. 17.

65) Jacob Bernoulli, Opera, Bd. II, S. 1024. Der anonyme Herausgeber sagt: »Mirum auctorem pervenisse ad conclusionem legitimam per hypothesin fallacem«.

66) Clairaut, Mémoires de l'Académie des sciences, année 1733, Paris 1735, S. 406: Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieures méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre.

67) Clairaut, ebendaselbst, année 1739, Paris 1740: Suite du mémoire de 1733.

68) Die Gradmessungen in Lappland wurden ausgeführt von Maupertuis, Clairaut, Lemonnier, Outhier und Celsius; vgl. Maupertuis: Sur la figure de la terre, Paris 1738 und Clairaut's gleichnamiges Werk, Paris 1743.

69) Die Gradmessung in Peru führten aus Bouguer und Condamine, vgl. die Pariser Memoiren von 1736, 1744 und 1745.

70) Cassini, Sur la figure de la terre, Paris 1718.

71) Newton, Principia philosophiae naturalis mathematica, London 1686, Buch III, prop. 18, 19, 20.

72) Euler, Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1753, Berlin 1755, S. 258: Eléments de la Trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits.

73) Du Séjour, Mémoires de l'Académie des sciences, année 1778, Paris 1784, S. 73: Nouvelles méthodes analytiques pour résoudre différentes questions astronomiques; treizième mémoire.

74) Legendre, Mémoires de l'Académie des sciences, année 1787, Paris 1789, S. 352: Sur les opérations trignométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre.

75) Delambre, Base du système métrique, Paris 1810/14.

76) Legendre, Mémoires de l'Institut national, T. VII, 1806, S. 130: Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde.

77) Gauss führte die Hannoversche Gradmessung während der Jahre 1821 bis 1824 aus; vgl. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 54.

78) Vgl. Sartorius von Walpershausen, a. a. O. S. 52.

79) Gauss, Theoria motus corporum coelestium 1809 und einige spätere Abhandlungen.

80) Neben den Disquisitiones generales von 1827 kommen noch zwei grössere Abhandlungen: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie 1844 und 1847 in Betracht; Gauss' Absicht ein grösseres Werk zu verfassen, welches seine geodätischen Untersuchungen in zusammenhängender Weise darstellte, ist nicht zur Ausführung gekommen.

81) Vgl. hierüber die Bemerkungen von Herrn Baill: Streifbilder auf die Geschichte der Geometrie, Mittheilungen des math.-naturw. Vereins in Württemberg 1894.

82) H. Stephanus, Thesaurus linguae graecae, neue Ausgabe, Bd. II, Paris 1833, S. 596.

83) Du Cange, Glossarium mediae et infimae latinitatis. Bd. III, Paris 1844, S. 510.

84) Conrad von Ulm, Geodaisia das iſt: Von gewiſſer uñ bewährter Feldmeſſung | eyn gründlicher Bericht. Durch Conraten von Ulm | Prediger zu Schaffhauſen am Rhein | auffs neue zugericht und demonſtrirt. Zu Straßburg | 1580.

85) Thomae Fincii Flenspurgensis Geometriae rotundi libri XIV, Basileae 1583.

86) Bartolomaei Pitisci Grunbergensis Trigonometria sive de dimensione triangulorum libri quinque item problematum variorũ nempe geodaeticorum etc., libri decem Heidelberg 1595; mir ist nur die Ausgabe von 1612, erschienen in Frankfurt, zugänglich gewesen.

87) Du Séjour, vgl. 73, S. 73.

88) Marie, Histoire des sciences mathématiques et physiques, Theil X, Paris 1887, S. 114 behauptet, dass die Bezeichnung »geodätische Linien«

zum ersten Male in Legendre's schon erwähnter Abhandlung von 1787, vgl. 74 auftritt. Mir ist es indess nicht gelungen den Ausdruck darin zu finden, während allerdings »operation géodésique« dort von Legendre gebraucht wird.

89) Puissant, Traité de Géodésie, T. II, Paris 1805, S. 216.

90) Bessel, Astronomische Nachrichten, Bd. IV, 1825, S. 241; wiederabgedruckt in den Gesammelten Abhandlungen Bd. III, Leipzig 1876, S. 5. Es ist übrigens zu bemerken, dass die Bezeichnung »geodätische Linien« in dieser beschränkten Bedeutung auch gegenwärtig noch gebraucht wird, was der betreffende Artikel in Meyer's Konversationslexikon, 4. Auflage, Bd. VII, 1887, S. 124 beweist.

91) Jacobi, Comptes rendus, T. VII. S. 284; dieser Brief Jacobi's an Arago, datirt Königsberg, den 28. December 1838 fehlt in den Gesammelten Werken. Sein Resultat ist ausführlich auseinandergesetzt in den Berliner Monatsberichten April 1839; wieder abgedruckt Gesammelte Werke, Bd. II, S. 57.

92) Joachimthal, Crelles Journal, Bd. 26, 1843, S. 155: Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus.

93) Chasles, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. XI, 1846, S. 5: Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré, und weitere Bemerkungen Comptes rendus T. XXII, S. 68, 343 und 517.

94) Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. IX, 1844, S. 401: De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque, und weitere Bemerkungen ebendaselbst, T. XI, S. 21 und 345, T. XII, S. 440, sowie Comptes rendus, T. XIX, 1844, S. 1261.

95) Michael Roberts, Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. XI, 1846, S. 1: Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

96) Liouville, Journal de Mathématiques, T. IX, 1844, S. 404; Comptes rendus, T. XIX, 1844, S. 1261.

97) Jacobi, Crelles Journal, Bd. 17, 1837, S. 68: Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen der Dynamik, wiederabgedruckt Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 89.

Friedrich Engel, *Die höheren Differentialquotienten.*

Während bei den Punkttransformationen eines Raumes die Dimensionenzahl jeder Punktmannigfaltigkeit dieses Raumes erhalten bleibt, ist das bei den Berührungstransformationen nicht der Fall. In der von Lie geschaffenen Theorie der Berührungstransformationen eines $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n+1} erscheinen daher alle Punktmannigfaltigkeiten des R_{n+1} als mit einander gleichberechtigt, die Punktmannigfaltigkeiten von verschiedener Dimensionenzahl sind nur verschiedene Fälle des allgemeinen Begriffs: Elementmannigfaltigkeit. Es ist bekannt, welche überraschende Einfachheit Lie der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung durch die Einführung dieses Begriffes gegeben hat.

Für Lie sind als Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung des R_{n+1} nicht blos n-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten dieses Raumes zulässig, sondern auch Punktmannigfaltigkeiten, deren Dimensionenzahl geringer ist als n. Es ist nun klar, dass man sich bei Betrachtung von Differentialgleichungen höherer Ordnung auf denselben Standpunkt stellen muss. In der That hat Lie schon längst darauf aufmerksam gemacht, dass eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung im gewöhnlichen Raume unter Umständen von gewissen Curven befriedigt wird. Zum Beispiel wird die Differentialgleichung der Minimalflächen von allen Curven von der Länge Null erfüllt, weshalb auch Lie diesen Curven den Namen »Minimalcurven« gegeben hat.

Meines Wissens hat bisher noch niemand gezeigt, wie man diese begrifflichen Betrachtungen analytisch begründen kann. Während wir in dem Lieschen Begriffe Element und in den Elementcoordinaten einen analytischen Apparat besitzen, der für

Differentialgleichungen erster Ordnung vollkommen ausreicht, fehlt ein derartiger Apparat für die Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung noch gänzlich. Im Folgenden soll ein Anfang gemacht werden, diesem Mangel abzuhelfen.

§ 1.

Wir betrachten hier den gewöhnlichen Raum und werden wenigstens für die Differentialquotienten zweiter Ordnung einen analytischen Apparat entwickeln, der die Gleichberechtigung der Curven und Punkte mit den Flächen auch analytisch zum Ausdruck bringt.

Als Elementmannigfaltigkeit aufgefasst wird die Fläche: $z = f(x, y)$ durch die drei Gleichungen:

$$(1) \qquad z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

dargestellt. Jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q der Fläche ist daher ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung: x, y, z, p, q, r, s, t zugeordnet, dessen Coordinaten aus den Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{cases}$$

unter Zuhülfenahme von (1) berechnet werden können. Anders ist es bei einer Curve: $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$. Als Elementmannigfaltigkeit wird die durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad y = f(x), \quad z = \varphi(x), \quad p = \varphi'(x) - qf'(x)$$

dargestellt, aber die Gleichungen (3) und (2) liefern zusammengenommen nicht zu jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q der Curve ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung, sondern sie liefern ganz unbrauchbare Gleichungen. In der That, aus (3) und (2) folgt wegen der Willkürlichkeit von dx und dq:

$$f' = 0, \quad \varphi'' - qf'' = r + sf'$$
$$1 = 0, \quad s + tf' = 0,$$

was gar keinen Sinn hat.

Woran liegt das? Es kann nur darin seinen Grund haben, dass r, s, t nicht brauchbar sind, wenn man die Elemente zweiter Ordnung einer Curve analytisch darstellen will.

Um diesem Mangel abzuhelfen, deuten wir die Gleichungen (2) geometrisch. Wenn wir $dx:dy:dp:dq$ als homogene Coordinaten in einem Raume von drei Dimensionen auffassen, so stellen die Gleichungen (2) ∞^3 Gerade dar, die einem gewissen linearen Complex angehören, und jedes Werthsystem: r, s, t liefert eine Gerade dieses Complexes. Hieraus geht nun aber sofort hervor, warum r, s, t nicht ausreichen, wenn man die Elemente zweiter Ordnung einer Curve bestimmen will; die Gleichungen (2) stellen nämlich offenbar nicht alle Geraden jenes linearen Complexes dar. Es ist daher zu erwarten, dass wir zu einem andern Ergebnisse gelangen, wenn wir statt r, s, t solche homogene Coordinaten einführen, dass wir alle Geraden unsers linearen Complexes umfassen können.

Wir bewerkstelligen das, indem wir für r, s, t der Reihe nach:

$$-\frac{r}{u}, \quad -\frac{s}{u}, \quad -\frac{t}{u}$$

setzen und zu den vier homogenen Coordinaten r, s, t, u noch eine fünfte v hinzufügen, die mit ihnen durch die Gleichung zweiten Grades:

$$rt - s^2 + uv = 0 \tag{4}$$

verknüpft ist. Dann werden die Geraden unsers linearen Complexes durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} u\,dp + r\,dx + s\,dy &= 0 \\ u\,dq + s\,dx + t\,dy &= 0 \\ t\,dp - s\,dq - v\,dx &= 0 \\ s\,dp - r\,dq + v\,dy &= 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dargestellt und wir sind sicher, dass uns keine Gerade des Complexes entgeht.

Verbinden wir jetzt die Gleichungen (3) und (5), so erhalten wir, da dx und dq willkürlich sind, zur Bestimmung der Elemente zweiter Ordnung: x, y, z, p, q, $r:s:t:u:v$ unsrer Curve die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} r &= [f'(x)]^2\,t \\ s &= -f'(x)\,t \\ u &= 0 \\ v &= \{\varphi''(x) - q f''(x)\}\,t\,, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

von denen die Gleichung (4) offenbar eine Folge ist. Wir finden also, dass jetzt auch bei unsrer Curve jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung zugeordnet ist.

In derselben Weise ergiebt sich, dass die Elemente zweiter Ordnung des Punktes: $x = a$, $y = b$, $z = c$ durch die Gleichungen:

$$r = s = t = u = 0 \tag{7}$$

dargestellt werden; es gehört also auch zu jedem Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q dieses Punktes ein ganz bestimmtes Element zweiter Ordnung.

Unsre Absicht ist nunmehr erreicht. Wir haben für die Elemente zweiter Ordnung solche Coordinaten aufgestellt, dass Flächen, Curven und Punkte als ganz gleichberechtigte Gebilde erscheinen. Wir wollen jetzt nur noch einige Anwendungen von diesen Coordinaten machen.

Es ist klar, dass $u = 0$ in unsern Coordinaten die Differentialgleichung aller Curven ist und $v = 0$ die Differentialgleichung aller abwickelbaren Flächen. Die Monge-Ampèresche Gleichung:

$$\alpha(x, y, z, p, q)\, r + \beta s + \gamma t + \delta (rt - s^2) + \varepsilon = 0$$

wird in unsern Coordinaten eine lineare homogene Gleichung:

$$\alpha r + \beta s + \gamma t + \delta v - \varepsilon u = 0$$

zwischen r, s, t, u, v. Dass sie bei allen Berührungstransformationen in eine Gleichung von derselben Form übergeht, kommt darin zum Ausdruck, dass r, s, t, u, v bei jeder Berührungstransformation linear und homogen transformirt werden.

Schliesslich wollen wir noch alle Curven aufsuchen, die der Differentialgleichung der Minimalflächen genügen.

Die Differentialgleichung der Minimalflächen lautet:

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0\ , \tag{8}$$

sie behält also in unsern Coordinaten ihre bekannte Form. Soll nun die Curve: $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ dieser Gleichung genügen, so muss die Gleichung (8) vermöge (3) und (6) bestehen, es muss also:

$$(1 + q^2) f'^2 t + 2(\varphi' - qf')\, qf' t + (1 + (\varphi' - qf')^2)\, t = 0$$

werden, oder, da t nicht verschwinden kann:

$$1 + f'^2 + \varphi'^2 = 0\ . \tag{9}$$

Damit ist das von LIE auf anderm Wege gefundene Ergebniss, dass die Minimalcurven der Differentialgleichung der Minimalflächen genügen, analytisch begründet.

Es liegt auf der Hand, dass man die vorhin durchgeführten Betrachtungen auch auf die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung in Räumen von mehr Dimensionen übertragen kann. Ich behalte mir vor, das später einmal auszuführen.

§ 2.

Die Coordinaten: x, y, z, p, q der Elemente erster Ordnung sind mit zwei Mängeln behaftet, sie versagen nämlich erstens für alle Elemente, deren Ebenen der z-Axe parallel sind, und zweitens für alle Elemente, deren Punkte unendlich fern sind. Deshalb gehen uns alle Elementmannigfaltigkeiten verloren, die lauter Elemente von diesen beiden Arten enthalten. Man kann aber diese beiden Mängel vermeiden, wenn man die CLEBSCHschen Connexcoordinaten anwendet[1]), wenn man also jedes Element erster Ordnung durch acht Grössen: $x_1 \dots x_4, u_1 \dots u_4$ bestimmt, zwischen denen die Gleichung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

besteht.

Unsre Coordinaten für die Elemente zweiter Ordnung sind natürlich mit denselben Mängeln behaftet. Es fragt sich daher, ob und wie man diesen Mängeln abhelfen kann, das heisst, ob man für die Elemente zweiter und höherer Ordnung einen analytischen Apparat schaffen kann, der dasselbe leistet wie die CLEBSCHschen Connexcoordinaten[2]). Wir wollen jetzt zeigen, wie diese Aufgabe für die Ebene gelöst werden kann, und dann wenigstens andeuten, wie sie auch für den gewöhnlichen Raum und für Räume von höherer Dimensionenzahl lösbar ist.

---

1) Der erste der beiden Mängel war übrigens schon früher von JACOBI beseitigt worden, durch Einführung dreier Verhältnissgrössen $p_1 : p_2 : p_3$ an Stelle von p, q.

2) Im Jahre 1884 theilte mir F. KLEIN mit, dass er sich schon mit dieser Frage beschäftigt habe, ohne zu einem befriedigenden Ergebnisse zu gelangen. Ich habe seitdem öfter versucht, die CLEBSCHschen Connexcoordinaten auf Differentialquotienten höherer Ordnung auszudehnen, aber erst vor Kurzem bin ich zu den hier mitgetheilten Ergebnissen gelangt.

In der Ebene bedeutet die Gleichung: $dy - y'dx = 0$ nach Lies Ausdrucksweise, dass die beiden unendlich benachbarten Elemente erster Ordnung: x, y, y' und $x+dx, y+dy, y'+dy'$ vereinigt liegen. Die Gleichungen:

$$dy - y'dx = 0\,, \quad dy' - y''dx = 0$$

zeigen daher, dass je zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Elemente erster Ordnung ein Element zweiter Ordnung bestimmen.

Deuten wir nun x, y, y' als Punktcoordinaten im gewöhnlichen Raume, so können wir je zwei unendlich benachbarte Werthsysteme: x, y, y' und $x+dx, y+dy, y'+dy'$ als Bestimmungsstücke eines Linienelements dieses Raumes auffassen, das heisst als Bestimmungsstücke einer Figur, die aus einem Punkte und aus einer hindurchgehenden Geraden besteht. Die ∞^4 Elemente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' der Ebene werden dann im Raume offenbar durch die ∞^4 Linienelemente abgebildet, die der Gleichung: $dy - y'dx = 0$ genügen.

Hiermit ist aber noch keine eindeutig umkehrbare Abbildung der ∞^4 Elemente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' der Ebene gefunden, denn die ∞^3 Elemente erster Ordnung: x, y, y', das heisst die Linienelemente der Ebene lassen sich nicht eindeutig umkehrbar auf die ∞^3 Punkte eines ebenen dreifach ausgedehnten Raumes abbilden. Dagegen gelangen wir sofort zu einer eindeutig umkehrbaren Abbildung der Elemente zweiter Ordnung der Ebene, wenn wir die Linienelemente der Ebene eindeutig umkehrbar auf die Punkte eines krummen R_3 in einem höheren ebenen Raume abbilden.

Eine solche Abbildung der Linienelemente der Ebene hat Lie gegeben. Jedem Linienelemente der Ebene ist nämlich eindeutig umkehrbar eine ganz bestimmte infinitesimale projective Transformation der Ebene zugeordnet und zwar die, bei der alle Punkte auf der Geraden und alle Geraden durch den Punkt des Linienelements in Ruhe bleiben. Demnach lassen sich die ∞^3 Linienelemente der Ebene eindeutig umkehrbar auf die ∞^3 Punkte einer krummen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_3 abbilden, die in dem ebenen R_7 der ∞^7 infinitesimalen projectiven Transformationen der Ebene liegt. Diese M_3 gestattet eine achtgliedrige projective Gruppe des R_7, nämlich die adjungirte Gruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene.

Die ∞^4 Elemente zweiter Ordnung: x, y, y', y'' der Ebene werden nun in dem R_7 durch gewisse ∞^4 Linienelemente jener M_3 abgebildet und zwar derart, dass jedem Punkte der M_3 ein ebenes Büschel von ∞^1 solchen Linienelementen der M_3 zugeordnet ist, die Bilder vom Elementen zweiter Ordnung der Ebene sind. Bilden wir daher die ∞^{13} Linienelemente des R_7 eindeutig umkehrbar auf die Punkte einer krummen Mannigfaltigkeit von dreizehn Dimensionen in einem höheren ebenen Raume ab — es ist das jedenfalls in einem ebenen Raume R_{167} von 167 Dimensionen möglich — so werden die ∞^4 Elemente zweiter Ordnung der Ebene eindeutig umkehrbar auf die ∞^4 Punkte einer krummen vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_4 dieses R_{167} abgebildet. Zugleich ist klar, dass diese M_4 eine achtgliedrige projective Gruppe des R_{167} gestattet, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt ist.

Diese unsre Abbildung der ∞^4 Elemente zweiter Ordnung der Ebene leistet für die Differentialquotienten zweiter Ordnung dasselbe wie die CLEBSCHschen Connexcoordinaten für die erster Ordnung; sie umfasst *alle* Elemente zweiter Ordnung der Ebene.

Genau in derselben Weise erkennt man, dass die ∞^{n+2} Elemente n^{ter} Ordnung: $x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}$ eindeutig umkehrbar auf die ∞^{n+2} Punkte einer krummen M_{n+2} in einem ebenen Raume R von genügend hoher Dimensionenzahl abgebildet werden können und dass diese M_{n+2} bei einer achtgliedrigen projectiven Gruppe G_8 dieses Raumes R invariant bleibt, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt ist. *Es ist klar, dass hierdurch die Bestimmung der Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung der projectiven Gruppe der Ebene auf die Bestimmung der gewöhnlichen Invarianten der projectiven Gruppe G_8 in dem Raume R zurückgeführt ist.*

Im gewöhnlichen Raume haben wir für zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Elemente erster Ordnung die Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{10}$$

und wenn wir zu Elementen zweiter Ordnung übergehen, noch die beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} dp - r\,dx - s\,dy &= 0 \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Hier bestimmen also zwei unendlich benachbarte vereinigt liegende Elemente erster Ordnung nicht blos ein Element zweiter Ordnung, sondern ∞^1 verschiedene.

Deuten wir x, y, z, p, q als Punktcoordinaten in einem R_5, so ordnet die Gleichung (10) jedem Punkte des R_5 ein ebenes Bündel B_3 von ∞^3 Linienelementen zu und die Gleichungen (11) bestimmen in B_3 eine Schaar von ∞^3 ebenen Büscheln von je ∞^1 Linienelementen. Fassen wir die ∞^3 Linienelemente von B_3 als Punkte eines ebenen Raumes von drei Dimensionen auf, so erscheinen diese ∞^3 Büschel als die Geraden eines gewissen linearen Complexes (vgl. S. 470), der offenbar durch die Gleichung:

$$(12) \qquad dx\,\delta p - dp\,\delta x + dy\,\delta q - dq\,\delta y = 0$$

dargestellt wird. Demnach werden die ∞^8 Elemente zweiter Ordnung: x, y, z, p, q, r, s, t des gewöhnlichen Raumes im R_5 durch ∞^8 M_2-Elemente dargestellt; unter einem M_2-Element verstehen wir dabei mit Lie eine Figur, die aus einem Punkte und aus einer hindurchgehenden ebenen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit besteht.

Aber diese Abbildung der Elemente zweiter Ordnung des gewöhnlichen Raumes ist noch nicht eindeutig umkehrbar. Um eine eindeutig umkehrbare Abbildung zu erhalten, bilden wir zunächst nach dem Vorgange von Lie die ∞^5 Elemente erster Ordnung, also die Flächenelemente des gewöhnlichen Raumes eindeutig umkehrbar auf die ∞^5 Punkte einer krummen M_5 in einem ebenen R_{14} ab, nämlich in dem ebenen R_{14} der ∞^{14} infinitesimalen projectiven Transformationen des gewöhnlichen Raumes. Die ∞^8 Elemente zweiter Ordnung des R_3 werden dann in dem R_{14} durch ∞^8 M_2-Elemente dieser M_5 abgebildet und zwar so, dass durch jeden Punkt der M_5 ∞^3 dieser ∞^8 M_2-Elemente gehen. Ueberdies ist zu bemerken, dass unsre M_5 eine fünfzehngliedrige projective Gruppe des R_{14} gestattet.

Nunmehr bilden wir die sämmtlichen M_2-Elemente des R_{14} eindeutig umkehrbar auf die Punkte einer krummen Mannigfaltigkeit in einem genügend hohen ebenen Raume R ab. Dann werden die ∞^8 Elemente 2. O. des gewöhnlichen Raumes in R eindeutig umkehrbar durch die ∞^8 Punkte einer krummen Mannigfaltigkeit M_8 abgebildet und diese M_8 gestattet wiederum eine fünfzehngliedrige projective Gruppe des Raumes R, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_3 gleichzusammengesetzt ist.

In ähnlicher Weise kann man die Elemente n^{ter} Ordnung des gewöhnlichen Raumes auf die Punkte einer krummen Mannigfaltigkeit in einem ebenen Raume von genügend grosser Dimensionenzahl eindeutig umkehrbar abbilden und erreicht dadurch genau dasselbe wie für die Elemente erster Ordnung durch die CLEBSCHschen Connexcoordinaten. Zugleich ergiebt sich aber, *dass die Bestimmung der Differentialinvarianten n^{ter} Ordnung der allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes auf die Bestimmung der gewöhnlichen Invarianten einer fünfzehngliedrigen projectiven Gruppe in einem ebenen Raume von genügender hoher Dimensionenzahl zurückgeführt werden kann.*

Es versteht sich von selbst, dass alle diese Betrachtungen auch auf Räume von mehr als drei Dimensionen anwendbar sind.

Ich habe im Vorstehenden mich überall damit begnügt, die Möglichkeit der besprochenen Abbildungen darzuthun. Es bliebe jetzt noch zu zeigen, wie sich die Formeln gestalten, die jene Abbildungen analytisch ausdrücken. Ich will aber hier darauf nicht weiter eingehen und will nur erwähnen, dass die erforderlichen Formeln allerdings schon in den einfachsten Fällen recht weitläufig werden. Dieser Umstand beeinträchtigt natürlich die praktische Anwendbarkeit unsrer Abbildungen ausserordentlich und stellt sie sogar in Frage. Dagegen kann er ihrem theoretischen Werthe keinen Abbruch thun, denn es ist sicher eine äusserst merkwürdige Thatsache, dass die Theorie der Differentialinvarianten jeder projectiven Gruppe auf die Theorie der gewöhnlichen Invarianten einer Reihe von projectiven Gruppen in höheren Räumen zurückgeführt werden kann.

Zum Schlusse möchte ich noch ausdrücklich erklären, dass ich, was die Methode der Abbildung auf höhere Räume anlangt, von meinem Freunde STUDY sehr viel gelernt habe. Namentlich ist seine Abbildung der Kegelschnitte der Ebene auf die Punkte einer krummen M_5 in einem ebenen R_{21} für mich besonders anregend gewesen. Auch der schriftliche und mündliche Verkehr mit STUDY hat nicht unwesentlich zur vollen Klärung meiner Gedanken beigetragen.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Neunundzwanzigste Abhandlung.

Hydrirung geschlossener Ringe

(vierte Mittheilung) [1])

von

F. Stohmann und H. Langbein.

In der ersten, die Hydrirung des Benzolkernes betreffenden Untersuchung, deren Resultate im September 1890 veröffentlicht wurden, hatte sich ergeben, dass der durch aufeinander folgende Anlagerungen von je 2 Atomen Wasserstoff an den Benzolkern bewirkte Energiezuwachs nicht ein gleichmässiger ist, sondern derartig erfolgt, dass die ersten zwei Wasserstoffatome den grössten, die beiden folgenden einen weit geringeren, die dritten einen gleich geringen Energiezuwachs wie die beiden vorhergehenden hervorgerufen, während das vierte Atompaar des Wasserstoffes, welches durch seine Anlagerung zugleich die Sprengung des Benzolkernes und die Umwandlung desselben in eine offene Kette bewirkt, wieder eine andere Vergrösserung des Energiezuwachses bedingt. Der Betrag der letzeren liegt zwischen dem Werthe der beiden vorher genannten.

Im Durchschnitte der Beobachtungen, welche bei den verschieden isomeren Formen der hydrirten Terephtalsäuren und zum Theile bei deren Methylestern angestellt, und später für die

1) Vergl. Journal f. prakt. Chem. [2] XLIII, 1; XLIII, 538; XLV, 475.

hydrirten Ortho-Phtalsäuren bestätigt wurden, haben sich folgende Zahlen für den Energiezuwachs der einzelnen Hydrirungsstufen ergeben.

Erste Stufe:

Uebergang der Phtalsäuren zu den Dihydrophtalsäuren:

68,7 Cal.

Zweite Stufe:

Uebergang der Dihydrophtalsäuren zu den Tetrahydrophtalsäuren:

45,3 Cal.

Dritte Stufe:

Uebergang der Tetrahydrophtalsäuren zu den Hexahydrophtalsäuren:

45,3 Cal.

Vierte Stufe:

Uebergang von den Hexahydrophtalsäuren zu den Korksäuren:

54,8 Cal.

Zur Würdigung dieser Zahlen ist hervorzuheben, dass sie Mittelwerthe von verschiedenen, an verschiedenem Materiale angestellten Beobachtungen sind. Da aber die einzelnen isomeren Verbindungen, aus deren Wärmewerthe die Beobachtungszahlen abgeleitet wurden, nicht völlig gleiche, sondern nur annähernd gleiche Wärmewerthe haben, so können jene Zahlen auf eine *absolute* Genauigkeit keinen Anspruch machen, sondern nur sehr angenäherte Werthe darstellen.

Auf Grund dieser Zahlen war für eine ganze Anzahl von Verbindungen, von denen nur der Wärmewerth des ersten Gliedes der Reihe und der Werth der letzten Hydrirungsstufe bekannt war, der Werth der einzelnen Glieder berechnet und es zeigte sich dabei stets, dass der berechnete Werth des letzten Gliedes mit dem gefundenen in völliger Uebereinstimmung sich befand. So wurde der Werth des normalen Hexans aus dem des Benzols, der Werth des Heptans aus dem des Toluoles, der Werth der Heptylsäure aus dem der Benzoësäure, der Werth der Octylsäure aus dem der Toluylsäure u. s. w. berechnet und mit der Beobachtung in genügender Uebereinstimmung befunden.

Eine Controle der für die Zwischenstufen berechneten Werthe war nicht möglich, da die meisten derselben zur Zeit

jener Publication überhaupt noch nicht bekannt, jedenfalls uns nicht zugängig waren. Inzwischen sind die Zwischenglieder der Benzolreihe von von Baeyer dargestellt und uns gütigst überlassen worden. Dank diesem Entgegenkommen sind wir jetzt in der Lage, die Werthe für die sämmtlichen zwischen dem Benzol und dem Hexan liegenden Glieder feststellen und damit die Richtigkeit des Hydrirungsgesetzes prüfen zu können.

Wir lassen zunächst den experimentellen Theil der Untersuchung folgen.

Alle Verbrennungen wurden in der Berthelot'schen Bombe in Sauerstoff von 25 Atm. Druck ausgeführt. Die Füllung des Calorimeter-Gefässes ist hier, wie bei allen unseren bisher veröffentlichten Bestimmungen, so bemessen, dass der calorimetrische Werth des ganzen Apparates einer Wassermenge von 2500 Grammen gleich ist.

Die Verbrennung leichtflüchtiger Stoffe bietet immer eine gewisse Schwierigkeit. Will man solche in Glaskügelchen abwägen und die Kügelchen nach beendeter Füllung der Bombe zertrümmern, wie wir es früher bei der Verbrennung des Benzols gethan haben, so ist die Dampfwärme der betreffenden Substanz als Correctionswerth in Rechnung zu stellen. Da die Dampfwärme der hier in Betracht kommenden Körper nicht bekannt ist, und von uns auch, wegen Mangel an Material, nicht ermittelt werden konnte, so war von diesem Verfahren Abstand zu nehmen. Mittelst eines kleinen Kunstgriffes, den wir auch früher schon angewandt haben, ist es uns gelungen jene Schwierigkeit zu überwinden.

Wir bringen die zu verbrennende Substanz in eine kleine aus Platin gefertigte Flasche von etwa 1 ccm Inhalt, legen auf den weiten Hals derselben ein gewogenes Collodiumblättchen und befestigen dieses durch einen über den senkrecht geformten Hals des Gefässes geschobenen, dicht an denselben schliessenden Ring von Platin. Die Collodiummembran gewährt einen so vollkommen dichten Verschluss, dass eine Wägung bis zum Decimilligramm mit aller Sicherheit ausführbar ist. Die Art der zum Verschlusse zu verwendenden Membran muss der zu untersuchenden Flüssigkeit angemessen sein. Hier hat sich Collodium vollständig bewährt.

Den Wärmewerth des trocknen Collodiums setzen wir mit

dem von Berthelot und Petit[1]) ermittelten Werthe von 2782 cal. pro Gramm in Rechnung. Eine Controlirung dieser Zahl haben wir nicht vorgenommen, da, bei der geringen Menge der davon verwandten Substanz, eine selbst ziemlich erhebliche Unrichtigkeit des angenommenen Wärmewerthes derselben nur einen kaum nennenswerthen Fehler in unseren Bestimmungen bewirken kann.

Dihydrobenzol, C_6H_8 . . 80.

Präparat von von Baeyer, Siedepunkt 82 bis 84° C. bei 718 mm Druck.

Angewandte Substanz:		1.	2.
Dihydrobenzol . . .	Grm.	0,5023	0,5729
Collodium	»	0,0088	0,0097
Anfangstemperatur . . .	° C.	14,5843	14,6542
Endtemperatur	»	16,7293	17,0988
Temperaturdifferenz . . .	»	2,1450	2,4446
Temperaturdifferenz × 2500	cal.	5362,5	6111,5
Correctionen:			
für Collodium	24,5 cal.	. . .	27,0
für Eisen zum Zünden .	14,6 »	. . .	14,6
für gebildete Salpetersäure	7,0 »	. . .	5,8
Im Ganzen	cal.	46,1	47,4
Verbrennungswärme der angewandten Substanz . . .	»	5316,4	6064,1
Verbrennungswärme von 1 Gramm Dihydrobenzol . .	»	10584,1	10584,9
Molekulare Verbrennungswärme bei constantem Volum . .	Cal.	846,73	846,79

Der Mittelwerth beider Beobachtungen ist daher:

Verbrennungswärme von 1 Grm. Dihydrobenzol	10584,5 cal.
» » 1 Mol. bei const. Vol. .	846,8 Cal.
» » 1 » » » Druck	848,0 »
Bildungswärme aus den Elementen[2])	—8,0 »

Die Bildung des Dihydrobenzols aus den Elementen ist daher, ebenso wie des Benzols, endotherm. Bei jenem beträgt sie

1) Ann. Chim. Phys. [6] XVIII, 109.
2) C = 94 Cal., H_2 = 69 Cal.

für den flüssigen Zustand — 8,5 Cal. In beiden Fällen kann sie nur unter Aufnahme fremder Energie erfolgen.

Tetrahydrobenzol, C_6H_{10} . . . 82.

Präparat von von Baeyer. Siedepunkt 80 bis 81° C. bei 718 mm Druck.

Angewandte Substanz:		1.	2.
Tetrahydrobenzol	Grm.	0,5415 . .	0,4865
Collodium	»	0,0063 . .	0,0080
Anfangstemperatur	° C.	14,9190 . .	14,9080
Endtemperatur	»	17,2874 . .	17,0383
Temperaturdifferenz . . .	»	2,3684 . .	2,1303
Temperaturdifferenz × 2500	cal.	5921,0 . .	5325,8

Correctionen:

für Collodium	17,5 cal.	. . .	22,3
für Eisen zum Zünden .	14,6 »	. . .	14,6
für gebildete Salpetersäure	8,0 »	. . .	6,2
Im Ganzen	cal.	40,1 . .	43,1
Verbrennungswärme der angewandten Substanz	»	5880,9 . .	5282,7
Verbrennungswärme von 1 Grm. C_6H_{10}	»	10860,4 . .	10858,6
Molekulare Verbrennungswärme bei constantem Volum . . .	Cal.	890,6 . .	890,4

Der Mittelwerth beider Beobachtungen ist daher:

Verbrennungswärme von 1 Grm. Tetrahydrobenzol	10859,5 cal
» » 1 Mol. bei const. Vol. . .	890,5 Cal.
» » 1 » » » Druck .	892,0 »
Bildungswärme aus den Elementen	+ 17,0 «

Durch den Hinzutritt von 4 Atomen Wasserstoff zum Benzol wird die Bildung exotherm, sie erfolgt unter Energieverlust.

Hexahydrobenzol, C_6H_{12} . . . 84.

Präparat von von Baeyer. Siedepunkt 77 bis 77,5° bei 718 mm Druck.

Von diesem Präparate standen uns nur etwa 0,4 g zur Verfügung, so dass leider nur eine Verbrennung auszuführen war.

Angewandte Substanz:			
Hexahydrobenzol		Grm.	0,3961
Collodium		»	0,0118
Anfangstemperatur		° C.	14,9110
Endtemperatur		»	16,6898
Temperaturdifferenz		»	1,7788
Temperaturdifferenz × 2500		cal.	4447,0
Correctionen:			
für Collodium	32,8 cal.		
für Eisen zum Zünden . . .	14,6 »		
für gebildete Salpetersäure .	7,0 »		
Im Ganzen			54,4
Verbrennungswärme der angewanten Substanz		cal.	4392,6
» von 1 Grm. Hexahydrobenzol		»	11089,6
Molekulare Verbrennungswärme bei constantem Volumen		Cal.	931,5
» » bei constantem Drucke .		»	933,2
Bildungswärme aus den Elementen			+ 44,8 Cal.

Unter Hinzunahme der früher für Benzol und für Hexan ermittelten Werthe erhalten wir nach den im Vorstehenden gewonnenen Zahlen folgende Reihe:

C_6H_6 . . .	779,8 Cal.	
C_6H_8 . . .	848,0 »	68,2 Cal.
C_6H_{10} . . .	892,0 »	44,0 »
C_6H_{12} . . .	933,2 »	41,2 »
C_6H_{14} . . .	991,2 »	58,0 »

Vom Benzole ausgehend war folgende Reihe berechnet worden:

C_6H_6 . . .	779,8 Cal.
C_6H_8 . . .	848,5 »
C_6H_{10} . . .	893,8 »
C_6H_{12} . . .	939,1 »
C_6H_{14} . . .	993,9 »

Die Uebereinstimmung des Befundes und der Rechnung ist daher derartig, dass sie nach allen Erwartungen kaum grösser sein könnte, und damit ist die allgemeine Gültigkeit des Hydrirungsgesetzes erwiesen.

Die einzige etwas grössere Abweichung kommt beim Hexahydrobenzol vor. Sie beträgt gegen die berechnete Zahl — 5,9 Cal. Leider hat diese Zahl wegen Mangels an Material nicht controlirt werden können, und es muss daher unentschieden bleiben, ob diese Zahl genau richtig, oder ob sie mit einem Beobachtungsfehler behaftet ist, oder ob vielleicht das Material nicht den absoluten Grad chemischer Reinheit besessen hat, welcher für unsere Messungen unbedingt erforderlich ist.

Um den Einfluss der Beobachtungsfehler zu zeigen, so mag erwähnt werden, dass in diesem Falle eine Gewichtsdifferenz von 0,001 Gramm das Endresultat im Betrage von 2,5 Cal. beeinflusst. Andererseits würde ein Wassergehalt von nur 0,5 Proc., welcher sich in jedem Präparate trotz sorgfältiger Trocknung immer leicht finden kann, das Resultat der Verbrennung um 3 Cal. verringert haben.

Es mag hier besonders darauf hingewiesen werden, von welch unheilvollem Einflusse geringe Mengen von fremden Beimengungen bei so feinen Messungen, wie sie unserer Methode eigen sind, sein können. Um uns hiervon frei zu machen, controliren wir bei allen von uns selbst dargestellten Präparaten die Reinheit derselben durch Bestimmung der Verbrennungswärme. Sind wir mit der Reindarstellung der Präparate soweit gekommen, dass Schmelz- und Siedepunkt sie als rein im gewöhnlichen Sinne betrachten lassen, so bestimmen wir den Wärmewerth. Darauf wird das Präparat umkrystallisirt oder von neuem rectificirt, wobei das Uebergehende in mehreren Antheilen aufgefangen wird. Nur dann, wenn der Wärmewerth dieses von neuem gereinigten Präparates mit dem vorher ermittelten zusammenfällt, und namentlich wenn die bei der Destillation gewonnenen Fractionen gleichen Wärmewerth besitzen, betrachten wir die Reinheit der Substanz für erwiesen und die gefundene Zahl als richtig. Es ist das ein zwar mühsames, aber ein zu einem sicheren Ziele führendes Verfahren.

Sei die kleine, beim Hexahydrobenzol gefundene Abweichung bedingt durch irgend welche Ursache, so ist sie nicht gross genug, um auf das allgemeine Ergebniss irgend welchen Einfluss auszuüben. Das Resultat steht durchaus im Einklange mit unseren früheren Beobachtungen und auf Grund der thermischen Verhältnisse müssen wir zu dem Schlusse kommen:

Im Benzolkerne können nicht drei gleichwerthige Doppelbin-

dungen vorhanden sein. Die Bindungen sind am festesten im intacten Benzolkerne, am lockersten bei den Di- und Tetrahydroverbindungen und erreichen in den Hexahydroverbindungen wieder einen grossen Grad von Stabilität, der aber dem des ursprünglichen Kernes nicht gleichkommt.

Folgende Gleichungen, welche unter Zugrundelegung der *gefundenen* Werthe aufgestellt sind, geben hierfür einen Zahlenausdruck:

$$C_6H_6 + H_2 = C_6H_8 + 0{,}8 \text{ Cal.}$$
$$C_6H_8 + H_2 = C_6H_{10} + 25{,}0 \text{ Cal.}$$
$$C_6H_{10} + H_2 = C_6H_{12} + 27{,}8 \text{ Cal.}$$
$$C_6H_{12} + H_2 = C_6H_{14} + 11{,}0 \text{ Cal.}$$

Zur Umwandlung des Benzols in Dihydrobenzol ist daher fast die Gesammtenergie, welche im Wasserstoffmolekül aufgespeichert ist, erforderlich. Bei der zweiten Hydrirungsstufe enthält das Anfangssystem einen Ueberschuss an Energie, welcher 25,0 Cal. entspricht. Ebenso ist bei der dritten Hydrirungsstufe im Anfangssysteme ein Ueberschuss an Energie von 27,8 Cal. vorhanden, während in der vierten Hydrirungsstufe, bei welcher die Sprengung des Benzolkernes erfolgt, der Ueberschuss an Energie des Anfangssystemes nur 11,0 Cal. beträgt.

Die Ergebnisse der thermo-chemischen Forschung stehen daher im vollsten Einklange mit den von VON BAEYER ausgesprochenen Anschauungen über die Constitution des Benzols und seiner Derivate.

Leipzig, im Juni 1893.

SITZUNG VOM 31. JULI 1893.

Max Siegfried, *Ueber eine neue, stickstoffhaltige Säure der Muskeln.* Vorgelegt vom ordentlichen Mitgliede C. Ludwig.

Zur Erklärung der Thatsache, dass der atmosphärische, inactive Sauerstoff im Organismus oxydirend wirkt, hat man mit Recht die Aufmerksamkeit auf die reducirenden Substanzen, die man überall in den Geweben findet, gelenkt. Indem diese oxydirt werden, spalten sie das Sauerstoffmolekül, es entsteht activer Sauerstoff.

Die reducirenden Substanzen sind jedoch jedenfalls nicht nur beim Abbau des Eiweisses, sondern auch bei den Synthesen im thierischen Körper von Wichtigkeit. Machen wir die berechtigte Annahme, dass diese Substanzen den chemischen Charakter der Aldehyde besitzen, so erkennen wir in ihnen äusserst condensationsfähige Körper. Sie können leicht durch Wasserabspaltung selbst mit anderen Körpern höhere Molekülle aufbauen. Sie können ferner kraft ihrer Fähigkeit, zu reduciren, bei gleichzeitig einhergehender Oxydation Wasser aus anderen Körpern abspalten und so Synthesen bewirken, ohne selbst in das höhere Molekül einzutreten.

Ich habe versucht, solche reducirenden Substanzen zu isoliren. Vor allen zeigen die Lösungen der Extractivstoffe der Muskeln in hohem Grade die Fähigkeit, Silberlösung zu reduciren. Es gelang mir, aus dem Auszuge mehrere Kilo Pferdefleisch nach Entfernung der bekannten Bestandtheile nach den üblichen Methoden und vollständiger Fällung der Fleischbasen

mit Phosphorwolframsäure bei niederer Temperatur eine geringe Menge einer zerfliesslichen, stickstoffhaltigen Substanz zu gewinnen, welche ammoniakalische Silberlösung ausserordentlich stark reducirte. Hierauf verarbeitete ich 50 Kilo Pferdefleisch. Es zeigte sich jedoch, dass trotzdem, dass, wo es irgend anging, niedere Temperatur eingehalten wurde, während der lange dauernden Operationen fast alle reducirende Substanz oxydirt war.

Nach weiteren vergeblichen Versuchen stand ich davon ab, die reducirende Substanz selbst zu isoliren und suchte ein Oxydationsproduct derselben zu gewinnen. Verdankt die Substanz ihre reducirende Eigenschaft dem Vorhandensein einer Aldehydgruppe, so war zu erwarten, dass bei gemässigter Oxydation eine Säure entstand.

Der Muskelextract eines erstickten Hundes, welcher Silberlösung ausserordentlich stark reducirte, wurde mit Aetzbaryt im Ueberschuss versetzt. Nach Filtriren wurde die durch Kohlensäure vom überschüssigen Bariumoxydhydrat befreite Lösung mit Eisenchlorid versetzt. Beim Erwärmen schieden sich rostbraune Flocken aus, die Lösung gab die Reactionen der Eisenoxydulsalze. Es war also Ferrisalz zu Ferrosalz reducirt, ausserdem hatte sich ein unlösliches Eisensalz gebildet.

Dieses unslösliche, jedenfalls basische Eisensalz wurde aus Fleischextract in grösseren Mengen gewonnen. Es löst sich in Ammoniak zu einer dunkelbraunen Flüssigkeit, die beim Eindampfen Eisenoxydhydrat abscheidet. Durch Extraction des Rückstandes mit Wasser und Eindunsten der Lösung wurde ein auf Lackmuspapier sauer reagirender, stickstoffhaltiger Syrup erhalten, der noch etwas Eisen enthielt.

Zur Gewinnung dieser Säure wurde basisches Eisensalz mit Barytwasser gekocht, das Filtrat vom Eisenrückstand mit Kohlensäure unter Zusatz von Ammoniak vom Baryt bis auf Spuren befreit. Der erhaltene Syrup wurde in wenig Wasser unter Zusatz einiger Tropfen Schwefelsäure gelöst. Aus der filtrirten Lösung schied Alkohol die Säure in schwach gefärbten Flocken aus. Nach mehrmaligem Umfällen schied sich die Säure bei allmählichem Zusatz von Alkohol in undeutlich krystallisirten zerfliesslichen Individuen aus.

Die Analysen ergaben für die Säure die Zusammensetzung: $C_{10}N_3O_5H_{15}$.

I. 0,1287 g S g. 0,0702 g H_2O und 0,2202 g CO_2
II. 0,1541 g S g. 0,0858 g H_2O und 0,2644 g CO_2
III. 0,1473 g S g. 24,6 cc N bei 20,5° T. u. 752.8 mm Bar.[1])
IV. 0,1630 g S g. 24,0 cc N bei 20° T. u. 756.5 mm Bar.[1])

	Ber. f. $C_{10}N_3O_5H_{15}$	Gef. I.	II.	III.	IV.
C	46,69%	46,66%	46,54%	—	—
H	5,84%	6,06%	6,18%	—	—
N	16,34%	—	—	16,56%	16,76%

Die Säure war bei 105° bis zum constanten Gewicht getrocknet. Aus der Formel berechnet sich das Molekulargewicht 257. Die mit der geringen Menge noch zu Gebote stehenden reinen Säure nach der Methode der Gefrierpunktserniedrigung ausgeführte Molekulargewichtsbestimmung ergab die Zahl 481. Wahrscheinlich ist also obige Formel zu verdoppeln.

Die letzten Spuren Eisen werden durch Kochen mit Barytwasser nicht entfernt; es bedarf des wiederholten Eindampfens mit Ammoniak, um die Säure eisenfrei zu erhalten. Die analysirte Säure reducirte ammoniakalische Silberlösung nicht, während der zunächst aus dem Eisensalz erhaltene rohe Syrup bei fast allen Darstellungen Silber reducirte. Es lag die Vermuthung nahe, dass die Fleischsäure, wie ich die Säure $C_{10}N_5O_3H_{15}$ nennen will, durch Oxydation der reducirenden Substanz entstanden war, und dass auch diese eine Säure, eine Aldehydsäure sei und die Fähigkeit besitze, ein unlösliches Eisensalz zu bilden. Das bei der Darstellung aus Eisenchlorid entstehende Eisenchlortür konnte ein unlösliches Ferrosalz der Aldehydsäure gebildet haben.

Thatsächlich wurde aus Fleischextract ein grünlich gefärbtes Eisensalz mit Eisenvitriol unlöslich abgeschieden, das nach der Zersetzung mit Barytwasser und Entfernung des überschüssigen Barytes mit Kohlensäure und Ammoniak eine eisenfreie Säure gab, welche ammoniakalische Silberlösung stark reducirte.

Die Vorstellung, dass die Fleischsäure ein Oxydationsproduct der reducirenden Substanz sei, wurde dadurch bestärkt, dass aus reiner Fleischsäure, welche nicht reducirte, durch Behandlung mit Natriumamalgam sowohl nach Zusatz von Schwe-

1) Die Stickstoffbestimmungen verdanke ich Herrn Dr. H. Wislicenus

felsäure als auch von Ammoniak eine Säure erhalten wurde, welche Silberlösung stark reducirte.

Die Fleischsäure ist ferner bemerkenswerth durch ihr Verhalten gegen Schwefelwasserstoff. Durch Einwirkung von Schwefelwasserstoff auf die wässerige Lösung der Säure entsteht eine schwefelhaltige Substanz. Durch mehrmaliges Umfällen mit Alkohol wurde ein Product erhalten, welches folgende Reactionen zeigte: Beim Verkohlen der trockenen Substanz entweicht Schwefelwasserstoff. Fügt man zu der wässerigen Lösung Silbernitrat, so tritt erst eine gelbe, dann röthliche Färbung ein, schliesslich scheidet sich Schwefelsilber reichlich ab. Zusatz von Salpetersäure, sowie Erhitzen begünstigen die Zersetzung. Beim Kochen mit alkalischer Bleilösung gibt die aus reiner Fleischsäure dargestellte schwefelhaltige Substanz kein Schwefelblei. Wohl aber wird die aus der rohen Säure durch Schwefelwasserstoff erzeugte schwefelhaltige Säure beim Kochen mit Natronlauge unter Bildung von Schwefelnatrium zersetzt. Wahrscheinlich entsteht dieser Schwefelkörper aus der reducirenden Substanz. Er könnte eine Thioaldehydsäure sein.

Die Bedeutung der Fähigkeit der Fleischsäure, aus Schwefelwasserstoff Schwefel organisch zu binden, liegt auf der Hand. Schwefelwasserstoff entsteht bei der hydrolytischen Spaltung des Eiweisses. Trifft dieses giftige Spaltungsproduct mit der Fleischsäure beziehentlich mit der reducirenden Substanz zusammen, so wird es absorbirt. Es bilden sich Körper, in denen der Schwefel organisch gebunden ist. Die Entstehung des Cystins und anderer Körper, in denen der Schwefel in nicht oxydirter Form vorhanden ist, finden vielleicht so ihre Erklärung.

Es wurde ferner basisches Eisensalz auf ähnlichem Wege, wie aus Muskelextracten, aus ca. 100 Liter Harn und aus den nach der Methode von HLASIWETZ und HABERMANN aus 300 g Eieralbumin erhaltenen Eisensalzproducten isolirt. Die aus dem Eisensalz gewonnene Säure zeigte in beiden Fällen das Verhalten der Fleischsäure. Vor allen entstanden auch hier durch Schwefelwasserstoff schwefelhaltige Körper, welche die oben beschriebenen Reactionen gaben.

Die Fleischsäure ist also ein neuer nicht oxydirter Bestandtheil des Harnes, den wir bei klinischen Untersuchungen berücksichtigen müssen. Da sie Eisen in alkalischer Lösung zu binden vermag, so steht sie möglicherweise in Beziehung zum

Haemoglobin. Als Oxydationsproduct der reducirenden Substanz und wegen ihrer Fähigkeit, Schwefel aus Schwefelwasserstoff aufzunehmen, verdient sie Beachtung.

Zeigt es sich, dass die Fleischsäure auch in grösseren Quantitäten nicht giftig wirkt, so ist sie vielleicht auch therapeutisch verwendbar.

Die quantitative Bestimmung derselben ist leicht ausführbar. Nach den Versuchen des Herrn Dr. M. Ide, über welche später berichtet werden soll, erhält man durch Wägung des filtrirten, sorgfältig gewaschenen und getrockneten Niederschlages und Bestimmung des Stickstoffes dieses Salzes nach Kjeldahl constante Werthe.

Ich hoffe, bald weitere Mittheilungen über die Fleischsäure und ihre Derivate folgen lassen zu können. Durch diese Mittheilung möchte ich mir die ungestörte Weiterbearbeitung des Gebietes sichern.

J. Hartmann, *Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte.* Vorgelegt von Herrn **Bruns**.

Die auf den folgenden Seiten mitgetheilten Breitenbestimmungen am Universalinstrument Wanschaff der Leipziger Sternwarte bilden die unmittelbare Fortsetzung der von Herrn Dr. **Hayn** ausgeführten und in diesen Berichten (Sitzung vom 6. Febr. 1893) veröffentlichten Beobachtungsreihe. Das unverändert beibehaltene Beobachtungsprogramm ist im Allgemeinen das folgende. Es wurden in der Nähe des Meridians Zenithdistanzen abwechselnd von Nord- und Südsternen gemessen, welche zwischen 40° und 60° Höhe culminirten. Jeder Stern wurde zuerst in der einen Kreislage an den beiden horizontalen Fäden eingestellt, hierauf ebenso in der anderen Kreislage. Der Uebergang von der einen zur anderen Lage erfolgte nicht durch Umlegung, sondern durch Drehung um die verticale Axe. Zur Ablesung des Kreises dienen zwei Mikroskope, deren Stellung durch das auf dem Mikroskopträger befestigte Niveau controlirt wird.

Der Parswerth des Niveaus wurde vor Beginn der Beobachtungen auf dem Niveauprüfer bestimmt, wobei das Niveau nicht aus seiner Fassung genommen wurde. Es ergab sich

1891 Aug. 18	I	+ 18°6 C.	1^p	= 2″030
	II	+ 18.6		= 1.985
Aug. 20	III	+ 17.8		= 2.004
	IV	+ 17.7		= 1.984
			Mittel 1^p	= 1″999 ± 0″011

Zur Reduction der Beobachtungen wurde der Werth $1^p = 2''.00$ verwendet.

Der Run der beiden Mikroskope wurde wie bisher für jeden Abend constant angenommen und aus den Beobachtungen selbst

mittelst des Abstandes der beiden beweglichen Doppelfäden von einander berechnet. Nach zahlreichen Messungen hatten diese Distanzen folgende Werthe:

bei Mikroskop I $3^R\ 14^p160$
» » II 3 13.446

Die Zahlen stimmen fast genau mit den früher gefundenen Werthen überein, wodurch die genügende Festigkeit dieses als constant angenommenen Abstandes gesichert ist.

Die Schrauben der beiden Mikroskope wurden auf periodische und fortschreitende Fehler innerhalb der drei allein benutzten Schraubengänge untersucht. Bei Mikroskop I zeigte sich ein etwa 0^p1 betragender Unterschied der einzelnen Gänge, doch wurde dieser ebenso wie der nirgends 0^p1 erreichende Fehler der Schraube II vernachlässigt. Grösser war der periodische Fehler der Schraube I, wegen dessen die Ablesungen die folgenden Correcturen erhielten:

	1891	1892
0^p	0^p0	0^p0
5	+ 0.1	+ 0.2
10	+ 0.2	+ 0.3
15	+ 0.2	+ 0.3
20	+ 0.3	+ 0.2
25	+ 0.3	+ 0.1
30	+ 0.1	0.0
35	— 0.1	0.0
40	— 0.3	— 0.2
45	— 0.3	— 0.3
50	— 0.3	— 0.3
55	— 0.2	— 0.2

Im Januar 1892 wurde das Mikroskop I bei Gelegenheit einer grösseren Veränderung am Instrument gereinigt, wodurch sich der Fehler jedoch nur wenig geändert hat.

Die soeben erwähnte Umänderung des Instrumentes sollte eine grössere Stabilität des Mikroskopträgers herbeiführen. Es zeigte sich nämlich schon an einem der ersten Beobachtungsabende, dass die Niveaublase nicht zur Ruhe kam, selbst wenn man das Instrument viele Minuten lang unberührt liess. In Folge hiervon ergaben sich an einigen Abenden bis zu 1″ verschiedene Werthe der beobachteten Zenithdistanz, je nachdem man das Niveau vor oder nach den Mikroskopen ablas. Ein Versuch zeigte

nun zunächst, dass der auf der horizontalen Axe reitende Mikroskopträger bei einer Drehung dieser Axe im gleichen Sinne sehr merklich mitgedreht wurde, wie dies auch schon Dr. Schumann constatirt hatte[1]). Nach Abschluss der ersten sieben Beobachtungsabende, zwischen denen keine Unterbrechung eintreten sollte, wurden längere Reihen von Niveauablesungen nach vorhergehenden Drehungen des Instrumentes ausgeführt. Die gleichzeitigen Ablesungen des Axenniveaus ergaben, dass wohl der grösste Theil der erwähnten Niveauschwankungen durch langsame Bewegungen verursacht wurde, welche der ganze obere, im Azimuth drehbare Theil des Instrumentes ausführte. Diese Azimuthdrehung erfolgt um einen conischen Zapfen aus Stahl, auf welchen die den oberen Theil tragende Büchse aus Rothguss durch das Gewicht des Instrumentes aufgepresst wird. Damit dieser Druck nicht zu gross sei und so ein Festsetzen im Azimuth verursache, stützt sich die Büchse mittelst einer durch drei Schrauben verstellbaren horizontalen Stahlplatte auf die obere abgestumpfte Spitze des Conus. Da diese drei Schrauben schwer zugänglich sind, so muss man dieselben so stark anziehen, und hierdurch die Büchse so weit vom Conus abheben, dass auch im Winter, wo die Büchse vermöge ihres grösseren Ausdehnungscoefficienten sich am engsten an den Conus anschliesst, noch die Drehung des Instrumentes möglich ist. Bei höherer Temperatur wird dann aber die Büchse sehr locker auf dem Conus aufsitzen und da der Zwischenraum durch eine Oelschicht ausgefüllt ist, so sind die beobachteten langsamen Nachziehungen sehr erklärlich. Es wurden daher zunächst die drei Schrauben etwas gelockert, wodurch sich die Büchse fester auf den Conus presste. Ein hierauf vorgenommenes Nivellement zeigte, dass die Stabilität des Instrumentes sich ganz erheblich gebessert hatte; jedoch kamen immer noch kleinere Bewegungen der Blase namentlich beim Höhenniveau vor. In diesem Zustande des Instrumentes wurde die zweite Reihe von sechs Beobachtungsabenden erhalten.

Nach Beendigung dieser Reihe wurde im December das Instrument auseinandergenommen und der bisher auf der Axe reitende Mikroskopträger durch einen neuen ersetzt, der mit dem

1) Schumann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Sitzungsber. vom 6. Febr. 1893 pag. 270.

Axenlager aus einem Stück gegossen war. Das Höhenniveau wurde wie früher auf demselben befestigt, nur musste jetzt durch richtige Nivellirung des ganzen Instrumentes mittelst seiner Fussschrauben dafür gesorgt werden, dass die Blase immer nahe der Mitte des Niveaus blieb. Gleichzeitig wurde der Versuch gemacht, durch Unterlegung von flachen Federn unter die oben erwähnten drei Schrauben den Anschluss der Büchse an den Conus inniger zu machen, ohne ein Festsetzen befürchten zu müssen. Die späteren Beobachtungstage zeigten, dass bei feststehendem Instrument Aenderungen des Niveaustandes während der Mikroskopablesung gar nicht mehr eintraten, jedoch wurde der m. F. einer Höhenmessung kaum merklich kleiner. Die Verwandlung der früheren starren Entlastung des Conus in eine elastische hatte zur Folge, dass sich das Instrument im Azimuth sehr schwer drehte und an einigen Tagen festzusetzen drohte. Es soll daher später die Entlastungsvorrichtung zwar starr, aber so leicht verstellbar eingerichtet werden, dass man sie der jedesmaligen Temperatur leicht anpassen kann. Im März 1892 wurde das Instrument wieder aufgestellt. Es konnte hierauf nur noch eine Reihe von sechs Abenden beobachtet werden, da der Verfasser im Juni Leipzig auf ein Jahr verliess.

Von der Reduction ausgeschlossen wurden im Ganzen zwei Sterne des ersten Beobachtungsabends. Beim ersten waren durch ein Versehen bei der Einstellung in den beiden Kreislagen zwei verschiedene Sterne beobachtet worden und beim zweiten fehlt eine Niveauablesung. Sonst wurden alle Beobachtungen beibehalten und mit gleichem Gewicht in die Rechnung eingeführt.

Die Oerter der beobachteten Sterne wurden dem Berliner Jahrbuche entnommen, nachdem an denselben durchgehends die tägliche Aberration und in δ der von der Mondlänge abhängige Theil der Nutation angebracht war. Statt β Delphini wurde einige Male fälschlich ζ beobachtet. Um dessen Ort im System des Fundamental-Cataloges zu erhalten, wurde aus mehreren Catalogen sein Abstand von den umliegenden sechs Fundamentalsternen bestimmt, auf 1891.0 reducirt und an den im B. J. für 1891 gegebenen mittleren Oertern der betreffenden Sterne angebracht. Ausserdem lieferten die Leipziger Zonen und der Catalog des Harvard College noch direct den Ort im Fund.-System.

Die so gefundenen Oerter sind die folgenden:

	α 1891.0	δ 1891.0
Armagh	$20^h\,30^m\,12^s.752$	$+14°\,17'$ —
12-Y	12.709	53.″417
6-Y	12.670	—
7-Y	12.688	53.435
10-Y	12.778	54.290
Yarnall	12.730	53.920
Brüssel	12.698	53.160
Radcliffe	12.655	55.840
Glasgow	12.709	55.742
Leipzig	12.692	54.354
Harvard	12.704	54.154

Nach passender Gewichtsvertheilung folgte der Mittelwerth:

$20^h\,30^m\,12^s.707$ $+14°\,17'\,54.″24$

In der folgenden Tafel sind die scheinbaren Oerter zusammengestellt.

Tafel A.

	α app.	δ app.		α app.	δ app.
1891					
51 *H. Ceph.*			*γ Sagittae*		
Aug. 28	$6^h\,49^m\,12^s.78$	87°12′49.″53	Aug. 29	$19^h\,53^m\,56^s.63$	19°11′57.″24
29	13.29	49.35	31	56.61	57.57
31	14.29	49.04	Sept. 8	56.54	58.43
Sept. 8	17.85	47.84	9	56.50	58.56
9	18.85	47.66	*α Urs. min.*		
ζ Aquilae			Aug. 28	1 19 29.08	88 43 32.26
Aug. 24	19 0 25.93	13 42 13.52	29	29.77	32.60
28	25.89	13.97	*ζ Delphini*		
29	25.88	14.12	Aug. 29	20 30 14.91	14 18 4.29
31	25.85	14.35	Sept. 8	14.83	5.46
Sept. 8	25.75	14.78	9	14.82	5.58
9	25.72	14.87	*β Delphini*		
δ Aquilae			Aug. 28	20 32 28.44	14 13 8.15
Aug. 31	19 20 2.19	2 53 58.35	Sept. 9	28.35	9.64
λ Urs. min.			*α Equulei*		
Aug. 24	19 32 56.41	88 58 18.05	Oct. 23	21 10 24.30	4 48 3.28
25	55.17	18.34	28	24.25	3.04
28	51.97	19.20	Nov. 3	24.15	2.81
29	50.79	19.45	10	24.06	2.50
31	48.40	19.90	12	24.03	2.35
Sept. 8	39.82	21.56	1 *H. Drac.*		
9	38.64	21.81	Oct. 16	9 21 32.70	81 48 6.48
γ Sagittae			23	33.86	4.92
Aug. 25	19 53 56.66	19 11 56.59	26	34.72	4.18
28	56.64	57.07	Nov. 3	35.77	3.32

	α app.	δ app.		α app.	δ app.
1 *H. Drac.*			1 *H. Drac.*		
Nov. 10	9h24m37.s04	84°48′ 2.″46	März 25	9h24m47.s68	84°48′27.″79
12	37.40	2.32	30	47.47	28.88
s Pegasi			April 9	46.05	30.58
Oct. 16	21 38 51.97	9 22 46.52	10	45.93	30.76
23	51.88	46.80	*π Leonis*		
28	51.81	46.68	März 21	9 54 34.38	8 33 41.25
Nov. 3	51.72	46.56	22	34.37	41.26
10	51.63	46.34	25	34.35	41.36
12	51.60	46.15	30	34.31	41.54
ϑ Pegasi			April 9	34.21	41.87
Oct. 16	22 4 44.29	5 39 57.14	10	34.20	41.95
23	44.21	57.31	*α Leonis*		
28	44.15	57.18	März 21	10 2 38.28	12 29 39.46
Nov. 3	44.07	57.03	22	38.27	39.48
12	43.95	56.84	25	38.26	39.64
30 *H. Cam.*			30	38.22	39.93
Oct. 16	10 17 44.48	83 6 25.94	April 9	38.12	40.35
23	45.63	23.88	10	38.11	40.44
Nov. 3	47.61	21.37	30 *H. Cam.*		
10	48.95	19.92	März 21	10 18 5.00	83 6 38.97
12	49.35	19.63	22	4.95	39.23
ζ Pegasi			25	4.78	40.07
Oct. 16	22 36 3.83	10 16 1.41	30	4.27	41.45
23	3.76	1.73	April 9	3.26	43.66
Nov. 3	3.64	1.67	10	3.03	44.05
10	3.56	1.66	*l Leonis*		
12	3.54	1.64	März 21	10 43 36.01	11 6 55.47
1892			22	36.01	55.48
			25	36.00	55.62
1 *H. Drac.*			30	35.98	55.94
März 21	9 21 48.05	84 48 26.84	April 9	35.92	56.34
22	47.96	27.08	10	35.94	56.43

Zur Ermittelung der meteorologischen Daten wurde das am nördlichen Ende des Spaltes angebrachte Thermometer zwar nicht bei jedem Sterne, aber doch öfter des Abends abgelesen. Die Barometerstände wurden aus den nach dem Stationsbarometer verbesserten Aufzeichnungen des Barographen entnommen. Die direct beobachteten Grössen, aus denen dann die Werthe für jede einzelne Beobachtung interpolirt wurden, sind folgende (Bar. schon auf 0° reduc.):

Tafel B.

	St. Zt.	Bar.	Therm.		St. Zt.	Bar.	Therm.
1891	h m	mm	C.		h m	mm	C.
August 24	18 23	750.1	+13°9	Nov. 10	21 4	746.3	+ 6°0
	20 12	751.0	+12.4		21 57	746.4	+ 5.4
25	19 32	750.6	+13.3		22 46	746.5	+ 4.8
	20 15	750.6	+13.8	12	21 3	747.5	+ 4.8
28	18 26	753.4	+15.2		21 56	747.7	+ 3.4
	19 17	753.4	+14.3		22 53	747.9	+ 3.4
	19 40	753.5	+14.0	**1892**			
	20 52	753.5	+13.8	März 21	9 7	760.0	+ 4.6
29	18 27	753.1	+17.8		9 46	760.0	+ 3.9
	19 8	753.2	+16.4		10 40	760.0	+ 2.7
	19 44	753.3	+15.4		10 56	760.0	+ 2.5
	20 36	753.4	+13.9	22	9 0	756.2	+ 5.9
31	18 25	748.7	+15.5		9 37	756.1	+ 5.2
	20 12	749.1	+13.4		10 19	756.1	+ 4.4
Sept. 8	18 32	757.1	+14.0		10 48	756.1	+ 4.2
	20 41	757.8	+12.0	25	9 6	754.8	+ 4.4
9	18 36	759.8	+14.8		10 22	754.5	+ 3.8
	19 41	759.8	+13.8		10 48	754.3	+ 3.2
	20 42	759.9	+12.4	30	9 11	762.1	+ 2.1
Oct. 16	21 14	748.9	+14.5		9 49	762.2	+ 1.8
	21 56	748.9	+14.6		10 20	762.4	+ 2.0
	22 56	749.0	+13.5		10 58	762.5	+ 1.7
23	20 59	745.0	+14.3	April 9	9 11	755.9	+ 6.2
	21 53	745.2	+10.9		9 46	755.9	+ 5.4
	22 49	745.3	+11.9		10 50	755.9	+ 4.0
28	21 3	757.4	+ 2.6	10	9 9	752.3	+ 9.3
	22 21	757.5	+ 2.4		9 45	752.3	+ 8.9
Nov. 3	20 51	759.6	+ 0.3		10 37	752.2	+ 8.0
	21 51	759.3	0.0		10 50	752.2	+ 7.7
	22 44	759.0	— 0°7				

In der nun folgenden Zusammenstellung der Beobachtungen ist unter Kr. die Kreislage und unter F. der Horizontalfaden (oberer oder unterer) angegeben. Die Ablesung ist corrigirt für Refraction und Theilungsfehler und auf den Meridian reducirt. Die beiden folgenden Columnen enthalten den Zenithpunkt, bezogen auf die Mitte der beiden Fäden und unter I die aus jedem Sterne direct folgende Polhöhe. Columne II wird später erklärt werden.

Tafel C.

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	$51^{\circ}20'$	
						I.	II.
1891 Aug. 24	ζ Aquilae	l	o	322°41′55″.50			
		l	u	322 41 9.68	0°19′25″.44	6″.06	5″.43
		r	o	37 56 54.78			
		r	u	37 57 40.60			
	λ Urs. min.	r	o	37 57 16.76			
		r	u	37 58 0.72	25.49	4.50	5.13
		l	o	322 41 33.91			
		l	u	322 40 49.38			
Aug. 25	λ Urs. min.	r	o	37 57 22.00			
		r	u	37 58 14.44	0 19 32.93	4.55	5.18
		l	o	322 41 40.49			
		l	u	322 40 57.78			
	γ Sagittae	l	o	328 41 44.01			
		l	u	328 41 2.94	34.39	4.50	3.95
		r	o	32 27 18.52			
		r	u	32 28 0.09			
Aug. 28	54 H. Ceph.	r	o	41 46 9.29			
		r	u	41 46 57.02	0 19 27.74	5.06	5.74
		l	o	318 52 45.12			
		l	u	318 51 59.55			
	ζ Aquilae	l	o	322 41 57.27			
		l	u	322 41 12.34	26.59	5.76	5.13
		r	o	37 56 55.24			
		r	u	37 57 41.51			
	λ Urs. min.	r	o	37 57 18.45			
		r	u	37 58 5.29	27.28	4.60	5.23
		l	o	322 41 36.17			
		l	u	322 40 49.20			
	γ Sagittae	l	o	328 41 39.67			
		l	u	328 40 54.40	26.83	6.86	6.31
		r	o	32 27 13.06			
		r	u	32 28 0.17			
	α Urs. min.	r	o	37 42 29.99			
		r	u	37 43 17.61	26.12	4.58	5.22
		l	o	322 56 21.59			
		l	u	322 55 35.29			
	β Delphini	l	o	323 12 49.08			
		l	u	323 12 5.40	25.42	6.33	5.74
		r	o	37 26 1.37			
		r	u	37 26 45.80			
Aug. 29	54 H. Ceph.	r	o	141 27 59.93			
		r	u	141 28 48.06	120 1 20.40	7.06	6.50
		l	o	78 34 39.92			
		l	u	78 33 53.74			
	ζ Aquilae	l	o	82 23 54.35			
		l	u	82 23 6.29	24.52	6.81	7.33
		r	o	157 38 50.61			
		r	u	157 39 37.80			

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	51°20′ I.	51°20′ II.
1894 Aug. 29	λ Urs. min.	r	o	157°39′44″.63			
		r	u	157 39 57.50	120° 1′23″.46	6″.84	6″.32
		l	o	82 23 33.63			
		l	u	82 22 48.07			
	γ Sagittae	l	o	87 53 36.87			
		l	u	87 52 51.73			
		r	o	152 9 8.50	22.85	3.79	6.24
		r	u	152 9 54.34			
	α Urs. min.	r	o	157 24 23.48			
		r	u	157 25 14.48			
		l	o	82 38 17.78	20.98	6.10	5.57
		l	u	82 37 31.21			
	ζ Delphini	l	o	82 59 48.66			
		l	u	82 58 57.19			
		r	o	157 2 56.93	21.98	3.34	3.85
		r	u	157 3 45.13			
Aug. 31	54 H. Ceph.	r	o	161 28 5.98			
		r	u	161 28 50.82			
		l	o	78 34 39.80	120 1 22.20	4.76	4.20
		l	u	78 33 52.21			
	ζ Aquilae	l	o	82 23 54.04			
		l	u	82 23 9.36			
		r	o	157 38 47.44	20.44	4.59	5.11
		r	u	157 39 33.92			
	δ Aquilae	r	o	168 27 2.12			
		r	u	168 27 50.43			
		l	o	71 35 36.87	19.92	4.70	5.33
		l	u	71 34 50.27			
	λ Urs. min.	l	o	82 23 29.02			
		l	u	82 22 43.54			
		r	o	157 39 12.25	20.24	5.94	5.42
		r	u	157 39 56.15			
	γ Sagittae	r	o	152 9 4.57			
		r	u	152 9 51.90			
		l	u	87 52 49.87	20.49	5.31	5.76
		l	o	87 53 35.64			
Sept. 8	54 H. Ceph.	r	o	280 58 8.05			
		r	u	280 58 53.50			
		l	o	198 4 38.84	239 31 23.38	4.77	6.48
		l	u	198 3 53.14			
	ζ Aquilae	l	o	204 53 55.09			
		l	u	204 53 7.84			
		r	o	277 8 55.25	24.04	7.35	5.77
		r	u	277 9 37.98			
	λ Urs. min.	r	o	277 9 20.78			
		r	u	277 10 6.20			
		l	o	204 53 29.84	25.00	3.08	4.66
		l	u	204 52 43.24			
	γ Sagittae	l	o	207 23 36.67			
		l	u	207 22 49.32			
		r	o	274 39 40.26	23.04	8.46	7.09
		r	u	274 39 55.88			

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	51°20′ I.	51°20′ II.
1894 Sept. 8	ζ Delphini	r	o	276°33′ 0″.76			
		r	u	276 33 47.78	239°34′23″.44	6″.39	4.73
		l	u	202 28 58.32			
		l	o	202 29 46.90			
Sept. 9	54 H. Ceph.	r	o	280 58 9.14			
		r	u	280 58 53.20	239 34 23.27	4.44	6.15
		l	u	198 3 52.23			
		l	o	198 4 38.54			
	λ Urs. min.	l	u	201 52 43.59			
		l	o	201 53 28.33	24.28	3.48	5.06
		r	o	277 9 18.83			
		r	u	277 10 6.39			
	ζ Aquilae	l	u	201 53 10.55			
		l	o	201 53 53.42	24.39	7.27	5.69
		r	o	277 8 54.17			
		r	u	277 9 39.44			
	γ Sagittae	l	u	207 22 50.93			
		l	o	207 23 37.62	22.80	7.10	5.73
		r	o	274 39 9.20			
		r	u	274 39 53.49			
	ζ Delphini	l	u	202 28 57.20			
		l	o	202 29 44.75	22.67	7.27	5.74
		r	o	276 33 1.74			
		r	u	276 33 46.97			
	β Delphini	l	u	202 24 5.39			
		l	o	202 24 54.04	24.62	6.06	4.49
		r	o	276 37 57.94			
		r	u	276 38 44.44			
Oct. 16	4 H. Drac.	l	u	192 38 41.50			
		l	o	192 39 28.00	239 30 54.79	3.48	5.22
		r	o	286 22 21.29			
		r	u	286 23 8.37			
	ε Pegasi	r	o	284 27 55.57			
		r	u	284 28 41.89	56.94	8.32	6.72
		l	u	197 33 13.44			
		l	o	197 33 56.84			
	ϑ Pegasi	l	u	198 50 23.27			
		l	o	198 51 9.42	56.24	7.03	5.32
		r	o	285 10 43.34			
		r	u	285 11 28.96			
	30 H. Cam.	r	o	285 4 3.33			
		r	u	285 4 49.33	55.70	4.44	6.14
		l	u	193 57 2.33			
		l	o	193 57 47.84			
	ζ Pegasi	r	o	280 34 38.33			
		r	u	280 35 23.30	55.36	6.85	5.28
		l	u	198 26 27.88			
		l	o	198 27 11.95			
Oct. 23	α Equulei	l	u	192 58 29.39			
		l	o	192 59 15.45	239 30 56.87	7.74	6.04
		r	o	286 2 38.05			
		r	u	286 3 24.64			

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	51°20′ I.	II.
1894 Oct. 23	1 H. Drac.	l	u	192°38′42″.59			
		l	o	192 39 30.02	239°30′55″.90	5″.49	7″.28
		r	o	286 22 22.45			
		r	u	286 23 8.54			
	ε Pegasi	l	u	197 33 13.20			
		l	o	197 33 55.98			
		r	o	284 27 54.23	56.40	8.60	7.00
		r	u	284 28 42.17			
	ϑ Pegasi	r	o	285 10 45.47			
		r	u	285 11 29.07			
		l	u	193 50 22.58	56.08	8.50	6.79
		l	o	193 51 7.28			
	30 H. Cam.	r	o	285 4 5.37			
		r	u	285 4 51.84			
		l	u	193 57 3.77	56.46	8.98	5.68
		l	o	193 57 44.90			
	ζ Pegasi	r	o	280 34 35.82			
		r	u	280 35 23.77			
		l	u	198 26 24.20	54.38	6.94	5.37
		l	o	198 27 14.04			
Oct. 28	α Equulei	r	o	46 32 14.65			
		r	u	46 33 1.58			
		l	u	343 28 7.02	0 0 33.74	7.40	5.82
		l	o	343 28 54.74			
	1 H. Drac.	r	o	46 52 2.00			
		r	u	46 52 48.92			
		l	u	343 8 20.67	34.36	4.72	6.84
		l	o	343 9 5.86			
	ε Pegasi	r	o	44 57 31.93			
•		r	u	44 58 15.64			
		l	u	348 2 48.68	33.42	7.03	5.58
		l	o	348 3 37.50			
	ϑ Pegasi	r	o	45 40 21.50		•	
		r	u	45 41 7.15			
		l	u	344 20 0.78	34.26	7.24	5.68
		l	o	344 20 47.68			
Nov. 3	α Equulei	l	u	343 28 21.34			
		l	o	343 29 8.01			
		r	o	46 32 29.77	0 0 49.88	8.03	6.45
		r	u	46 33 20.44			
	1 H. Drac.	l	u	343 8 35.38			
		l	o	343 9 21.90			
		r	o	46 52 20.49	50.98	4.34	5.98
		r	u	46 53 6.48			
	ε Pegasi	l	u	348 3 8.44			
		l	o	348 3 52.06			
		r	o	44 57 49.17	54.20	7.68	6.23
		r	u	44 58 35.47			
	ϑ Pegasi	r	o	45 40 38.46			
		r	u	45 41 23.43			
		l	u	344 20 18.55	50.84	6.83	5.27
		l	o	344 21 3.53			

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt		54°20′ I.	II.
1894 Nov. 3	30 H. Cam.	r	o	45°34′ 4″.23				
		r	u	45 34 50.24	0° 0′52″.08		3″.49	5″.04
		l	u	314 26 54.14				
		l	o	314 27 39.73				
	ζ Pegasi	r	o	44 4 32.44				
		r	u	44 5 19.14		50.69	6.75	5.32
		l	u	318 56 28.28				
		l	o	318 57 7.94				
Nov. 10	α Equulei	r	u	73 23 40.24				
		r	o	73 24 24.90	149 56 5.74		5.68	6.22
		l	o	166 27 45.77				
		l	u	166 28 32.07				
	4 H. Drac.	l	u	73 3 52.90				
		l	o	73 4 37.45		5.94	6.78	6.24
		r	o	166 47 34.63				
		r	u	166 48 18.79				
	ε Pegasi	l	u	77 58 26.37				
		l	o	77 59 9.62		7.30	5.66	6.16
		r	o	161 53 3.70				
		r	u	161 53 49.54				
	30 H. Cam.	l	u	74 22 10.44				
		l	o	74 22 55.31		5.60	7.36	6.83
		r	o	165 29 44.51				
		r	u	165 30 2.46				
		r	u	165 30 3.25				
		r	o	165 29 46.93		7.21	7.20	6.67
		l	o	74 22 57.22				
		l	u	74 22 11.44				
	ζ Pegasi	r	o	160 59 47.94				
		r	u	161 0 33.58		5.78	6.64	7.06
		l	u	78 51 38.36				
		l	o	78 52 23.22				
Nov. 12	α Equulei	r	o	166 27 46.24				
		r	u	166 28 29.44	149 56 5.32		4.86	5.40
		l	u	73 23 39.59				
		l	o	73 24 26.02				
	4 H. Drac.	r	o	166 47 34.24				
		r	u	166 48 20.67		6.61	6.83	6.29
		l	u	73 3 52.73				
		l	o	73 4 38.79				
	ε Pegasi	r	o	161 53 5.99				
		r	u	161 53 49.74		8.06	5.96	6.46
		l	u	77 58 24.73				
		l	o	77 59 11.77				
	ϑ Pegasi	l	u	74 15 33.34				
		l	o	74 16 21.06		6.08	5.64	6.18
		r	o	165 35 54.56				
		r	u	165 36 38.46				
	30 H. Cam.	l	u	74 22 9.06				
		l	o	74 22 56.20		6.86	6.13	5.60
		r	o	165 29 46.69				
		r	u	165 30 5.51				

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	54°20′ I.	54°20′ II.
1894 Nov. 12	ζ Pegasi	l	u	78°54′39″.57			
		l	o	78 52 24.24	149°56′ 6″.46	6″.24	6″.63
		r	o	160 59 47.46			
		r	u	161 0 34.60			
1892 März 24	4 H. Drac.	r	o	300 44 9.35			
		r	u	300 44 54.84	269 46 10.87	5.68	6.32
		l	u	239 47 26.82			
		l	o	239 48 42.49			
	π Leonis	r	o	342 32 42.83			
		r	u	342 32 58.02	10.77	5.94	4.99
		l	u	226 59 23.43			
		l	o	227 0 8.80			
	α Leonis	l	u	230 55 49.87			
		l	o	230 56 6.04	11.60	8.12	7.27
		r	o	308 36 47.04			
		r	u	308 37 3.51			
	30 H. Cam.	l	u	237 59 45.27			
		l	o	238 0 1.46	12.40	4.78	5.50
	•	r	o	304 32 22.59			
		r	u	304 33 10.60			
	l Leonis	l	u	229 32 38.20			
		l	o	229 33 24.99	13.14	7.04	6.13
		r	o	309 59 1.27			
		r	u	309 59 48.09			
März 22	4 H. Drac.	r	o	300 44 9.89			
		r	u	300 44 56.45	269 46 11.46	5.36	6.05
		l	u	239 47 26.57			
		l	o	239 48 42.94			
		l	u	239 47 27.46			
		l	o	239 48 42.19	12.10	4.80	5.49
		r	o	300 44 41.39			
		r	u	300 44 57.40			
	π Leonis	l	u	226 59 25.33			
		l	o	227 0 9.79	12.16	5.86	4.94
		r	o	342 32 43.25			
		r	u	342 33 0.27			
	α Leonis	r	o	308 36 44.38			
		r	u	308 37 1.60	10.87	6.60	5.75
		l	u	230 55 20.94			
		l	o	230 56 6.60			
	30 H. Cam.	r	o	304 32 22.43			
		r	u	304 33 9.49	11.98	5.55	6.27
		l	u	237 59 44.37			
		l	o	238 0 2.20			
	l Leonis	r	o	309 59 1.48			
		r	u	309 59 47.54	12.64	7.36	6.48
		l	u	229 32 37.90			
		l	o	229 33 23.56			
März 25	4 H. Drac.	r	o	60 44 1.28			
		r	u	60 44 46.96	29 45 59.52	3.24	4.94
		l	u	359 47 11.42			
		l	o	359 47 58.46			

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt		51°20′ I.	51°20′ II.
1892 März 25	1 H. Drac.	l	u	359°47′42″.16				
		l	o	359 47 57.70	29°46′	0″.16	2″.55	4″.25
		r	o	60 14 1.58				
		r	u	60 14 49.22				
	π Leonis	l	u	346 59 42.29				
		l	o	347 0 0.42		1.75	6.90	4.62
		r	o	72 32 4.77				
		r	u	72 32 49.80				
	α Leonis	r	o	68 36 5.76				
		r	u	68 36 52 52		0.38	8.40	6.29
		l	u	350 55 9.02				
		l	o	350 55 54.21				
	30 H. Cam.	r	o	61 32 13.84				
		r	u	61 33 0.25		0.59	3.62	5.39
		l	u	357 59 1.14				
		l	o	357 59 47.15				
	l Leonis	r	o	69 58 51.02				
		r	u	69 59 36.85		2.13	7.43	5.26
		l	u	349 32 26.92				
		l	o	349 33 13.71				
März 30	1 H. Drac.	l	u	359 47 10.77				
		l	o	359 47 57.19	29 46	0.04	2.82	4.52
		r	o	60 14 2.90				
		r	u	60 14 49.31				
		r	o	60 14 2.68				
		r	u	60 14 50.13		0.78	3.26	4.96
		l	u	359 47 12.53				
		l	o	359 47 57.84				
	π Leonis	r	o	72 32 4.46				
		r	u	72 32 49.10		1.55	6.77	4.49
		l	u	346 59 13.30				
		l	o	346 59 59.35				
	α Leonis	l	u	350 55 11.45				
		l	o	350 55 57.58		1.68	7.11	5.00
		r	o	68 36 6.03				
		r	u	68 36 51.69				
	30 H. Cam.	l	u	357 58 59.98				
		l	o	357 59 44.46	45	59.76	3.92	5.69
		r	o	61 32 14.95				
		r	u	61 32 59.64				
	l Leonis	l	u	349 32 28.05				
		l	o	349 33 14.83	46	1.74	6.24	4.07
		r	o	69 58 46.25				
		r	u	69 59 37.82				
April 9	1 H. Drac.	l	u	119 48 59.70				
		l	o	119 49 44.58	119 47	47.05	5.67	5.55
		r	o	180 15 49.10				
		r	u	180 16 34.82				
		r	o	180 15 48.85				
		r	u	180 16 35.17		47.47	6.04	5.92
		l	u	119 48 59.24				
		l	o	119 49 46.66				

	Stern	Kr.	F.	Ablesung	Zenithpunkt	51°02′	
						I.	II.
1892 April 9	π Leonis	r	o	192°33′50″.24			
		r	u	192 34 35.44	149°47′48″.99	5″.72	5″.88
		l	u	187 4 2.32			
		l	o	187 4 47.96			
	α Leonis	l	u	140 57 0.78			
		l	o	140 57 46.46	48.75	5.48	5.63
		r	o	138 37 51.24			
		r	u	138 38 36.52			
	30 H. Cam.	l	u	148 0 47.75			
		l	o	148 4 33.35	48.57	5.64	5.51
		r	o	131 34 2.86			
		r	u	131 34 50.33			
	l Leonis	l	u	109 34 17.43			
		l	o	109 35 2.51	49.59	5.96	6.12
		r	o	130 0 36.39			
		r	u	130 4 22.04			
April 10	1 H. Drac.	l	u	149 19 0.23			
		l	o	149 19 46.33	149 47 48.01	6.08	5.91
		r	o	130 15 49.51			
		r	u	130 16 35.97			
		r	o	130 15 50.88			
		r	u	130 16 39.16	48.98	5.74	5.62
		l	u	149 19 1.08			
		l	o	149 19 46.84			
	π Leonis	r	o	192 33 50.02			
		r	u	192 34 34.48	48.95	5.25	5.41
		l	u	187 4 2.53			
		l	o	187 4 48.78			
	α Leonis	l	u	140 57 1.80			
		l	o	140 57 46.98	49.57	5.62	5.77
		r	o	138 37 51.51			
		r	u	138 38 38.00			
	30 H. Cam.	l	u	148 0 48.90			
		l	o	148 4 33.41	49.42	5.79	5.66
		r	o	131 34 3.84			
		r	u	131 34 51.53			
	l Leonis	l	u	109 34 18.05			
		l	o	109 35 5.41	50.49	5.19	5.35
		r	o	130 0 36.04			
		r	u	130 4 22.50			

Aus je zwei in derselben Kreislage auf einander folgenden Ablesungen ergeben sich für die Distanz der beiden horizontalen Fäden im Mittel folgende Werthe:

	Südsterne		Nordsterne	
	Kr. r.	Kr. l.	Kr. r.	Kr. l.
I	45″.75 (17)	45″.53 (17)	46″.19 (15)	45″.96 (15)
II	46.04 (21)	45.54 (21)	46.33 (12)	45.66 (12)
III	46.22 (18)	46.00 (18)	46.56 (17)	45.85 (17)

Mit I, II, III sind hier, wie auch weiterhin, die drei Reihen bezeichnet:

I	1891 Aug. 24	— Sept. 9
II	Oct. 16	— Nov. 12
III	1892 März 21	— April 10.

Die Differenz Kr. rechts — Kr. links ist überall positiv, wir finden:

	Südsterne Kr. r. — Kr. l.	Nordsterne Kr. r. — Kr. l.
I	+ 0.″22	+ 0.″23
II	+ 0.50	+ 0.67
III	+ 0.22	+ 0.71.

Es ist schwer für diesen Unterschied, den auch schon die früheren Beobachter nachgewiesen haben, eine Erklärung zu geben. Aus der Schnauder'schen Beobachtungsreihe fand Dr. Schumann:

Südsterne	Nordsterne
+ 0.″28	+ 0.″60.

Dr. Hayn fand nur bei den Nordsternen einen auffallenden Unterschied:

Südsterne	Nordsterne
—	+ 0.″54.

Nach den bei den oben besprochenen Nivellements gemachten Erfahrungen bot sich zunächst der folgende Erklärungsversuch dar.

Es hatte sich damals gezeigt, dass die langsamen Bewegungen der Niveaublase fast immer in dem Sinne erfolgten, dass die Ablesungen grösser wurden. Die mittelst des Niveaus verbesserte Kreisablesung wurde also im Allgemeinen um so grösser, je längere Zeit zwischen der Einstellung auf den Stern und der Niveauablesung verging und zweitens je schneller die Blasenbewegung war. Nehmen wir nun an, dass letztere am schnellsten erfolgte gleich nach der Drehung um den Conus, so musste immer der in jeder Kreislage zuerst eingestellte Faden im Vergleich zum zweiten eine zu grosse Ablesung ergeben. Bezeichnen wir den bei »Kreis rechts« oben befindlichen Faden mit *a*, den unteren mit *b*, so wurde nach dem Beobachtungsprogramm, welches die Herren Schnauder und Hayn befolgt hatten, immer

erst der obere Faden eingestellt, d. h. bei Kr. r. erst a dann b, bei Kr. l. in der Reihenfolge b a. Es hätte also nach unserer Annahme bei Kr. r. a, bei Kr. l. b eine zu grosse Ablesung geben müssen. Nun ist die Distanz der Fäden $= b - a$, woraus folgte

Kr. r. $b - a$ zu klein
Kr. l. $b - a$ zu gross

d. h. Kr. r. — Kr. l. negativ.

Eine ähnliche Ueberlegung bestimmte den Verfasser schon vor dem Bekanntwerden obiger Differenz vom Sept. 9 1891 an den Beobachtungsmodus dahin abzuändern, dass in jeder Kreislage zuerst Faden a und dann Faden b eingestellt wurde. Wie wir eben gesehen haben, hätte durch die Niveaubewegungen die Differenz Kr. r. — Kr. l. negativ werden müssen, während sie sich aus allen Beobachtungen positiv ergiebt. Da dieselbe ausserdem bei den Nordsternen durchweg grösser ist, als bei den Südsternen, so ist es wohl am wahrscheinlichsten, dass ein systematischer Fehler in der Pointirung auf die beiden nicht ganz gleich starken Fäden, wohl in Folge der bei Kr. r. und bei Kr. l. verschiedenen Stellung des Auges, die in Rede stehende positive Differenz verursacht habe. Durch die Bewegung des Instrumentes musste dieser Fehler bei der früheren Beobachtungsart verkleinert werden, und dies bestätigen auch die Beobachtungen, falls man aus den geringen Unterschieden überhaupt etwas folgern darf: bei Reihe II und III ist Kr. r. — Kr. l. positiv grösser als bei I.

Bilden wir aus beiden Kreislagen das Mittel, so folgen die Fädendistanzen:

	Südsterne	Nordsterne	Mittel
I	45″.64 (34)	46″.07 (30)	45″.84 (64)
II	45.79 (42)	46.00 (24)	45.87 (66)
III	46.11 (36)	46.21 (34)	46.16 (70).

Auch hier ergeben, wie bei den früheren Beobachtern, die Nordsterne grössere Werthe als die Südsterne. Zwischen II und III wurde neu focusirt. Diese Differenz dürfte mit der vorigen auf denselben Grund zurückzuführen sein.

Der Zenithpunkt hat sich gut gehalten, doch scheint an mehreren Abenden eine der Zeit proportionale Aenderung angedeutet zu sein. Für die einzelnen Abende der Reihen I und II geben (mit 3 Ausnahmen) die Nordsterne grössere Zenithpunkte,

als die Südsterne, bei III ist es umgekehrt. Für die Berechnung der Breiten sind diese Unterschiede ohne Bedeutung.

Eine Vergleichung der einzelnen Werthe von φ zeigte schon, dass die Biegung, welche in der Form $b \sin z$ angenommen wurde, stark mit dem Kreisstande variirte. Da auch eine langsame Veränderung von φ vorausgesetzt werden musste, so konnten immer nur Abende gleichzeitig ausgeglichen werden, die bei gleichem Kreisstande kurz nach einander beobachtet waren. Diese Ausgleichung wurde nach der Cauchy'schen Methode durchgeführt und lieferte folgende neun Werthe von φ und b:

	Sterne	φ	mittl. F.	Z.	b
1891 Aug. 24, 25, 28	10	51°20′5″30	± 0″20	0°	+ 1″04
Aug. 29, 31	11	5.60	0.32	120	— 0.85
Sept. 8, 9	11	5.60	0.26	240	+ 2.60
Oct. 16, 23	11	6.07	0.24	240	+ 2.39
Oct. 28, Nov. 3	10	5.76	0.16	0	+ 2.18
Nov. 10, 12	12	6.31	0.14	120	— 0.75
1892 März 21, 22	11	5.93	0.22	270	+ 1.36
März 25, 30	12	4.95	0.19	30	+ 3.36
April 9, 10	12	5.69	0.07	150	— 0.24

Die angesetzten mittleren Fehler der φ sind noch ein wenig zu gross, da zu ihrer Berechnung nicht die aus der Methode der kleinsten Quadrate folgende kleinste Fehlerquadratsumme verwendet wurde. Der m. F. einer Breitenbestimmung aus einem Stern ergiebt sich für die drei Reihen:

I ± 0″87
II 0.61
III 0.57.

Diese Fehler sind berechnet aus den Abweichungen von den zuletzt angegebenen zwei- resp. dreitägigen Mittelwerthen. Man sieht, dass die Genauigkeit bei der ersten Reihe erheblich geringer ist, als bei den späteren, was wohl in dem Schlottern des Instrumentes auf dem Conus seinen Grund haben dürfte. Zwischen II und III dagegen ist die Verbesserung nicht nennenswerth.

Die für die Horizontalbiegung b gefundenen Werthe haben einen deutlichen cyclischen Verlauf. Wir ziehen die Werthe

zusammen, welche bei um 180° verschiedenen Kreisständen erhalten wurden und bekommen so die folgenden b_m:

Z		b_m	b'	$b_m - b'$
0°	180°	+ 1.″61	+ 1.″71	− 0.″10
30	210	+ 3.36	+ 3.29	+ 0.07
60	240	+ 2.49	+ 2.87	− 0.38
90	270	+ 1.36	+ 0.88	+ 0.48
120	300	− 0.80	− 0.70	− 0.10
150	330	− 0.24	− 0.28	+ 0.04

Unter b' sind hier die Grössen beigefügt, die sich aus der Formel

$$b' = + 1.''30 + 2.''10 \sin 2(Z - 11° 28')$$

ergeben. Man hat wohl anzunehmen, dass das zweite Glied die Folge einer ungleichen Durchbiegung des Kreises ist, da ein periodischer Theilungsfehler von dieser Grösse bei der ausgeführten Kreisuntersuchung nicht hätte entgehen können.

Zur Reduction der Beobachtungen wurde die Biegung mit den Werthen b berechnet, und die so verbesserten φ sind in Tafel C unter II. aufgeführt. Aus diesen ergeben sich durch Mittelbildung die folgenden Abendresultate:

1891 Aug.	24/25	51°20′4.″92 (4)	1891 Nov.	3	51°20′5.″71 (6)
	28	5.56 (6)		10	6.53 (6)
	29	5.97 (6)		12	6.09 (6)
	31	5.16 (5)	1892 März	21	6.04 (5)
Sept.	8	5.75 (5)		22	5.83 (6)
	9	5.47 (6)		25	5.12 (6)
Oct.	16	5.74 (5)		30	4.79 (6)
	23	6.35 (6)	April	9	5.77 (6)
	28	5.85 (4)		10	5.62 (6)

Nach den in letzter Zeit von vielen Seiten angestellten Untersuchungen darf man als erwiesen betrachten, dass die Polhöhe keine Constante ist, sondern gewissen Schwankungen unterliegt. Zur Ableitung eines Endresultates können wir daher nicht aus obigen Zahlen einfach das Mittel nehmen, sondern wir haben uns nach einer Interpolationsformel umzusehen, welche sich an die Beobachtungen möglichst gut anschliesst. Eine graphische Darstellung der obigen Abendmittel sowie der von Dr. HAYN für die Periode 1890 Dec. 1 bis 1891 Aug. 5 gefundenen Werthe zeigte nun, dass sich beide Reihen gut durch eine Pe-

riode von etwa 432 Tagen darstellen lassen. Ich wählte gerade 432 Tage nur zur Vereinfachung der Rechnung, weil dann das Argument täglich um 50′ wächst. Zu einer Bestimmung der Periodendauer ist eine so kurze Beobachtungsreihe natürlich nicht geeignet.

Um zu ermitteln, wie genau sich die beiden Beobachtungsreihen von Dr. Hayn und vom Verfasser durch denselben Curvenzug darstellen lassen, wurde zunächst jede Reihe für sich unter Zugrundelegung der 432tägigen Periode nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen. Die beiden Beobachter lieferten so die folgenden Ausdrücke:

Hayn: $\varphi = 51°20'5''.53 + 0''.296 \sin\left(\frac{t - 1891\ \text{Oct. } 6}{432}\right)360°$

Hartmann: $\varphi = 51°20'5''.47 + 0''.778 \sin\left(\frac{t - 1891\ \text{Sept. } 23}{432}\right)360°$

Als mittlerer Fehler eines Abendmittels ergab sich für die beiden Beobachter $\pm 0''.36$ resp. $\pm 0''.39$. Die zweite Beobtungsreihe umfasst nur ein ziemlich steiles Maximum, wodurch der Coefficient des periodischen Gliedes wohl etwas zu gross, die mittlere Breite zu klein ausgefallen sein kann. Die Uebereinstimmung der beiden Epochen ist dagegen ganz überraschend, dieselben liegen nur 13 Tage aus einander. Wir dürfen daher ohne Bedenken beide Reihen zusammen ausgleichen und erhalten dann:

$$\varphi = 51°20'5''.56 + 0''.423 \sin\left(\frac{t - 1891\ \text{Oct. } 2}{432}\right)360°$$

mit einem m. F. der mittleren Polhöhe von $\pm 0''.059$.

Hieraus ergiebt sich die geographische Breite des Hauptpfeilers der Sternwarte

$$\varphi = 51°20'5''.98 + 0''.423 \sin\left(\frac{t - 1891\ \text{Oct. } 2}{432}\right)360°$$

gültig für die von den Beobachtungen umfasste Zeit

1890 December 1 bis 1892 April 10.

Es war anfangs beabsichtigt, auch die früheren Breitenbestimmungen der Leipziger Sternwarte, welche Herr Dr. Schumann in der oben citirten Arbeit zusammengestellt hat, einer einheitlichen Ausgleichung unter Zugrundelegung einer Periode

von etwa 430^d zu unterwerfen. Da es sich hier jedoch, abgesehen von den Beobachtungen von Engelmann und Schnauder, nur um ganz kurze Beobachtungsreihen handelt, die durch lange Zeiträume von einander getrennt sind, so musste einstweilen hiervon Abstand genommen werden. Denn zur Ueberbrückung dieser Zwischenräume fehlt es vorläufig noch an einer genaueren Kenntniss der Dauer der Periode. Um letztere zu bestimmen, hätte nun zunächst die zeitlich am nächsten liegende Beobachtungsreihe von Herrn Schnauder benutzt werden können. Die Schnauder'schen Beobachtungen zeigen jedoch nur eine sehr schwach ausgesprochene zeitliche Schwankung von φ und zwar fällt nach der Untersuchung von Dr. Schumann ein Minimum auf 1886.00, während von unserer oben gefundenen Epoche um $5\frac{1}{4}$ Perioden zurückgerechnet ein Minimum auf 1885 Juli 17 fallen müsste. Nehmen wir nun zwischen den beiden beobachteten Minimis 1886.0 und 1891 Juni 16 fünf Umläufe an, so kommen wir auf eine Periode von 395^d, nehmen wir dagegen vier Umläufe an, was fast ebenso berechtigt ist, so kommen wir auf 493^d. Hieraus ersieht man, dass an eine Bestimmung der Periodendauer aus den genannten Reihen nicht zu denken ist, zumal da es ja noch fraglich ist, ob die Erscheinung überhaupt mit der hier angenommenen und für die kurze Zeit auch gültigen Einfachheit und Regelmässigkeit verläuft. Es blieben nun nur noch die Meridiankreisbeobachtungen von Engelmann aus den Jahren 1866—67 übrig. Da in der Publication nur Mittelwerthe von φ angegeben sind, so ging der Verfasser zur Ermittelung der Abendwerthe auf die Beobachtungsbücher zurück. Hierbei zeigte es sich jedoch, dass etwa noch die gleiche Anzahl Breitenbestimmungen desselben Beobachters bis zum Jahre 1872, jedoch erst zum Theil reducirt, vorhanden sind. Da es aber momentan an der zur neuen Reduction dieser ganzen sechsjährigen Reihe nöthigen Zeit mangelt, so musste dies einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

INHALT.

Seite

C. Neumann, Zur Theorie des Magnetismus. Vorläufige Mittheilung 429

W. Scheibner, Ueber eine Methode von C. G. J. JACOBI zur Bestimmung des Restes unendlicher Reihen 432

P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Vorgelegt von Herrn LIE 444

Fr. Engel, Die höheren Differentialquotienten 468

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Neunundzwanzigste Abhandlung 477

M. Siegfried, Ueber eine neue, stickstoffhaltige Säure der Muskeln. Vorgelegt von Herrn C. LUDWIG 485

J. Hartmann, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Vorgelegt von Herrn BRUNS 490

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LIBRARY

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

VI.

MIT SIEBZEHN FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

Einzelpreis: 1 Mark.

HARVARD LIBRARY

SITZUNG VOM 31. JULI 1893.

Otto Staude in Rostock, *Ueber die Bahncurven eines in einem Raume von drei Dimensionen beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen.* Vorgelegt von Herrn ENGEL.

Die vorliegende Mittheilung enthält die Weiterführung der zuletzt[1]) von mir vorgelegten Untersuchungen. Hatte ich mich damals auf die Bewegung eines Punktes in einem zweifach ausgedehnten Gebilde beschäftigt, so war die Verallgemeinerung der aufgeworfenen Fragen auf dreifache Mannigfaltigkeiten unmittelbar geboten[2]). In der That führen meine jetzigen Entwicklungen zu analogen Resultaten, wie die früheren; nur habe ich in der vorliegenden Note die Erweiterung der §§ 4 und 5 der früheren Note ausgeschlossen, um in einer späteren Mittheilung auf sie zurückzukommen.

§ 1.

Allgemeine Formulirung der Aufgabe.

Es sei ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung zwischen drei Variablen u, v, w in der Form:

$$(1) \qquad v'' = V(u\,v\,w\,v'\,w'), \quad w'' = W(u\,v\,w\,v'\,w')$$

1) Vgl. diese Berichte Jahrg. 1892, vom 17. October.

2) Mittlerweile hat auch Herr STÄCKEL (vgl. diese Berichte Jahrg. 1893, vom 8. Mai) die von mir am 17. October 1892 vorgelegten Resultate theilweise nicht nur auf drei, sondern auf beliebig viele Dimensionen ausgedehnt. Indessen gehen meine obigen Betrachtungen insofern weiter, als sie unmittelbar auch die erforderliche Form des Linienelementes der betreffenden Räume bestimmen, wie in meiner Note vom 17. October 1892, § 3, während Herr STÄCKEL sich auf die Verallgemeinerung meines ebenda in § 2 gegebenen Theorems beschränkt.

vorgelegt, wo die Accente die Differentiation nach u bedeuten; ferner bezeichne das Symbol

$$(2) \qquad Tf = \xi(u,v,w)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta(u,v,w)\frac{\partial f}{\partial v} + \zeta(u,v,w)\frac{\partial f}{\partial w}$$

eine infinitesimale Transformation in den Variablen u, v, w. Sollen dann die Differentialgleichungen (1) die infinitesimale Transformation (2) zulassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Gleichungen identisch in u, v, w, v', w' bestehen[1]):

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_{22}v'^3 + 2\xi_{23}v'^2w' + \xi_{33}v'w'^2 + (2\xi_{12} - \eta_{22})v'^2 \\ + 2(\xi_{13} - \eta_{23})v'w' - \eta_{33}w'^2 + (\xi_{11} - 2\eta_{12})v' - 2\eta_{13}w' - \eta_{11} \\ + \{(2\xi_1 - \eta_2) + 3\xi_2 v' + 2\xi_3 w'\}V - \{\eta_3 - \xi_2 v'\}W \\ + \xi\frac{\partial V}{\partial u} + \eta\frac{\partial V}{\partial v} + \zeta\frac{\partial V}{\partial w} + \{\eta_1 - (\xi_1 - \eta_2)v' + \eta_3 w' - \xi_2 v'^2 \\ - \xi_3 v'w'\}\frac{\partial V}{\partial v'} + \{\zeta_1 + \zeta_2 v' - (\xi_1 - \zeta_3)w' - \xi_2 v'w' \\ - \xi_3 w'^2\}\frac{\partial V}{\partial w'} = 0\,, \\ \xi_{22}v'^2w' + 2\xi_{23}v'w'^2 + \xi_{33}w'^3 - \zeta_{22}v'^2 + 2(\xi_{12} - \zeta_{23})v'w' \\ + (2\xi_{13} - \zeta_{33})w'^2 - 2\zeta_{12}v' + (\xi_{11} - 2\zeta_{13})w' - \zeta_{11} \\ - \{\zeta_2 - \xi_2 w'\}V + \{(2\xi_1 - \zeta_3) + 2\xi_2 v' + 3\xi_3 w'\}W \\ + \xi\frac{\partial W}{\partial u} + \eta\frac{\partial W}{\partial v} + \zeta\frac{\partial W}{\partial w} + \{\eta_1 - (\xi_1 - \eta_2)v' + \eta_3 w' \\ - \xi_2 v'^2 - \xi_3 v'w'\}\frac{\partial W}{\partial v'} + \{\zeta_1 + \zeta_2 v' - (\xi_1 - \zeta_3)w' - \xi_2 v'w' \\ - \xi_3 w'^2\}\frac{\partial W}{\partial w'} = 0\,. \end{cases}$$

Hierin bedeuten die unteren Indices 1, 2, 3 die partielle Differentiation nach u, v, w.

Dieser Satz soll auf eine Gattung von Aufgaben der Mechanik angewendet werden. Es seien nämlich in irgend welchem ebenen oder nicht ebenen Raume von drei Dimensionen u, v, w die Coordinaten eines Punktes und das Quadrat des Linienelementes in diesen Coordinaten:

---

1) Vgl. LIE, Theorie der Transformationsgruppen I, S. 112.

$$(4) \qquad ds^2 = E du^2 + F dv^2 + G dw^2 + 2L dv dw + 2M dw du + 2N du dv .$$

Der betrachtete Punkt bewege sich unter dem Einfluss einer Kräftefunction $H(u, v, w)$, die keine Constante ist. Alsdann lauten die Differentialgleichungen der ∞^4 einem bestimmten Werthe h der Constanten der lebendigen Kraft entsprechenden Bahncurven des Punktes folgendermaassen:

$$(5) \quad \begin{cases} v'' = -\{(n - ev')P + (f - nv')Q + (l - mv')R\} \\ \qquad + \dfrac{(n - ev')H_1 + (f - nv')H_2 + (l - mv')H_3}{2(H + h)} s'^2 \\ w'' = -\{(m - ew')P + (l - nw')Q + (g - mw')R\} \\ \qquad + \dfrac{(m - ew')H_1 + (l - nw')H_2 + (g - mw')H_3}{2(H + h)} s'^2 . \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(6) \quad \begin{cases} s'^2 = E + Fv'^2 + Gw'^2 + 2Lv'w' + 2Mw' + 2Nv' \\ P = \frac{1}{2}E_1 + (N_2 - \frac{1}{2}F_1)v'^2 + (M_3 - \frac{1}{2}G_1)w'^2 \\ \qquad + (M_2 + N_3 - L_1)v'w' + E_3 w' + E_2 v' \\ Q = (N_1 - \frac{1}{2}E_2) + \frac{1}{2}F_2 v'^2 + (L_3 - \frac{1}{2}G_2)w'^2 + F_3 v'w' \\ \qquad + (N_3 + L_1 - M_2)w' + F_1 v' \\ R = (M_1 - \frac{1}{2}E_3) + (L_2 - \frac{1}{2}F_3)v'^2 + \frac{1}{2}G_3 w'^2 \\ \qquad + G_2 v'w' + G_1 w' + (L_1 + M_2 - N_3)v' . \end{cases}$$

Es bedeuten ferner e, f, g, l, m, n die durch D dividirten Unterdeterminanten der gleichnamigen Elemente der Determinante:

$$(7) \qquad D = \begin{vmatrix} E & N & M \\ N & F & L \\ M & L & G \end{vmatrix} ;$$

endlich haben die unteren Indices 1, 2, 3 und die Accente dieselbe Bedeutung, wie in den Gleichungen (1) und (3).

Nach dem vorausgeschickten Satze sollen nun die Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass die Differentialgleichungen (5) die infinitesimale Transformation (2) gestatten, und zwar unabhängig von h.

§ 2.

Einführung der kanonischen Coordinaten der infinitesimalen Transformation.

Um die Betrachtung zu vereinfachen, denken wir uns, worin keine Beschränkung liegt, unter u, v, w ein System kanonischer Coordinaten der infinitesimalen Transformation Tf, so dass:

$$(2') \qquad \xi = 0\,, \quad \eta = 0\,, \quad \zeta = 1\,; \quad Tf = \frac{\partial f}{\partial w}$$

wird. Alsdann reduciren sich die Gleichungen (3) auf:

$$(3') \qquad \frac{\partial V}{\partial w} = 0\,, \quad \frac{\partial W}{\partial w} = 0\,,$$

wo nun für V und W bezüglich die rechten Seiten der Gleichungen (5) einzusetzen sind. Dies giebt die folgenden Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial w}\{(n - ev')P + (f - nv')Q + (l - mv')R\}$$

$$- \frac{1}{2(H+h)}\frac{\partial}{\partial w}[\{(n - ev')H_1 + (f - nv')H_2 + (l - mv')H_3\}s'^2]$$

$$+ \frac{H_3}{2(H+h)^2}\{(n - ev')H_1 + (f - nv')H_2 + (l - mv')H_3\}s'^2 = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\{(m - ew')P + (l - nw')Q + (g - mw')R\}$$

$$- \frac{1}{2(H+h)}\frac{\partial}{\partial w}[\{(m - ew')H_1 + (l - nw')H_2 + (g - mw')H_3\}s'^2]$$

$$+ \frac{H_3}{2(H+h)^2}\{(m - ew')H_1 + (l - nw')H_2 + (g - mw')H_3\}s'^2 = 0\,.$$

Da die beiden Bedingungen unabhängig von h bestehen sollen, zerfallen sie in die sechs Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial w}\{(n - ev')P + (f - nv')Q + (l - mv')R\} = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial w}\{(m - ew')P + (l - nw')Q + (g - mw')R\} = 0\,; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial w}\left[\{(n-ev')H_1+(f-nv')H_2+(l-mv')H_3\}s'^2\right]=0\,, \\ \frac{\partial}{\partial w}\left[\{(m-ew')H_1+(l-nw')H_2+(g-mw')H_3\}s'^2\right]=0\,; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} H_3\{(n-ev')H_1+(f-nv')H_2+(l-mv')H_3\}s'^2=0\,, \\ H_3\{(m-ew')H_1+(l-nw')H_2+(g-mw')H_3\}s'^2=0\,, \end{cases}$$

welche im Folgenden weiter zu discutiren sind.

§ 3.

Die Bedingung für die Kräftefunction.

Aus den Gleichungen (10) gehen, da sie identisch in v', w' bestehen müssen und der Factor $s'^2 \neq 0$ ist, die Bedingungen hervor:

$$\begin{aligned} (eH_1+nH_2+mH_3)H_3&=0\\ (nH_1+fH_2+lH_3)H_3&=0\\ (mH_1+lH_2+gH_3)H_3&=0\,, \end{aligned}$$

aus denen wiederum, weil die Determinante:

$$(11)\qquad d=\begin{vmatrix} e & n & m \\ n & f & l \\ m & l & g \end{vmatrix}=\frac{1}{D}$$

nicht verschwindet und H nicht constant ist, hervorgeht:

$$(12)\qquad H_3=0\,;\quad H=H(u,v)\,.$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend für das Bestehen der Gleichungen (10), deren Bedeutung sich somit in dem Satze aussprechen lässt:

Die Kräftefunction H ist eine Invariante oder die Niveauflächen sind invariante Flächen der infinitesimalen Transformation.

Diesen Umstand können wir zur weiteren Vereinfachung unserer Entwicklung benutzen. Da nämlich mit u, v, w auch $u_1=H(u,v)$, $v_1=G(u,v)$, $w_1=w$, unter $G(u,v)$ eine von $H(u,v)$ unabhängige Function von u, v verstanden, kanonische Coordinaten der infinitesimalen Transformation sind, so können wir fernerhin ohne Beschränkung unsere kanonischen Coordinaten u, v, w von vornherein so gewählt voraussetzen, dass $H_1=1$, $H_2=0$, $H_3=0$ ist.

§ 4.

Die Bedingung für die Verhältnisse der E, F, G, L, M, N.

Dadurch reduciren sich die Gleichungen (9), zu denen wir gegenwärtig übergehen, auf:

$$(9') \qquad \frac{\partial}{\partial w}[(n - ev')s'^2] = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial w}[(m - ew')s'^2] = 0\,.$$

Durch Entwicklung dieser Gleichungen und Nullsetzen der einzelnen Coefficienten der Potenzen und Producte von v', w' folgen die ferneren Bedingungen:

$$\begin{array}{lll} Em_3 + E_3 m = 0 & En_3 + E_3 n = 0 & Fe_3 + F_3 e = 0 \\ Fm_3 + F_3 m = 0 & Gn_3 + G_3 n = 0 & Ge_3 + G_3 e = 0 \\ Nm_3 + N_3 m = 0 & Mn_3 + M_3 n = 0 & Le_3 + L_3 e = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (Ee_3 + E_3 e) - 2(Mm_3 + M_3 m) = 0 & (Ee_3 + E_3 e) - 2(Nn_3 + N_3 n) = 0 \\ (Fn_3 + F_3 n) - 2(Ne_3 + N_3 e) = 0 & (Gm_3 + G_3 m) - 2(Me_3 + M_3 e) = 0 \\ (Lm_3 + L_3 m) - (Ne_3 + N_3 e) = 0 & (Ln_3 + L_3 n) - (Me_3 + M_3 e) = 0\,. \end{array}$$

Da nun e, n, m als Elemente einer Reihe der Determinante d in (11) nicht alle drei gleichzeitig verschwinden können, so folgt leicht, dass die Determinanten:

$$EF_3 - E_3 F\,, \quad EG_3 - E_3 G\,, \quad \text{etc.}\,,$$

alle verschwinden müssen, also die Verhältnisse $E : F : G : L : M : N$ von w unabhängig sind. Diese Bedingung ist aber, wie sofort zu erkennen, auch hinreichend für das Bestehen der vorigen Gleichungen und damit der Gleichungen (9'), bezüglich (9). Die Bedeutung dieser Gleichungen ist also dahin auszusprechen:

Die Verhältnisse der sechs Coefficienten E, F, G, L, M, N des Quadrates des Linienelementes sind von w unabhängig oder die infinitesimale Transformation $Tf = \frac{\partial f}{\partial w}$ ist conform.

§ 5.

Die Bedingung für den gemeinsamen Factor der E, F, G, L, M, N.

Infolge des vorigen Satzes werden wir jetzt die Coefficienten E, F, .. mit

$$e^{\vartheta(u,v,w)} E^1\,, \quad e^{\vartheta(u,v,w)} F^1\,, \quad \ldots$$

bezeichnen, wobei $E^1, F^1, \ldots$ nur von den beiden Variabeln u, v abhängen und der Exponent der Exponentialfunction $e^{\vartheta(u,v,w)}$ eine noch disponible Function der drei Variabeln u, v, w ist. Setzen wir alsdann entsprechend (7) und (11):

$$D^1 = \begin{vmatrix} E^1 & N^1 & M^1 \\ N^1 & F^1 & L^1 \\ M^1 & L^1 & G^1 \end{vmatrix}; \quad e^1 = \frac{F^1 G^1 - L^1 L^1}{D^1},$$

$$f^1 = \frac{G^1 E^1 - M^1 M^1}{D^1}, \quad \ldots; \quad d^1 = \begin{vmatrix} e^1 & n^1 & m^1 \\ n^1 & f^1 & l^1 \\ m^1 & l^1 & g^1 \end{vmatrix},$$

so haben wir:

$$D = e^{3\vartheta} D^1; \quad e = e^{-\vartheta} e^1, \quad f = e^{-\vartheta} f^1, \quad \ldots, \quad d = e^{-3\vartheta} d^1.$$

Endlich ergiebt sich, wenn wir:

$$P = e^{\vartheta} P^1, \quad Q = e^{\vartheta} Q^1, \quad R = e^{\vartheta} R^1$$

setzen, mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned} P^1 = {} & (\tfrac{1}{2} E_1^1 + \tfrac{1}{2} \vartheta_1 E^1) + (N_2^1 + \vartheta_2 N^1 - \tfrac{1}{2} F_1^1 - \tfrac{1}{2} \vartheta_1 F^1) v'^2 \\ & + (\vartheta_3 M^1 - \tfrac{1}{2} G_1^1 - \tfrac{1}{2} \vartheta_1 G^1) w'^2 + (M_2^1 + \vartheta_2 M^1 + \vartheta_3 N^1 \\ & - L_1^1 - \vartheta_1 L^1) v' w' + \vartheta_3 E^1 w' + (E_2^1 + \vartheta_2 E^1) \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke für Q^1 und R^1.

Die Gleichungen (8) nehmen hiernach die folgende Gestalt an:

$$(8') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial w} \{(n^1 - e^1 v') P^1 + (f^1 - n^1 v') Q^1 + (l^1 - m^1 v') R^1\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial w} \{(m^1 - e^1 w') P^1 + (l^1 - n^1 w') Q^1 + (g^1 - m^1 w') R^1\} = 0. \end{cases}$$

Indem wir diese Gleichungen entwickeln, wollen wir nachträglich den obern Index 1 fortlassen, also die neu eingeführten Grössen $E^1, F^1, \ldots, e^1, f^1, \ldots$ wieder mit $E, F, \ldots, e, f, \ldots$ bezeichnen. Die Nullsetzung der Coefficienten der Potenzen und Producte von v', w' in (8') giebt dann, wenn wir für den Augenblick die Abkürzungen:

$$\begin{cases} \Theta_1 = e\vartheta_{11} + n\vartheta_{22} + m\vartheta_{33} \\ \Theta_2 = n\vartheta_{11} + f\vartheta_{22} + l\vartheta_{33} \\ \Theta_3 = m\vartheta_{11} + l\vartheta_{22} + g\vartheta_{33} \end{cases}$$

einführen, die folgenden Relationen:

$$E\Theta_2 = 0 \qquad F\Theta_3 = 0 \qquad G\Theta_1 = 0$$
$$E\Theta_3 = 0 \qquad F\Theta_1 = 0 \qquad G\Theta_2 = 0$$
$$L\Theta_1 = 0 \qquad M\Theta_2 = 0 \qquad N\Theta_3 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}E\Theta_1 - N\Theta_2 = 0 \quad \tfrac{1}{2}F\Theta_2 - N\Theta_1 = 0 \quad L\Theta_2 - M\Theta_1 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}E\Theta_1 - M\Theta_3 = 0 \quad \tfrac{1}{2}G\Theta_3 - M\Theta_1 = 0 \quad L\Theta_3 - N\Theta_1 = 0 .$$

Aus diesen geht aber, wie man leicht zeigt, hervor, dass:

$$\Theta_1 = 0 , \quad \Theta_2 = 0 , \quad \Theta_3 = 0$$

und damit:

$$\vartheta_{13} = 0 , \quad \vartheta_{23} = 0 , \quad \vartheta_{33} = 0 .$$

Demgemäss ist, unter a eine Constante verstanden:

$$\vartheta_3 = 2a$$

$$\vartheta(u, v, w) = 2\vartheta(u, v) + 2aw , \tag{13}$$

wo die neue Function $\vartheta(u, v)$ nur von u, v abhängt. Diese Form von $\vartheta(u, v, w)$ ist auch hinreichend für die Gleichung (8'). Die Gleichungen (8) für sich allein würden der Annahme $H =$ const. in (5) entsprechen und bedeuten daher, dass die geodätischen Linien unseres Raumes die Transformation (2') gestatten; in Verbindung mit den Gleichungen (9) aber ergeben sie nach Vorstehendem die Bedeutung:

Der gemeinsame Factor der Coefficienten E, F, G, L, M, N hat die Form:

$$e^{2\vartheta(u,v)+2aw} ,$$

wo $\vartheta(u, v)$ eine beliebige Function von u, v und a eine Constante ist.

§ 6.

Zusammenfassung der drei gefundenen Bedingungen.

Das Resultat unserer Entwickelungen lautet gegenwärtig folgendermaassen:

Ein Punkt bewegt sich unter Einfluss einer Kräftefunction, die keine Constante ist, in irgend welchem Raume von drei Dimensionen. Wir betrachten die ∞^4 Bahncurven der Bewegung, welche einem bestimmten Werthe der Constanten h der lebendigen Kraft entsprechen. Sollen diese ∞^4 Curven, unabhängig von h, eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass in dem Raume ein Coordinatensystem u, v, w existirt, in welchem das Quadrat des Linienelementes die Form hat:

(14) $ds^2 = e^{2\vartheta(u,v)+2aw}\{E(u,v)\,du^2 + F(u,v)\,dv^2 + G(u,v)\,dw^2 + 2L(u,v)\,dv\,dw + 2M(u,v)\,dw\,du + 2N(u,v)\,du\,dv\}$.

und dass alsdann gleichzeitig die Kräftefunction die Form hat:

(15) $$H = H(u, v)\,.$$

Die infinitesimale Transformation selbst stellt sich in diesem Coordinatensystem durch das Symbol

$$Tf = \frac{\partial f}{\partial w}$$

dar.

Die Differentialgleichungen der Bahncurven lauten in den nämlichen Coordinaten u, v, w, falls u als unabhängige Variable gedacht wird, folgendermaassen:

(16)
$$\begin{cases} v'' = -\{(n - ev')P + (f - nv')Q + (l - mv')R\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{(n - ev')H_1 + (f - nv')H_2}{2(H + h)}\,S \\ w'' = -\{(m - ew')P + (l - nw')Q + (g - mw')R\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{(m - ew')H_1 + (l - nw')H_2}{2(H + h)}\,S\,, \end{cases}$$

worin zur Abkürzung

$$S = \mathfrak{E} + Fv'^2 + Gw'^2 + 2Lv'w' + 2Mu' + 2Nv'\,,$$

$$\begin{aligned} P = {} & (\tfrac{1}{2}E_1 + \vartheta_1 E) + (N_2 + 2\vartheta_2 N - \tfrac{1}{2}F_1 - \vartheta_1 F)v'^2 \\ & + (2aM - \tfrac{1}{2}G_1 - \vartheta_1 G)w'^2 + (M_2 + 2\vartheta_2 M + 2aN - L_1 \\ & - 2\vartheta_1 L)v'w' + 2aEw' + (E_2 + 2\vartheta_2 E)v' \end{aligned}$$

und analoge Ausdrücke für Q und R zu denken sind, während

$$e = \frac{FG - L^2}{D}\,, \quad f = \frac{GE - M^2}{D}\,, \quad \ldots$$

und D die Determinante der E, F, ... ist. Wie erforderlich kommt in den Gleichungen (16) die Variable w selbst nicht vor, nur w' und w''.

Bezüglich des in diesem Paragraphen ausgesprochenen Resultates bedarf es keiner besonderen Erwähnung[1]), dass dasselbe

---

1) Vgl meine Abhandlung im Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 105, S. 344 ff.; ferner Stäckel, Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik etc., ebenda Bd. 107, S. 330; auch Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie etc., I. Theil (1891), S. 6.

nur der Kürze wegen so gefasst ist, dass es von der Bewegung eines *Punktes* spricht, dass es aber ohne weiteres auf alle Bewegungen mit drei Graden der Freiheit, bei denen das Integral der lebendigen Kraft gilt, sich bezieht.

Beispielsweise ist bei der *Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt*, in den EULER'schen Winkeln [1]) φ, χ, ψ ausgedrückt, die lebendige Kraft T von der Form:

$$\begin{aligned} T = &\tfrac{1}{2}\{(A\sin^2\psi + B\cos^2\psi)\sin^2\chi + C\cos^2\chi\}\varphi'^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\{A\cos^2\psi + C\sin^2\psi\}\chi'^2 + \tfrac{1}{2}C\psi'^2 \\ &+ (A-B)\sin\psi\cos\psi\sin\chi\cdot\varphi'\chi' + C\cos\chi\cdot\varphi'\psi' , \end{aligned}$$

wo A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den Drehungspunkt sind. Ist daher eine Kräftefunction von der Form $H(\chi,\psi)$ vorhanden, so gestatten die beiden von der Zeit freien Differentialgleichungen 2. Ordnung der Bewegung die infinitesimale Transformation $Tf = \dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$. Auf dieses Beispiel und einige andere Anwendungen des obigen Satzes komme ich bei einer andern Gelegenheit zurück.

§ 7.

Die reducirte Form des Linienelementes.

Man kann nun die Form (14) des Quadrates des Linienelementes noch vereinfachen, ohne dass u, v, w aufhören, kanonische Coordinaten der infinitesimalen Transformation Tf zu sein. Denn mit u, v, w sind auch u_1, v_1, w_1 kanonische Coordinaten, falls zwischen beiden Systemen die Relationen bestehen:

$$(17) \qquad u_1 = u\,, \quad v_1 = \varphi(u,v)\,, \quad w_1 = \psi(u,v) + w\,.$$

Bestimmt man hier die beiden Functionen φ und ψ durch die Formeln:

$$\varphi(u,v) = \Phi(u) + \int \frac{\sqrt{FG - L^2}}{G}\,\delta v\,, \quad \psi(u,v) = \Psi(u) + \int \frac{L}{G}\,\delta v\,,$$

die nur von u abhängenden Functionen Φ und Ψ beliebig gewählt und die Integrale partiell nach v ausgeführt, so erhält das Quadrat des Linienelementes in (14) die Form:

---

1) Vgl. SCHELL, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl. Bd. I, S. 279.

$$(18)\quad \begin{cases} ds^2 = e^{2\vartheta_1(u_1,v_1)+2aw_1}\{E_1(u_1,v_1)\,du_1^2 + dv_1^2 + dw_1^2 \\ \qquad + 2M_1(u_1,v_1)\,dw_1\,du_1 + 2N_1(u_1,v_1)\,du_1\,dv_1\}, \end{cases}$$

wo ϑ_1, E_1, M_1, N_1 Functionen von u_1, v_1 sind.

Wir können also dem Satze des § 6 noch hinzufügen, dass unter seinen Voraussetzungen das Quadrat des Linienelementes auch auf die Form (18) gebracht werden kann, während die Kräftefunction dabei die Form $H_1(u_1, v_1)$ und das Symbol der infinitesimalen Transformation die Form $Tf = \frac{\partial f}{\partial w_1}$ erhält. Dabei stellt noch immer $u_1 = \text{const.}$ ein beliebig gewähltes System invarianter Flächen der infinitesimalen Transformation dar, während auf jeder dieser Flächen die Curven $v_1 = \text{const.}$ und $w_1 = \text{const.}$ zwei Schaaren isothermer Curven bilden, deren erstere aus Bahncurven der infinitesimalen Transformation besteht.

Hieraus ergiebt sich mit Hinblick auf einen früher von mir aufgestellten Satz [1]) der folgende Zusatz zu dem Resultate des § 6:

Die Bahncurven des Punktes gestatten auch dann noch die infinitesimale Transformation Tf, wenn derselbe sich nicht frei in dem betreffenden Raume bewegt, sondern, ohne Aenderung der Kräftefunction, gezwungen wird, auf einer beliebigen invarianten Fläche der Transformation zu bleiben.

§ 8.

Der Fall des gewöhnlichen Raumes.

Im gewöhnlichen Raume von drei Dimensionen ist die infinitesimale Transformation, welche die geodätischen Linien des Raumes in ihrer Gesammtheit invariant lässt und zugleich conform ist, die conforme projective infinitesimale Transformation. Dieselbe drückt sich bekanntlich in den gewöhnlichen Raumcoordinaten x, y, z durch folgende Formeln aus:

$$Tf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\xi = a + kx + ny - mz$$
$$\eta = b - nx + ky + lz$$
$$\zeta = c + mx - ly + kz,$$

in denen a, b, c, k, l, m, n beliebige Constanten bedeuten.

1) Diese Berichte 1892, S. 438.

Diese Formeln können aber durch Coordinatentransformation in eine der beiden Normalformen gebracht werden

$$(19)\quad \begin{cases} \xi = mx + ny \\ \eta = my - nx \\ \zeta = mz \end{cases} \qquad (19')\quad \begin{cases} \xi = ny \\ \eta = -nx \\ \zeta = m\,, \end{cases}$$

wo m, n wieder irgend welche Constanten sind. Den beiden Normalformen entsprechen bezüglich die infinitesimale Spiraltransformation und die infinitesimale Schraubentransformation [1]). Die invarianten Flächen dieser beiden Transformationen sind die allgemeinen Spiralflächen [1]):

$$F(m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + n \log \sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \log \sqrt{x^2+y^2} - \log z) = 0$$

und die allgemeinen Schraubenflächen:

$$F(x^2+y^2\,,\quad m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + nz) = 0$$

mit den Specialfällen bezüglich der Kegelflächen und Cylinderflächen und dem gemeinsamen Specialfalle der Rotationsflächen. Man kann nun als kanonische Coordinaten der beiden infinitesimalen Transformationen (19) und (19') die folgenden nehmen:

$$(20)\quad \begin{cases} u = \log \sqrt{x^2+y^2} - \log z \\ v = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + n \log \sqrt{x^2+y^2} \\ w = \frac{1}{m} \log z \end{cases} \qquad (20')\quad \begin{cases} u = \log \sqrt{x^2+y^2} \\ v = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + nz \\ w = \frac{1}{m} z\,. \end{cases}$$

Alsdann erhält man in der That für das Quadrat des Linienelementes beziehungsweise:

$$ds^2 = e^{2mw}\left\{\frac{e^{2u}}{m^2}\left[(m^2+n^2)(du+m\,dw)^2 + dv^2 - 2n(du+m\,dw)dv\right] + m^2 dw^2\right\}$$

$$ds^2 = e^{2u}\left\{du^2 + \left(\frac{1}{m}dv - n\,dw\right)^2\right\} + m^2 dw^2\,,$$

also Ausdrücke von der Form (14).

Rostock, am 27. Juli 1893.

1) Vgl. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen, bearb. u. herausgeg. von SCHEFFERS, S. 242 ff.

M. Krause, *Zur Transformation der Thetafunctionen.* III.

Die folgenden Betrachtungen stehen mit denjenigen im engen Zusammenhang, die in zwei Noten vom 6. Februar und 8. Mai d. J. in diesen Berichten veröffentlicht sind. Sie haben den Zweck, die Anwendbarkeit der in den citirten Notizen aufgestellten Additionstheoreme für den Fall der elliptischen Functionen und dem Transformationsgrad $n = 5$ darzuthun. Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. Der eine Theil zeigt die Bedeutung der Additionstheoreme für die Construction der gewöhnlichen Multiplicatorgleichung, der andere für die Construction von Modulargleichungen. Der Gesichtspunkt, welcher für den Verfasser bei diesen Untersuchungen massgebend ist, geht dahin zu zeigen, dass eine Reihe von Transformationsgleichungen specielle Fälle allgemeiner Gleichungen mit veränderlichen Argumenten sind, die sich durch überaus grosse Einfachheit und Gesetzmässigkeit auszeichnen und alle in einem Additionstheoreme wurzeln. Es dürfte hiermit ein wichtiges Moment für die Transformationstheorie gegeben sein. So wie die gewöhnliche Constantenrelation

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

am einfachsten und natürlichsten durch Specialisirung der Argumente in bekannten Thetarelationen mit veränderlichen Coefficienten gefunden wird, so dürfte auch eine grosse Anzahl von Transformationsgleichungen ihre naturgemässe Ableitung durch Specialisirung unserer Additionstheoreme erhalten.

Bei der unendlichen Formenmannigfaltigkeit, die bei diesen Untersuchungen stattfindet, kann eine völlig erschöpfende Be-

handlung nicht in Frage gezogen werden. Im Folgenden finden sich lediglich die wichtigsten Relationen entwickelt, daneben die Gesichtspunkte, wie noch weitere Gleichungen aufgestellt werden können.

§ 1.

Anwendung der aufgestellten Additionstheoreme für die Construction der Multiplicatorgleichung 5. Grades.

Gemäss der allgemeinen Definitionsgleichung setzen wir

$$M_\xi = \vartheta_3\left(0, \frac{\tau + 16\xi}{5}\right)^2 : \vartheta_3(0,\tau)^2 ,$$

$$M_6 = 5\vartheta_3(0, 5\tau)^2 : \vartheta_3(0,\tau)^2 ,$$

dann gelten die Beziehungen:

$$\vartheta_3\left(0, \frac{\tau + 16\xi}{5}\right) = x_0 + 2\alpha^\xi \cdot x_1 + 2\alpha^{4\xi} \cdot x_2 ,$$

$$x_g = \vartheta_3[g]\,(0, 5\tau) , \quad g: 0, 1, 2 ,$$

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}} .$$

Unter solchen Umständen folgt das Gleichungssystem (1):

$$\vartheta_3(0,\tau)^2 \Sigma M = 10(x_0^2 + 4x_1x_2) ,$$

$$\vartheta_3(0,\tau)^4 \Sigma M^2 = 30(x_0^2 + 4x_1x_2)^2 = \tfrac{3}{10}\vartheta_3(0,\tau)^4(\Sigma M)^2 ,$$

$$\vartheta_3(0,\tau)^6 \Sigma M^3 = 10(13x_0^6 + 96x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60x_0^4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 640x_1^3 \cdot x_2^3 + 16 \cdot 45 \cdot x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2) ,$$

$$\vartheta_3(0,\tau)^8 \Sigma M^4 = 70(x_0^2 + 4x_1 \cdot x_2)F ,$$

$$F = 9x_0^6 + 2^7 x_0(x_1^5 + x_2^5) - 20x_0^4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2^4 \cdot 35 x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + 5 \cdot 2^6 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 .$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\Sigma M^4 = \tfrac{7}{15}\Sigma M(2\Sigma M^3 - \tfrac{1}{8}(\Sigma M)^3) .$$

Von der Aufstellung der fünften und sechsten Potenzensumme möge abgesehen werden, so einfach sich auch die Betrachtungen gestalten.

Es soll nun gezeigt werden, wie diese Grössen mit Hülfe unserer Additionstheoreme berechnet werden können. Für den Fall von zwei Factoren fanden wir das Theorem:

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,\tau) = \Sigma\vartheta_3[g_1](v_1+2v_2, 5\tau)\cdot\vartheta_3[g_2](2v_1-v_2, 5\tau)$$
$$g_1+2g_2 \equiv 0 \bmod 5 .$$

Wenn wir die rechte Seite ausführen und die Bezeichnungsweise der letzten Notiz einführen, so erhalten wir:

$$(2)\qquad \vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,\tau) = [3_0]^{(1)}[3_0]^{(2)} + [3_3]^{(1)}[3_1]^{(2)} + [3_1]^{(1)}[3_2]^{(2)} + [3_4]^{(1)}[3_3]^{(2)} + [3_2]^{(1)}[3_4]^{(2)} .$$

Setzen wir in dieser Gleichung:

$$v_1 = v_2 = 0 ,$$

so erhalten wir die Beziehung:

$$3)\qquad \vartheta_3^2 = x_0^2 + 4x_1\cdot x_2 ,$$

welche den Werth der ersten Potenzsumme unmittelbar ergiebt.

Die Additionstheoreme, bei denen die einzelnen Glieder aus vier Factoren bestehen, können offenbar nichts Neues ergeben, wie ja auch die zweite Potenzsumme bekannt ist, sobald die erste gefunden worden ist.

Die dritte Potenzsumme wird mit Hülfe eines Additionstheoremes gefunden, bei welchem die einzelnen Glieder aus sechs Factoren bestehen. Dasselbe gehört zu dem Schema:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 .
\end{array}$$

Es findet sich dieses Schema schon in einer Arbeit von VICTOR MERTENS »Ueber eine Verallgemeinerung der SCHRÖTER'schen Multiplicationsformeln für Thetareihen«, auf welche Verfasser in der neuesten Zeit aufmerksam wurde und welche ähnliche Gesichtspunkte für die Transformationstheorie enthält, wie die von dem Verfasser aufgestellten.

Das Additionstheorem lautet:

$$4)\qquad \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3(v_\varepsilon,\tau) = \Sigma\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, 5\tau) ,$$

wobei die Grössen w_ε in der bekannten Weise zu bilden sind und die Grössen g_ε den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_4 \equiv -2g_1 - g_2 + 2g_3 \bmod 5\,,$$
$$g_5 \equiv -g_1 - 2g_2 - 2g_3 \bmod 5\,,$$
$$g_6 \equiv -2g_1 + 2g_2 - g_3 \bmod 5\,.$$

Die Grössen g_1, g_2, g_3 bleiben willkürlich.

Setzen wir hierin $v_1 = v_2 = \cdots = v_6 = 0$, so erhalten wir die Constantenrelation:

(5) $$\vartheta_3^6 = x_0^6 + 12x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + 40x_1^3 \cdot x_2^3\,.$$

Andrerseits ist aber:

$$\frac{\vartheta_3^6 (\Sigma M)^3}{10} = 13x_0^6 + 96x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60x_0^4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 640x_1^3 \cdot x_2^3 + 16 \cdot 45 x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2\,,$$

$$\frac{\vartheta_3^6 (\Sigma M)^3}{200} = 5x_0^6 + 60x_0^4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 320x_1^3 \cdot x_2^3 + 240x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2\,,$$

mithin ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_3^6}{10}\left(\Sigma M^3 - \frac{(\Sigma M)^3}{20}\right) = 8x_0^6 + 96x_0(x_1^5 + x_2^5) + 320x_1^3 \cdot x_2^3 + 480x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2\,,$$

oder also:

6) $$\Sigma M^3 = \frac{(\Sigma M)^3}{20} + 80\,.$$

Es ist die dritte Potenzsumme und mit ihr nach unseren früheren Betrachtungen auch die vierte berechnet. Das Product aller Wurzeln der Multiplicatorgleichung ist unmittelbar bekannt, so dass wir die sämmtlichen Coefficienten derselben unmittelbar bestimmen können mit Ausnahme von p_5 und zwar ergiebt sich:

$$p_1 = -10\,,\quad p_2 = 35\,,\quad p_3 = -60\,,\quad p_4 = 55\,,\quad p_6 = 5$$

oder also wir erhalten die Gleichung:

(7) $$x_0^6 - 10x_0^5 + 35x_0^4 - 60x_0^3 + 55x_0^2 + p_5 x_0 + 5 = 0\,.$$

In Bezug auf die Bestimmung der Constanten p_5 möge u. A. auf die citirte Arbeit von MERTENS verwiesen werden.

Wir hätten ähnlich wie im Falle $n = 3$ dasselbe Resultat durch Untersuchung der fünften Potenzsumme erhalten können.

Einige der gefundenen Resultate können verallgemeinert werden, so ergiebt sich z. B. der

Lehrsatz. *In einer jeden Multiplicatorgleichung, bei welcher der Transformationsgrad n eine Primzahl von der Form $4k+1$ ist, ist der Coefficient von M^n gleich $-2n$.*

§ 2.

Anwendung der aufgestellten Additionstheoreme für die Construction von Modulargleichungen 5. Grades.

Wir gehen jetzt zu der Construction von Modulargleichungen über, wobei wir unter letzteren derartige Gleichungen verstehen, bei denen nur die Quotienten transformirter Thetafunctionen vorkommen, im übrigen aber beliebige Irrationalitäten zugelassen werden. Derartige Beziehungen sind in grosser Fülle von einer Reihe von Autoren aufgestellt worden. Wir wollen nun einige der wichtigsten auf Grund unserer Additionstheoreme wirklich entwickeln und nehmen dazu zunächst ein Additionstheorem, bei welchem die einzelnen Glieder drei Factoren besitzen. Dasselbe lautet:

$$(1) \qquad 2^3\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,2\tau)\cdot\vartheta_3(v_3,5\tau)$$
$$=\Sigma\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1,2\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2,4\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3,20\tau),$$

wobei die Grössen w und g durch das Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 1 . \end{array}$$

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir thatsächlich eine Modulargleichung in irrationaler Form. Wenn nichtsdestoweniger noch weitere Untersuchungen an das Additionstheorem geknüpft werden, so sind dieselben mehr formaler Natur. Sie haben den Zweck, einen Thèil der Irrationalitäten fortzuschaffen und zu zeigen, wie durch wenige einfache Schlüsse, die im wesentlichen auf Substitution halber Perioden herauskommen, eine bekannte Formel erhalten werden kann.

Ausgeführt lauten die Beziehungen für die Grössen w und g:

$$2w_1=v_1+v_2+v_3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \quad g_1\equiv s_1+2s_2+5s_3 \bmod 4,$$
$$2w_2=3v_1+v_2-v_3+3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \quad g_2\equiv 3s_1+2s_2-5s_3 \bmod 8,$$
$$2w_3=5v_1-5v_2+v_3+5\alpha_1-5\alpha_2+\alpha_3, \quad g_3\equiv 5s_1-10s_2+5s_3 \bmod 40.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$g_1 \equiv \frac{g_3}{5} \bmod 4\,, \quad g_2 \equiv \frac{3\,g_3}{5} \bmod 8\,, \quad g_3 \equiv 0 \bmod 5\,.$$

Setzen wir an Stelle von:

$$v_1\,, \qquad v_3 \quad \text{resp.}$$
$$v_1 + \tfrac{1}{2}\,, \quad v_3 - \tfrac{1}{2}$$

so bleibt w_1 ungeändert, dagegen ändern w_2 und w_3 sich um 1.

Mithin erhalten wir:

$$2^3\,\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_0(v_3,5\tau)$$
$$= \Sigma(-1)^{g_1}\,\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1,2\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2,4\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3,20\tau)\,,$$

wenn wir berücksichtigen, dass:

$$g_2 + \frac{g_3}{5} \equiv 4\,g_1 \bmod 8$$

ist. Mithin folgt:

(2) $\quad 4f_1 = \Sigma\,\vartheta_3[g_1](w_1,2\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2,4\tau)\,\vartheta_3[g_3](w_3,20\tau)\,,$

wobei jetzt die Congruenzen bestehen

$$g_1 \equiv \frac{g_2}{5} \bmod 2\,, \quad g_2 \equiv \frac{3\,g_3}{5} \bmod 4\,, \quad g_3 \equiv 0 \bmod 5$$

und gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_2,2\tau)\,(\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_3,5\tau) + \vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_3,5\tau))\,.$$

Setzen wir ferner an Stelle von:

$$v_1 \quad , \qquad v_2 \quad , \qquad v_3 \quad \text{resp.}$$
$$v_1 + \frac{\tau}{2}\,, \quad v_2 + \tau\,, \quad v_3 + \frac{5\tau}{2}\,,$$

so ändert sich w_1 um 2τ. Mithin ergiebt sich

$$4f_2 = \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\,\vartheta_3[g_1](w_1,2\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2,4\tau)\,\vartheta_3[g_3](w_3,20\tau),$$
$$f_2 = \vartheta_3(v_2,2\tau)\,(\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3,5\tau) - \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3,5\tau))\,.$$

Durch Subtraction erhalten wir:

(3) $\quad 2(f_1 - f_2) = \Sigma'\,\vartheta_3[g_1](w_1,2\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2,4\tau)\,\vartheta_3[g_3](w_3,20\tau)\,,$

wobei auf der rechten Seite $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ gleich 1 zu setzen ist. Wir deuten das durch Hinzufügen des Striches an das Summenzeichen an. Die Summe enthält demnach nur Glieder, die den Werthen entsprechen:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \\ g_1 &= 0, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = 10, \\ g_1 &= 1, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 5, \\ g_1 &= 1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = 15. \end{aligned}$$

Diese Formel ist die naturgemässe Verallgemeinerung der SCHRÖTER'schen Formel (14) pag. 16 und zeigt zu gleicher Zeit den Unterschied, welcher zwischen den Betrachtungen von SCHRÖTER und denen des Verfassers besteht. SCHRÖTER geht im Wesentlichen von Relationen zwischen Producten von zwei Factoren aus und kommt durch eine Reihe geschickter aber nicht nahe liegender Operationen zu seinen Resultaten, während hier ein einziger naturgemässer Ausgangspunkt gegeben ist. Wir erhalten die SCHRÖTER'sche Formel, wenn wir setzen:

$$v_1 = -v_3, \quad v_2 = 0, \quad w_1' = 0, \quad w_2' = 2v_1, \quad w_3' = 2v_1,$$

wobei die Grössen $2w'$ sich von den Grössen $2w$ um die Grössen α unterscheiden.

Setzen wir die Argumente sämmtlich der Null gleich, so erhalten wir die Modulargleichung:

$$\begin{aligned} (4)\quad & 2\vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_0(0,4\tau)\vartheta_0(0,20\tau) = \vartheta_3(0,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(0,5\tau) \\ & + \vartheta_0(0,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_0(0,5\tau) - \vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(0,5\tau). \end{aligned}$$

Ausser dem soeben betrachteten Additionstheorem giebt es noch andere, bei welchen die einzelnen Glieder je drei Factoren haben. Dieselben können ähnlich wie das betrachtete untersucht werden. Wir beschränken uns darauf, das folgende kurz anzudeuten:

$$\begin{aligned} (5)\quad & 8\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,5\tau)\cdot\vartheta_3(v_3,10\tau) \\ & = \Sigma\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1,4\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2,10\tau)\,\vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3,20\tau), \end{aligned}$$

wobei die Grössen w und g vermöge des Schemas bestimmt sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1. \end{matrix}$$

Wir gehen nun zu Additionstheoremen über, bei welchen vier Factoren in den einzelnen Gliedern vorkommen. Wir greifen das folgende heraus:

$$(6)\quad 16\vartheta_3(v_1,\tau)\cdot\vartheta_3(v_2,2\tau)\cdot\vartheta_3(v_3,5\tau)\vartheta_3(v_4,10\tau)=\Sigma\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon,n_\varepsilon\tau),$$

$$n_1=2,\quad n_2=4,\quad n_3=10,\quad n_4=20.$$

Die Grössen w und g sind vermöge des Schemas bestimmt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}.$$

Setzen wir die Argumente der Null gleich, so erhalten wir wieder eine Modulargleichung in irrationaler Form. Ein Theil der Irrationalitäten kann ähnlich wie vorhin durch geeignete Substitutionen halber Perioden fortgeschafft werden. Die Summe ist über alle Combinationen der Grössen α gleich 0 oder 1 auszudehnen.

Wir schreiben zunächst die Werthe der Grössen w_ε und g_ε ausführlich hin.

Es ist:

$$\begin{aligned} 2w_1 &= v_1+v_2+v_3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, & g_1 &\equiv s_1+2s_2+5s_3 \bmod 4,\\ 2w_2 &= 2v_1-v_2-v_4+2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4, & g_2 &\equiv 2s_1-2s_2-10s_4 \bmod 8,\\ 2w_3 &= 5v_1-v_3+v_4+5\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4, & g_3 &\equiv 5s_1-5s_3+10s_4 \bmod 20,\\ 2w_4 &= -5v_2+2v_3+v_4-5\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, & g_4 &\equiv -10s_2+10s_3+10s_4 \bmod 40. \end{aligned}$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$g_2\equiv 0 \bmod 2,\quad g_3\equiv 0 \bmod 5,\quad g_4\equiv 0 \bmod 10,$$

$$\frac{g_3}{5}\equiv -g_1+g_2 \bmod 4,\quad \frac{g_4}{10}\equiv g_1-\frac{g_2}{2} \bmod 4.$$

Wir setzen nun an Stelle von:

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3 \quad \text{resp.}$$

$$v_1+\tfrac{1}{2},\quad v_2+1,\quad v_3+\tfrac{5}{2},$$

so ändert sich w_1 um 2. Mithin erhalten wir:

$$16\,\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\vartheta_0(v_3,5\tau)\,\vartheta_3(v_4,10\tau)$$

$$=\Sigma(-1)^{g_1}\Pi\vartheta_1\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon,n_\varepsilon\tau),$$

oder also:

$$8f_1 = \Sigma \vartheta_3\left[\frac{g'_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,, \tag{7}$$

$f_1 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_4, 10\tau)\,(\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_3, 5\tau) + \vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_3, 5\tau))$,

wobei die Grössen g_ε' sich dadurch von den Grössen g_ε unterscheiden, dass $g_1' \equiv 0 \bmod 2$ ist.

Jetzt setzen wir an Stelle von:

$$\begin{array}{cccc} v_1\,, & v_2\,, & v_4 & \text{resp.} \\ v_1 + \frac{1}{2}\,, & v_2 - \frac{1}{2}\,, & v_4 - \frac{5}{2}\,, & \end{array}$$

so ändert sich w_2 um 2, so dass wir erhalten:

$$8f_2 = \Sigma(-1)^{\frac{g'_2}{2}}\,\Pi\,\vartheta_3\left[\frac{g'_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,,$$

$f_2 = \vartheta_0(v_2, 2\tau)\,\vartheta_0(v_4, 10\tau)\,(\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_3, 5\tau) + \vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_3, 5\tau))$.

Mithin wird:

$$4(f_1 + f_2) = \Sigma\,\Pi\,\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,. \tag{8}$$

Hierbei nehmen die Grössen g die Werthe an:

$$\begin{array}{cccc} g_1 = 0\,, & g_2 = 0\,, & g_3 = 0\,, & g_4 = 0\,, \\ g_1 = 0\,, & g_2 = 2\,, & g_3 = 0\,, & g_4 = 10\,, \\ g_1 = 1\,, & g_2 = 0\,, & g_3 = 5\,, & g_4 = 10\,, \\ g_1 = 1\,, & g_2 = 2\,, & g_3 = 5\,, & g_4 = 0\,. \end{array}$$

Wir setzen an Stelle von:

$$\begin{array}{cccc} v_1\,, & v_3\,, & v_4 & \text{resp.} \\ v_1 + \frac{\tau}{2}\,, & v_3 + 3\cdot\frac{5\tau}{2}\,, & v_4 - 3\cdot\frac{10\tau}{2}\,, & \end{array}$$

so tritt an Stelle von w_1, w_2, w_3 resp.:

$$w_1 + 4\tau\,, \quad w_2 + 8\tau\,, \quad w_3 - 10\tau\,.$$

Mithin wird:

$$4(f_3 + f_4) = \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}\,\Pi\,\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,, \tag{9}$$

$f_3 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_2(v_4, 10\tau)\,(\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau) + \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau))$,

$f_4 = i^2\,\vartheta_0(v_2, 2\tau)\,\vartheta_1(v_4, 10\tau)\,(\vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau) - \vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau))$.

Ferner setzen wir an Stelle von

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad \text{resp.}$$
$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 + \tau, \quad v_3 + \frac{5\tau}{2},$$

so tritt an Stelle von w_1: $w_1 + 2\tau$ oder also wir erhalten:

$$(10) \quad 4(f_5 + f_6) = \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \Pi \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$
$$f_5 = \vartheta_2(v_2, 2\tau)\vartheta_3(v_4, 10\tau)(\vartheta_2(v_1,\tau)\vartheta_2(v_3, 5\tau) - \vartheta_4(v_1,\tau)\vartheta_4(v_3, 5\tau)),$$
$$f_6 = i^3\vartheta_4(v_2, 2\tau)\vartheta_0(v_4, 10\tau)(\vartheta_4(v_1,\tau)\vartheta_2(v_3, 5\tau) + \vartheta_2(v_1,\tau)\vartheta_4(v_3, 5\tau)).$$

Durch Subtraction erhalten wir:

$$(11) \quad 4(f_3 + f_4 - f_5 - f_6)$$
$$= \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_3}((-1)^{\alpha_1} - (-1)^{\alpha_2})\Pi\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau).$$

Diese Formel ist die naturgemässe Verallgemeinerung der SCHRÖTER'schen Formel (13) pag. 16. Wir erhalten dieselbe, indem wir alle Argumente der Null gleichsetzen. Sie lautet:

$$(12) \quad 2\vartheta_0(0, 4\tau)\vartheta_0(0, 20\tau)(\vartheta_0(0, 2\tau)\vartheta_3(0, 10\tau) - \vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_0(0, 10\tau))$$
$$= \vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0, 5\tau)(\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 10\tau) - \vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_3(0, 10\tau)).$$

Bei SCHRÖTER ist an Stelle von 2τ: τ gesetzt. Wir können die Formel auch schreiben:

$$\sqrt[4]{k\lambda}(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{k_1\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{k_1}).$$

In den fertigen Formeln, die wir erhalten haben, treten eine Reihe von Irrationalitäten auf. Das Fortschaffen derselben ist mühsam. Wir können an Stelle dessen Additionstheoreme aufstellen, bei denen oder vermöge derer ein Theil der Irrationalitäten von selbst fortgeschafft ist. Es geschieht dieses, indem die Zahl der Factoren in den einzelnen Producten verdoppelt wird. Wir wollen das an einem Falle näher auseinandersetzen, indem wir an Stelle des ersten Additionstheorems mit Producten von drei Factoren ein solches mit Producten von sechs Factoren in Betracht ziehen und zwar das folgende:

$$(13) \quad 4^3 \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6} \vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon\tau) = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6} \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1, \quad m_5 = m_6 = 5,$$
$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = n_4 = 4, \quad n_5 = n_6 = 20,$$

wobei die Grössen w_ε und g_ε durch das Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 5 & 0 & 1. \end{array}$$

Es gelten nun hier dieselben Betrachtungen wie früher. Wir erhalten eine Modulargleichung durch Nullsetzen der Argumente. Durch wiederholte Anwendung der Substitution halber Perioden kommen wir zu besonders einfachen Resultaten.

In der That, ausführlich geschrieben lauten die Beziehungen zwischen den Grössen m_ε, g_ε, v_ε, α_ε:

$$\begin{aligned} 2w_1 &= v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ 2w_2 &= v_1 + v_3 - v_4 + v_6 + \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_6, \\ 2w_3 &= 3v_2 + v_3 + v_4 - v_5 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2w_4 &= 3v_1 + v_3 - v_4 - v_6 + 3\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_6, \\ 2w_5 &= 5v_2 - 5v_3 - 5v_4 + v_5 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3 - 5\alpha_4 + \alpha_5, \\ 2w_6 &= 5v_1 - 5v_3 + 5v_4 + v_6 + 5\alpha_1 - 5\alpha_3 + 5\alpha_4 + \alpha_6. \end{aligned}$$

$$g_1 \equiv s_2+s_3+s_4+5s_5 \bmod 4,\quad g_4 \equiv 3g_1+g_3-g_4-5g_6 \bmod 8,$$
$$g_2 \equiv s_1+s_3-s_4+5s_6 \bmod 4,\quad g_5 \equiv 5g_2-5g_3-5g_4+5g_5 \bmod 40,$$
$$g_3 \equiv 3s_2+s_3+s_4-5s_5 \bmod 8,\quad g_6 \equiv 5g_1-5g_3+5g_4+5g_6 \bmod 40.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$2g_1+3g_3+g_5 \equiv 0 \bmod 8,\quad 2g_2+3g_4+g_6 \equiv 0 \bmod 8,$$
$$g_5 \equiv g_6 \equiv 0 \bmod 5,$$
$$g_3 \equiv -\frac{g_5}{5} \bmod 5,\quad g_4 \equiv -\frac{g_6}{5} \bmod 4,\quad g_3+g_4 \equiv \frac{3(g_5+g_6)}{5} \bmod 8.$$

Wir setzen jetzt an Stelle von

$$v_1 \quad , \quad v_6$$
$$v_1+\tfrac{1}{2}, \quad v_6-\tfrac{1}{2},$$

so gehen w_1 und w_6 über in w_1+1 und w_6+1. Mithin ergiebt sich:

$$4^3\vartheta_0(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_3(v_5,5\tau)\vartheta_0(v_6,5\tau)$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{4}\left(g_4+\frac{g_6}{5}\right)}\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon,n_\varepsilon\tau)\,.$$

Durch Addition erhalten wir:

$$32f_1=\Sigma\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon'}{2}\right](w_\varepsilon,n_\varepsilon\tau)\,, \tag{14}$$

$$f_1=\vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_3(v_5,5\tau)\vartheta_3(v_6,5\tau)$$
$$+\vartheta_0(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_3(v_5,5\tau)\vartheta_0(v_6,5\tau)\,,$$

wobei die Grössen g_ε' denselben Congruenzen Genüge leisten, wie die Grössen g_ε, daneben aber noch der Congruenz:

$$g_4'+\frac{g_6'}{5}\equiv 0 \bmod 8\,.$$

Wir setzen zweitens an Stelle von:

$$v_2\,,\qquad v_5\quad\text{resp.}$$
$$v_2+\tfrac{1}{2}\,,\quad v_5-\tfrac{1}{2}\,,$$

so gehen w_3 und w_5 über in w_3+1, w_5+1, oder also wir erhalten:

$$16(f_1+f_2)=\Sigma\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon''}{2}\right](w_\varepsilon,n_\varepsilon\tau)\,, \tag{15}$$

$$f_2=\vartheta_3(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_0(v_5,5\tau)\vartheta_3(v_6,5\tau)$$
$$+\vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_0(v_5,5\tau)\vartheta_0(v_6,5\tau)\,,$$

wobei die Grössen g_ε'' den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_1''\equiv-\frac{g_5''}{5}\bmod 4\,,\quad g_2''\equiv-\frac{g_6''}{5}\bmod 4\,,$$
$$g_3''\equiv-\frac{g_5''}{5}\bmod 8\,,\quad g_4''\equiv-\frac{g_6''}{5}\bmod 8\,,$$
$$\frac{g_5''+g_6''}{5}\equiv 0 \bmod 2\,.$$

Wir setzen jetzt an Stelle von

$$v_2\,,\quad v_3\,,\quad v_4\,,\quad v_5\quad\text{resp.}$$
$$v_2+\tfrac{1}{2}\,,\quad v_3+\tfrac{1}{2}\,,\quad v_4+\tfrac{1}{2}\,,\quad v_5+\tfrac{1}{2}\,,$$

so geht w_1, w_3, w_5 über in resp.:

$$w_1 + 1\,, \quad w_3 + 1\,, \quad w_5 - 1\,,$$

so dass wir erhalten:

$$16(f_3 + f_4) = \Sigma(-1)^{\frac{g_1''}{2}+\frac{g_3''}{4}-\frac{g_5''}{20}} \Pi \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon''}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,,$$

$$\begin{aligned} f_3 = {} & \vartheta_3(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_0(v_5, 5\tau)\vartheta_3(v_6, 5\tau) \\ & + \vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_0(v_5, 5\tau)\vartheta_0(v_6, 5\tau)\,, \\ f_4 = {} & \vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_3(v_5, 5\tau)\vartheta_3(v_6, 5\tau) \\ & + \vartheta_0(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_3(v_5, 5\tau)\vartheta_0(v_6, 5\tau)\,. \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir:

$$(16) \quad 8F_1 = 8(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = \Sigma\Pi\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,,$$

$$g_1 \equiv -\frac{g_5}{5} \bmod 2\,, \quad g_2 \equiv -\frac{g_6}{5} \bmod 2\,,$$

$$g_3 \equiv -\frac{g_5}{5} \bmod 4\,, \quad g_4 \equiv -\frac{g_6}{5} \bmod 4\,.$$

Wir setzen nunmehr an Stelle von:

$$\begin{array}{cccc} v_1\,, & v_3\,, & v_4\,, & v_6 \text{ resp.} \\ v_1 + \frac{\tau}{2}\,, & v_3 + \frac{\tau}{2}\,, & v_4 - \frac{\tau}{2}\,, & v_6 + \frac{5\tau}{2}\,, \end{array}$$

so geht w_2 in $w_2 + 2\tau$ über. Nehmen wir an, dass F_1 von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen in F_2 übergeht, so folgt:

$$8F_2 = \Sigma(-1)^{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6}\Pi\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)$$

oder also:

$$(17) \qquad 4(F_1 - F_2) = \Sigma'\Pi\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau)\,,$$

wobei in der Summe jetzt $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$ eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir endlich an Stelle von:

$$\begin{array}{cccc} v_2\,, & v_3\,, & v_4\,, & v_5 \text{ resp.} \\ v_2 + \frac{\tau}{2}\,, & v_3 + \frac{\tau}{2}\,, & v_4 + \frac{\tau}{2}\,, & v_5 + \frac{5\tau}{2} \end{array}$$

so geht w_1 über in $w_1 + 2\tau$.

Nehmen wir an, dass F_1 und F_2 hierbei von dem Exponentialfactor abgesehen in F_3 und F_4 übergehen, so wird:

$$4(F_3 - F_4) = \Sigma'(-1)^{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1+\alpha_5}\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$

oder also wir erhalten das Additionstheorem:

$$(18) \qquad 2(F_1 - F_2 - F_3 + F_4) = \Sigma''\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$

wobei nunmehr auf der rechten Seite sowohl $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$ als auch $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ ungerade sind.

Das ist die Endformel, zu welcher wir gelangen wollten. Setzen wir in ihr die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Modulargleichung:

$$(19) \quad \vartheta_3^4\cdot\Theta_3^2 + \vartheta_0^4\cdot\Theta_0^2 + \vartheta_3^2\cdot\vartheta_0^2(\Theta_0^2 + \Theta_3^2) + 2\vartheta_0\cdot\vartheta_3\cdot\Theta_0\cdot\Theta_3(\vartheta_0^2 + \vartheta_3^2) - 2\vartheta_2^3\cdot\Theta_2(\vartheta_0\cdot\Theta_0 + \vartheta_3\cdot\Theta_3) + \vartheta_2^2\cdot\Theta_2^2(\vartheta_3^2 - \vartheta_0^2) = 8\vartheta_0(0, 2\tau)\vartheta_0(0, 2\tau)\vartheta_0(0, 4\tau)\vartheta_0(0, 4\tau)\vartheta_0(0, 20\tau)\vartheta_0(0, 20\tau).$$

Diese Formel zeigt am besten die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung. Es sind eine ganze Reihe von Irrationalitäten fortgefallen, der Rest kann durch nochmaliges Quadriren unmittelbar fortgeschafft werden. Das aufgestellte Additionstheorem ist nicht das einzige zwischen Producten von sechs Factoren, welches Modulargleichungen ergiebt, wir begnügen uns aber damit ein zweites anzudeuten, ohne die analogen Betrachtungen wie vorhin anzustellen.

Dasselbe lautet:

$$(20) \qquad 2^6\Pi\vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon\tau) = \Sigma\Pi\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon\tau),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 5, \quad m_5 = m_6 = 1,$$

$$n_1 = n_2 = 10, \quad n_3 = n_4 = 20, \quad n_5 = n_6 = 4,$$

wobei die Grössen w_ε und g_ε durch das Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1. \end{array}$$

Ausser den Additionstheoremen zwischen Producten von 3, 4, 6 Factoren können aber auch noch solche zwischen Producten von

mehr als sechs Factoren aufgestellt werden. Insbesondere können die Theoreme, bei denen die Producte acht Factoren enthalten, dazu dienen, um einen Theil der Irrationalitäten fortzuschaffen, die bei dem Fall von vier Factoren aufgetreten sind. Es geschieht dasselbe z. B. durch das Additionstheorem:

$$(21) \qquad \Pi \vartheta_3(v_\varepsilon, m_\varepsilon \tau) = \Sigma \Pi \vartheta_3 \left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon, n_\varepsilon \tau) ,$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1 , \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 5 ,$$

$$n_1 = n_2 = 2 , \quad n_3 = n_4 = 4 , \quad n_5 = n_6 = 10 , \quad n_7 = n_8 = 20 .$$

Die Grössen w_ε und g_ε sind aus dem Schema bestimmt:

0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	−1	0	1	0	0
0	2	−1	−1	0	0	−1	−1
2	0	−1	1	0	0	1	−1
5	0	0	0	0	−1	−1	1
0	5	0	0	−1	0	1	1
0	0	−5	−5	2	0	1	1
0	0	−5	5	0	2	−1	1 .

SITZUNG VOM 31. JULI 1893.

E. Naetsch, *Ueber eine gewisse Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art integriren lassen.* **Vorgelegt von Herrn M. Krause.**

In diesen Berichten hat Herr M. Krause eine Reihe von Untersuchungen veröffentlicht, welche sich auf homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beziehen, deren beide Lösungen doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit denselben Perioden sind, während ihre Coefficienten zwei beliebige singuläre Stellen besitzen [1]). Doch wurde die Integration solcher Differentialgleichungen nur in einigen speciellen Fällen wirklich durchgeführt, während bezüglich ihrer allgemeinen Eigenschaften mehrere wichtige Sätze aufgestellt worden sind [2]).

Es ist nun dem Verfasser gelungen, mit Benutzung der soeben erwähnten Sätze eine allgemeine Integrationstheorie der genannten Differentialgleichungen zu entwickeln. Dabei zeigte sich, dass die Aufgabe, eine vorgelegte Differentialgleichung von der in Rede stehenden Beschaffenheit vollständig zu integriren, in letzter Linie die Ermittelung einer quadratischen Gleichung erfordert, deren beiden Wurzeln dann in eindeutig bestimmter Weise die beiden Lösungen der Differentialgleichung entsprechen. Die Aufstellung einer solchen quadratischen Gleichung kann nun

---

1) M. Krause, Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten, II.—V. (1890—1891). — Wir citiren diese Abhandlungen in der Folge als II., III., IV. und V. Notiz.

2) In §§ 1—2 der V. Notiz.

auf zwei wesentlich verschiedene Arten erfolgen; das eine Verfahren geht direct zu Werke, das andere ist mehr indirecter Natur. Da sich die zweite Methode eng an dasjenige Verfahren anschliesst, durch welches Herr Krause in einem der von ihm behandelten Specialfälle [1]) zum Ziel gelangt, so wollen wir im Folgenden ihr Wesen kurz auseinandersetzen, während eine ausführliche Darstellung der ersten Methode an anderer Stelle erfolgen soll.

§ 1.

Fixirung der Aufgabe.

Es mögen zwei doppeltperiodische Functionen zweiter Art mit den Perioden 1 und τ Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung II. Ordnung sein, deren Coefficienten zwei beliebige singuläre Stellen besitzen. Da wir die eine singuläre Stelle beliebig annehmen dürfen, kann diese Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dw^2} + \left\{c_1 + c_2 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w}\right\} \frac{dy}{dw}$$
$$+ \left\{c_3 + c_4 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w} + \frac{c_5}{\operatorname{sn}^2 w} + c_6 k^2 \operatorname{sn}^2(w+\alpha)\right\} y = 0$$

geschrieben werden, während sich jede der beiden Lösungen in die Form:

$$F(v) \equiv \frac{\vartheta_0(v+\nu_1)\vartheta_0(v+\nu_2)\cdots\vartheta_0(v+\nu_{m+n})}{\vartheta_1(v)^m \vartheta_0(v+a)^n} e^{\lambda w + \left[n\frac{\vartheta_0'(a)}{\vartheta_0(a)} - \sum_1^{m+n} \varkappa \frac{\vartheta_0'(\nu_\varkappa)}{\vartheta_0(\nu_\varkappa)}\right] v}$$

bringen lassen muss; dabei ist natürlich

$$w = \pi \vartheta_3^2 \cdot v\,, \qquad \alpha = \pi \vartheta_3^2 \cdot a\,.$$

Die Differentialgleichung enthält ausser der willkürlichen Grösse α noch die sechs Constanten $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, während jede Function $F(v)$ von $m+n+1$ Parametern $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m+n}, \lambda$ abhängt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, alle Differentialgleichungen von der Form (1), welche zwei verschiedene Lösungen von der Form $F(v)$ besitzen, vollständig zu integriren. Die Allgemeinheit

---

1) In der III. Notiz.

dieses Problems wird nun nicht wesentlich eingeschränkt, wenn wir voraussetzen:

1) dass $c_6 = 0$ und $n = 0$ ist;

2) dass c_2 einen der m Werthe $1, 2, \ldots, m$ besitzt;

3) dass $\lambda = 0$ ist.

Dann aber reducirt sich unser Problem offenbar auf das folgende:

Es soll die Differentialgleichung

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dw^2} + \left\{c_1 + c_2 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w}\right\}\frac{dy}{dw} + \left\{c_3 + c_4 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w} + \frac{c_5}{\operatorname{sn}^2 w}\right\} y = 0,$$

in welcher c_2 einen der Werthe

$$1, 2, 3, \cdots, m$$

besitzt, unter der Voraussetzung vollständig integrirt werden, dass beide Lösungen die Form

$$\Phi(v) \equiv \frac{\vartheta_0(v+\nu_1)\,\vartheta_0(v+\nu_2)\cdots\vartheta_0(v+\nu_m)}{\vartheta_1(v)^m}\, e^{-\sum_1^m \varkappa \frac{\vartheta_0'(\nu_\varkappa)}{\vartheta_0(\nu_\varkappa)} v}$$

haben.

Bei dieser Aufgabe betrachten wir also die Constanten c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 der Differentialgleichung (2) als gegeben, während die Parameter $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ der Function $\Phi(v)$ als die Unbekannten anzusehen sind, welche wir zu bestimmen haben; dabei müssen sich aber für diese Unbekannten zwei verschiedene Werthsysteme ergeben.

Wir setzen nun

$$\omega_\varkappa = \pi \vartheta_3^2 \cdot \nu_\varkappa, \quad x_\varkappa = \operatorname{sn}^2 \omega_\varkappa \quad [\varkappa = 1, 2, \cdots m]$$

und bilden diejenige algebraische Gleichung m^{ten} Grades

$$(3)\quad f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sind; dann haben wir die Identität

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m \\ &\equiv (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m). \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe ist nun offenbar als gelöst anzusehen, sobald wir gezeigt haben, dass sich die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ der algebraischen Gleichung (3) eindeutig durch einen Parameter ausdrücken lassen, welcher seinerseits einer durch die Constanten der Differentialgleichung (2) völlig bestimmten quadratischen Gleichung Genüge leistet.

§ 2.

Eigenschaften der Function $\Phi(v)$.

Wir bilden zunächst die Functionen

$$\Phi_\varkappa(v) = \frac{\vartheta_0(v+\nu_\varkappa)}{\vartheta_1(v)}\, e^{-\frac{\vartheta_0'(\nu_\varkappa)}{\vartheta_0(\nu_\varkappa)}v} \qquad [\varkappa = 1, 2, \cdots, m],$$

und setzen, unter $c_\varkappa$ einen constanten Factor verstehend,

$$\Phi_\varkappa(v) = \frac{c_\varkappa}{w}\left\{1 + a_2^{(\varkappa)}\cdot w^2 + a_3^{(\varkappa)}\cdot w^3 + a_4^{(\varkappa)}\cdot w^4 + a_5^{(\varkappa)}\cdot w^5 + \cdots\right\};$$

führen wir dann noch die Abkürzung

$$u_\varkappa = \operatorname{sn}\omega_\varkappa \operatorname{cn}\omega_\varkappa \operatorname{dn}\omega_\varkappa$$

ein, so ist, wie Herr Krause durch den Schluss von n auf $n+1$ nachgewiesen hat[1]), ganz allgemein

$a_{2n}^{(\varkappa)}$ eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von $x_\varkappa$,

$\frac{1}{u_\varkappa} a_{2n+1}^{(\varkappa)}$ » » » » $n-1^{\text{ten}}$ » » » .

Da nun offenbar

$$\Phi(v) = \Phi_1(v)\cdot\Phi_2(v)\cdot\cdots\cdot\Phi_m(v)$$

ist, so erhalten wir

$$\Phi(v) = \frac{C}{w^m}\{1 + K_2 w^2 + K_3 w^3 + K_4 w^4 + K_5 w^5 + \cdots\},$$

wobei C eine für unsere Zwecke bedeutungslose Constante ist, und erkennen, wie ebenfalls Herr Krause a. a. O. hervorgehoben hat, dass in den Coefficienten $K_2, K_3, K_4, K_5, \ldots$ nur Ausdrücke von der Form

$$\sum_1^m{}_\varkappa\, x_\varkappa^n \quad \text{und} \quad \sum_1^m{}_\varkappa\, u_\varkappa x_\varkappa^{n-1} \qquad [n \text{ eine positive ganze Zahl}]$$

vorkommen.

Wir können aber noch weiter gehen.

---

1) Diese Berichte, V. Notiz, § 1.

In der That, wenn

$$q_{\varkappa-1} = u_1 x_1^{\varkappa-1} + u_2 x_2^{\varkappa-1} + \cdots + u_m x_m^{\varkappa-1} \quad [\varkappa = 1, 2, \cdots, m]$$

gesetzt wird, so bemerken wir, dass sich sämmtliche Coefficienten $K_2, K_3, \ldots$. durch die $2m$ Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}$ allein ausdrücken lassen. Denn einerseits wissen wir, dass jede symmetrische ganze Function von $x_1, x_2, \ldots, x_m$, also insbesondere auch jeder Ausdruck von der Form

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n$$

als ganze rationale Function von $p_1, p_2, \ldots, p_m$ darstellbar ist, und andrerseits kann vermöge der Identitäten

$$x_\varkappa^m + p_1 x_\varkappa^{m-1} + p_2 x_\varkappa^{m-2} + \cdots + p_m \equiv 0 \quad [\varkappa = 1, 2, \cdots, m]$$

jede beliebige Potenz $x_\varkappa^n$ mit ganzzahligem Exponenten n linear durch $x_\varkappa, x_\varkappa^2, \ldots, x_\varkappa^{m-1}$, also jeder Ausdruck von der Form

$$u_1 x_1^n + u_2 x_2^n + \cdots + u_m x_m^n$$

linear und homogen durch $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}$ dargestellt werden.

Schreiben wir ferner der Reihe nach

$$\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \cdots, \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1}$$

an Stelle von

$$p_1, q_0, p_2, q_1, \cdots, p_m, q_{m-1},$$

so zeigt eine Untersuchung, welche den in der Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung üblichen Betrachtungen streng analog ist, dass ganz allgemein die Grösse ϱ_{n+1} $[n = 1, 2, 3, \ldots, 2m]$ in den Coefficienten

$$K_2, K_3, \cdots, K_n \qquad \text{gar nicht auftritt,}$$

in den Coefficienten

$$K_{n+1}, K_{n+2}, \cdots, K_{2n+1} \qquad \text{nur linear vorkommt,}$$

in den Coefficienten

$K_{2n+2}, K_{2n+3}, \cdots, K_{3n+2}$ nur quadratisch vorkommt, u. s. w.

Hieraus ergiebt sich die folgende wichtige Eigenschaft unserer Function $\Phi(v)$:

Sind $K_2, K_3, K_4, K_5, \ldots$. die Coefficienten, welche bei der Entwickelung

$$\Phi(v) = C \cdot \left(\frac{1}{w}\right)^m \{1 + K_2 w^2 + K_3 w^3 + \cdots\}$$

unserer doppeltperiodischen Function zweiter Art

$$\Phi(v) \equiv \frac{\vartheta_0(v+\nu_1)\,\vartheta_0(v+\nu_2)\cdots\vartheta_0(v+\nu_m)}{\vartheta_1(v)^m}\, e^{-\sum_1^m \varkappa \frac{\vartheta_0'(\nu_\varkappa)}{\vartheta_0(\nu_\varkappa)} v}$$

nach steigenden Potenzen von w auftreten, und definiren wir die Grössen $\varrho_2, \varrho_3, \cdots, \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1}$ in der oben angegebenen Weise, so hängt

K_2 von ϱ_2,
K_3 » ϱ_3 und ϱ_2,
K_4 » $\varrho_4, \varrho_3, \varrho_2$,
. . . . . .
K_{2m} » $\varrho_{2m}, \varrho_{2m-1}, \cdots, \varrho_3, \varrho_2$,
K_{2m+1} » $\varrho_{2m+1}, \varrho_{2m}, \cdots, \varrho_3, \varrho_2$

ab; dabei können aber in

$$K_{m+1}, K_{m+2}, \cdots, K_{2m}, K_{2m+1}$$

die Grössen

$$\varrho_{m+1}, \varrho_{m+2}, \cdots, \varrho_{2m}, \varrho_{2m+1}$$

nur linear vorkommen.

§ 3.

Die Fundamentalgleichungen unseres Problems. Vorläufige Discussion derselben.

Verstehen wir nun unter $R(v)$ den Ausdruck, in welchen die linke Seite der Differentialgleichung

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dw^2} + \left\{c_1 + c_2 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\,\operatorname{sn} w}\right\}\frac{dy}{dw} + \left\{c_3 + c_4 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\,\operatorname{sn} w} + \frac{c_5}{\operatorname{sn}^2 w}\right\} y = 0$$

durch die Substitution

$$y = \Phi(v)$$

übergeht, so ist klar, dass $R(v)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist, welche im Punkte $w = 0$ von der $m + 2^{ten}$, im Punkte $w = iK' - \alpha$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird und für alle anderen endlichen Werthe von w endlich bleibt. — Setzen wir demnach

$$R(v) = \left(\frac{1}{w}\right)^{m+2} \cdot \{M_0 + M_1 \cdot w + M_2 \cdot w^2 + \cdots\}$$

und verlangen, dass die Function $\Phi(v)$ eine Lösung unserer Differentialgleichung (1) sei, so müssen offenbar die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad M_0 = 0, \; M_1 = 0, \; M_2 = 0, \cdots, \; M_{2m} = 0, \; M_{2m+1} = 0;$$

und umgekehrt folgt, wie die allgemeine Theorie der doppeltperiodischen Functionen lehrt, aus den Gleichungen (2), dass die Function $R(v)$ identisch verschwindet, dass also $\Phi(v)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist.

Wir nennen die Gleichungen (2) aus diesem Grunde *die Fundamentalgleichungen unseres Problems.*

Die beiden Gleichungen

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 0$$

ergeben die Relationen

$$(3) \quad c_3 = m(c_2 - m - 1), \quad c_4 = m\left(c_1 + c_2 \frac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right);$$

sie stellen also Beziehungen dar, welche zwischen den Constanten unserer Differentialgleichung bestehen müssen.

Aus den übrigen Gleichungen des Systems (2) aber lässt sich zunächst schliessen, dass

$(c_2 - 2m + 1) \cdot K_2$ eindeutig bestimmt,
$(c_2 - 2m + 2) \cdot K_3$ eine lineare Function von K_2,
$(c_2 - 2m + 3) \cdot K_4$ » » » » K_3 und K_2,
. . . . . .
$(c_2 - 1) \cdot K_{2m}$ eine lineare Function von $K_{2m-1}, \cdots K_3, K_2$,
$c_2 \cdot K_{2m+1}$ » » » » $K_{2m}, K_{2m-1}, \cdots K_3, K_2$

wird.

Wenn daher

$$c_2 = h$$

ist, wobei h eine der m ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots, m$$

bedeutet, so sind

$$K_2, K_3, \cdots, K_{2m-h}$$

eindeutig bestimmt, während

$$K_{2m-h+1}$$

unbestimmt bleibt, und

$$K_{2m-h+2},\ K_{2m-h+3},\ \cdots,\ K_{2m},\ K_{2m+1}$$

linear durch K_{2m-h+1} ausgedrückt werden.

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf die in § 2 hervorgehobene Eigenschaft der Coefficienten K, dass uns alsdann

$$\varrho_2,\ \varrho_3,\ \cdots,\ \varrho_{2m-h}$$

eindeutig gegeben sind, während

$$\varrho_{2m-h+1}$$

unbestimmt bleibt, und

$$\varrho_{2m-h+2},\ \varrho_{2m-h+3},\ \cdots,\ \varrho_{2m},\ \varrho_{2m+1}$$

lineare Functionen von ϱ_{2m-h+1} werden.

Ausserdem aber ist klar, dass in diesem Falle zwischen den Constanten der Differentialgleichung (1) stets noch eine Bedingungsgleichung stattfinden muss, welche sich ergiebt, wenn wir $K_2, K_3, \ldots, K_{2m-h}$ aus den Gleichungen

$$M_2 = 0,\quad M_3 = 0,\ \cdots,\ M_{2m-h} = 0$$

berechnen und die erhaltenen Werthe in die Gleichung

$$M_{2m-h+1} = 0$$

einsetzen. Die betreffende Bedingungsgleichung ist offenbar eine algebraische Relation zwischen c_1, c_3, c_4, und zwar enthält sie stets die Grösse c_3, kann also keine blosse Folge der Gleichungen (3) sein.

Da ferner

$$\varrho_2 = p_1,\quad \varrho_4 = p_2,\ \cdots,\ \varrho_{2m} = p_m,$$
$$\varrho_3 = q_0,\quad \varrho_5 = q_1,\ \cdots,\ \varrho_{2m+1} = q_{m-1}$$

ist [vergl. § 2], so erkennen wir, dass von den Grössen

$$p_1,\ q_0,\ p_2,\ q_1,\ \cdots,\ p_m,\ q_{m-1}$$

bei unsern Voraussetzungen die $2m - h - 1$ ersten eindeutig bestimmt sind, während die $h + 1$ übrigen sich linear durch eine zunächst unbekannte Grösse, die wir ϱ nennen wollen, ausdrücken lassen. Führen wir nun an Stelle von $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1}$ durch die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} q_0 = U_0\,, \\ q_1 + p_1 \cdot q_0 = U_1\,, \\ q_2 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_0 = U_2\,, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{m-1} + p_1 q_{m-2} + p_2 q_{m-3} + \cdots + p_{m-1} \cdot q_0 = U_{m-1} \end{cases}$$

die Grössen $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ ein, so folgt weiter, dass auch von den Grössen

$$p_1,\ U_0,\ p_2,\ U_1,\ \cdots,\ p_m,\ U_{m-1}$$

die $2m - h - 1$ ersten eindeutig bestimmt, und die $h+1$ übrigen linear durch ϱ ausdrückbar sind; wir haben nur zu bedenken, dass $h \leqq m$ vorausgesetzt wird.

Demnach sind wir zu folgenden Ergebnissen gelangt:

Wenn die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left\{c_1 + h\,\frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\,\operatorname{sn} w}\right\}\frac{dy}{dw} + \left\{c_3 + c_4\,\frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\,\operatorname{sn} w} + \frac{m(h-m-1)}{\operatorname{sn}^2 w}\right\} y = 0\,,$$

in welcher h eine der m ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots, m$$

bedeutet, zwei verschiedene Lösungen von der Form $\Phi(v)$ besitzt, so müssen die Constanten c_1, c_3, c_4 zwei algebraischen Gleichungen Genüge leisten, von denen die eine

$$c_4 = m\left(c_1 + h\,\frac{\operatorname{cn}\alpha\,\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)$$

lautet, während in der anderen auch die Grösse c_3 vorkommt. Definiren wir alsdann $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ in der angegebenen Weise, so sind von den Grössen

$$p_1,\ U_0,\ p_2,\ U_1,\ \cdots,\ p_m,\ U_{m-1}$$

die $2m - h - 1$ ersten eindeutig bestimmt, während sich die $h+1$ letzten als lineare Functionen einer noch zu bestimmenden Grösse ϱ ergeben.

Durch Substitution dieser Werthe von $p_1, U_0, \ldots, p_m, U_{m-1}$ geht offenbar jede zwischen diesen Grössen etwa stattfindende Relation in eine Gleichung mit der Unbekannten ϱ über. Können wir daher aus unsern Voraussetzungen eine Relation zwischen den obigen Grössen ableiten, welche so beschaffen ist, dass die

entsprechende Gleichung in ϱ quadratisch ist, so sind wir in den Stand gesetzt, unsere Differentialgleichung vollständig zu integriren [vergl. § 1].

Als natürlichster Ausgangspunkt zur Herleitung einer solchen Relation bieten sich die Gleichungen dar, durch welche die Grössen x, u, p, U definirt worden sind. Dieser Weg führt bei geeigneter Behandlung der betreffenden Gleichungen in der That zum Ziel.

Von anderen Hülfsmitteln macht diejenige Methode Gebrauch, welche gegenwärtig mitgetheilt werden soll. Zu den Grundlagen dieser Methode wenden wir uns nunmehr.

§ 4.

Weitere Hülfsmittel zur Lösung der Aufgabe.

Wir behalten alle bisherigen Bezeichnungen bei, unterwerfen aber die Function $\Phi(v)$ der Beschränkung, dass die Grössen

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m, -\omega_1, -\omega_2, \cdots, -\omega_m$$

sämmtlich von einander, wie auch von α und $-\alpha$ verschieden sein sollen; alsdann werden offenbar auch die Grössen

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \quad \text{und} \quad \operatorname{sn}^2\alpha$$

sämmtlich von einander verschieden.

Da die Function $\Phi(v)$ eine Lösung unserer Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dw^2}+\left\{c_1+c_2\frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}w}\right\}\frac{dy}{dw}+\left\{c_3+c_4\frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}w}+\frac{c_5}{\operatorname{sn}^2w}\right\}y=0$$

sein soll, so muss der im vorigen Paragraphen definirte Ausdruck $R(v)$ in allen Nullstellen der Function $\Phi(v)$, also in den Punkten

$$w=iK'-\omega_1, \quad w=iK'-\omega_2, \cdots, \quad w=iK'-\omega_m$$

verschwinden; d. h. es müssen die m Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)+\frac{1}{2}c_2\frac{u_1+\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{x_1-\operatorname{sn}^2\alpha}=R_1, \\ \frac{1}{2}\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)+\frac{1}{2}c_2\frac{u_2+\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{x_2-\operatorname{sn}^2\alpha}=R_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{2}\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)+\frac{1}{2}c_2\frac{u_m+\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{x_m-\operatorname{sn}^2\alpha}=R_m \end{cases}$$

bestehen, in denen wir $R_1, R_2, \ldots, R_m$ zur Abkürzung geschrieben haben für

$$R_1 = \frac{u_1 + u_2}{x_1 - x_2} + \frac{u_1 + u_3}{x_1 - x_3} + \cdots + \frac{u_1 + u_m}{x_1 - x_m},$$

$$R_2 = \frac{u_2 + u_1}{x_2 - x_1} + \frac{u_2 + u_3}{x_2 - x_3} + \cdots + \frac{u_2 + u_m}{x_2 - x_m},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$R_m = \frac{u_m + u_1}{x_m - x_1} + \frac{u_m + u_2}{x_m - x_2} + \cdots + \frac{u_m + u_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}.$$

Diese anscheinend sehr unübersichtlichen Gleichungen lassen sich aber in eine äusserst elegante Form bringen.

In der That, die soeben definirten Grössen $R_1, R_2, \ldots, R_m$ genügen, wenn wir allgemein

$$x_1^\varkappa + x_2^\varkappa + \cdots + x_m^\varkappa = s_\varkappa$$

setzen, offenbar den m Relationen

$$\begin{aligned}
R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_m &= 0, \\
R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + \cdots + R_m x_m &= (m-1) q_0, \\
R_1 x_1^2 + R_2 x_2^2 + R_3 x_3^2 + \cdots + R_m x_m^2 &= (m-2) q_1 + s_1 \cdot q_0, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
R_1 x_1^{m-1} + R_2 x_2^{m-1} + \cdots + R_m x_m^{m-1} &= q_{m-2} + s_1 q_{m-3} + \cdots \\
&\quad + s_{m-2} q_0;
\end{aligned}$$

aus diesen aber ergiebt sich sofort

$$\sum_1^m{}^\varkappa R_\varkappa = 0$$

$$\sum_1^m{}^\varkappa R_\varkappa (x_\varkappa + p_1) = (m-1) q_0,$$

$$\sum_1^m{}^\varkappa R_\varkappa (x_\varkappa^2 + p_1 x_\varkappa + p_2) = (m-2) q_1 + [s_1 + (m-1) p_1] \cdot q_0,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\sum_1^m{}^\varkappa R_\varkappa (x_\varkappa^{m-1} + p_1 x_\varkappa^{m-2} + \cdots + p_{m-1}) = q_{m-2} + [s_1 + 2p_1] q_{m-3} + \cdots + [s_{m-2} + s_{m-3} p_1 + \cdots + s_1 p_{m-3} + (m-1) p_{m-2}] q_0,$$

und hieraus folgt mit Hülfe der bekannten Newton'schen Formeln

$$s_1 + p_1 = 0\,,$$
$$s_2 + s_1 \cdot p_1 + 2p_2 = 0\,,$$
$$s_3 + s_2 \cdot p_1 + s_1 \cdot p_2 + 3p_3 = 0\,,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$s_{m-1} + s_{m-2} p_1 + \cdots + s_1 p_{m-2} + (m-1) p_{m-1} = 0$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen:

$$\sum_1^m{}^{\varkappa} R_\varkappa = 0\,,$$
$$\sum_1^m{}^{\varkappa} R_\varkappa (x_\varkappa + p_1) = (m-1) U_0\,,$$
$$\sum_1^m{}^{\varkappa} R_\varkappa (x_\varkappa^2 + p_1 x_\varkappa + p_2) = (m-2) U_1\,,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\sum_1^m{}^{\varkappa} R_\varkappa (x_\varkappa^{m-1} + p_1 x_\varkappa^{m-2} + \cdots + p_{m-1}) = U_{m-2}\,.$$

Diese Relationen aber können nach $R_1, R_2, \ldots, R_m$ aufgelöst werden und ergeben alsdann

$$R_\varkappa = \frac{(m-1) U_0 x_\varkappa^{m-2} + (m-2) U_1 x_\varkappa^{m-3} + \cdots + U_{m-2}}{m x_\varkappa^{m-1} + (m-1) p_1 x_\varkappa^{m-2} + \cdots + p_{m-1}}$$
$$[\varkappa = 1, 2, \cdots, m]\,.$$

Führen wir nun ausser der bereits in § 1 definirten Function

$$f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m$$

noch die ganze rationale Function $m-1^{\text{ten}}$ Grades

$$\varphi(x) \equiv U_0 x^{m-1} + U_1 x^{m-2} + U_2 x^{m-3} + \cdots + U_{m-2} x + U_{m-1}$$

ein, so können wir kürzer

$$R_\varkappa = \frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)} \quad [\varkappa = 1, 2, \cdots, m]$$

schreiben.

Damit aber sind die Grössen $R_1, R_2, \ldots, R_m$ in eine übersichtliche Form gebracht, und wenn wir diese Werthe in die Gleichungen (1) einsetzen, so lauten die letzteren

$$(2)\quad c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}+c_2\frac{u_\varkappa+\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha}=2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}\quad[\varkappa=1,2,\cdots,m].$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Auflösung nach $u_\varkappa$:

$$c_2\cdot u_\varkappa=-c_2\cdot\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$$
$$+\left[2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\right](x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha),$$

so dass durch Quadriren

$$c_2^2\cdot(x_\varkappa-[1+k^2]x_\varkappa^2+k^2x_\varkappa^3)-c_2^2(\operatorname{sn}^2\alpha-[1+k^2]\operatorname{sn}^4\alpha+k^2\operatorname{sn}^6\alpha)$$
$$+2c_2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\left[2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\right]\cdot(x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha)$$
$$=\left[2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\right]^2\cdot(x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha)^2$$

folgt[1]; lassen wir nun den Factor

$$x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha$$

weg, so erhalten wir

$$c_2^2\cdot(1-[1+k^2][x_\varkappa+\operatorname{sn}^2\alpha]+k^2[x_\varkappa^2+x_\varkappa\cdot\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{sn}^4\alpha])$$
$$+2c_2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\left[2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\right]$$
$$=\left[2\frac{\varphi'(x_\varkappa)}{f'(x_\varkappa)}-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\right]^2\cdot(x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha),$$

oder also

$$c_2^2\cdot(\operatorname{cn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha+[k^2\operatorname{sn}^2\alpha-1-k^2]x_\varkappa+k^2x_\varkappa^2)\cdot f'(x_\varkappa)^2$$
$$+2c_2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\left[2\varphi'(x_\varkappa)-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\cdot f'(x_\varkappa)\right]\cdot f'(x_\varkappa)$$
$$-\left[2\varphi'(x_\varkappa)-\left(c_1+c_2\frac{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha}\right)\cdot f'(x_\varkappa)\right]^2\cdot(x_\varkappa-\operatorname{sn}^2\alpha)=0.$$

---

1) Wir haben dabei zu bedenken, dass

$$u_\varkappa^2=x_\varkappa(1-x_\varkappa)(1-k^2x_\varkappa)\quad[\varkappa=1,2,\cdots,m]$$

wird:

Ordnen wir die letzte Gleichung nach Potenzen von $f'(x_\varkappa)$, und erinnern uns, dass sie für $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$ stattfindet, so folgt:

Die m Grössen

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \cdots, \; x_m$$

sind bei den gemachten Voraussetzungen Wurzeln der algebraischen Gleichung $2m^{ten}$ Grades

$$A(x) \cdot f'(x)^2 + \tfrac{1}{2} B(x) \cdot f'(x) \varphi'(x) - \tfrac{1}{4} C(x) \cdot \varphi'(x)^2 = 0,$$

in welcher

$$A(x) \equiv c_2^2 \cdot k^2 x^2 - \left(\frac{c_2^2}{\operatorname{sn}^2 \alpha} + 2 c_1 c_2 \frac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} + c_1^2 \right) \cdot x + c_1^2 \operatorname{sn}^2 \alpha,$$

$$B(x) \equiv \left(c_1 + c_2 \frac{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} \right) x - c_1 \operatorname{sn}^2 \alpha,$$

$$C(x) \equiv x - \operatorname{sn}^2 \alpha$$

ist.

§ 5.

Aufstellung einer quadratischen Gleichung für die Grösse ϱ. Erledigung der Aufgabe.

Nun bedenken wir, dass $x_1, x_2, \ldots, x_m$ auch die Wurzeln der algebraischen Gleichung m^{ten} Grades

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m = 0$$

sind, und setzen, im Anschluss an das Ergebniss des vorigen Paragraphen,

$$(1) \qquad A \cdot f'(x)^2 + \tfrac{1}{2} B \cdot f'(x) \varphi'(x) - \tfrac{1}{4} C \cdot \varphi'(x)^2 \equiv \Omega_0 x^{2m} + \Omega_1 x^{2m-1} + \Omega_2 x^{2m-2} + \cdots + \Omega_{2m};$$

dann folgt aus den Principien der Algebra, dass zwischen den Ω und den p u. a. auch eine Relation von der Form

$$(2) \qquad \Omega_0 H_{2m-h+1} + \Omega_1 H_{2m-h} + \Omega_2 H_{2m-h-1} + \cdots + \Omega_{2m-h} H_1 + \Omega_{2m-h+1} = 0$$

bestehen muss, in welcher allgemein H_μ eine homogene symmetrische ganze rationale Function μ^{ten} Grades von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bedeutet. Dabei giebt, wie früher, h den Werth von c_2 an und bedeutet eine der m ganzen Zahlen $1, 2, 3 \ldots, m$. Nun erkennen wir, dass die Grössen H ganz und rational durch $p_1, p_2, \ldots, p_m$ allein ausgedrückt werden können, während sich

die Coefficienten Ω vermöge der Identität (1) als quadratische Functionen der p und der U darstellen lassen.

Unsere Gleichung (2) stellt also eine Relation dar, welche zwischen den Grössen p und U stattfindet, und welche mithin in eine Gleichung mit der Unbekannten ϱ übergeht, sobald wir diese Grössen vermöge des in § 3 abgeleiteten Satzes aus den Fundamentalgleichungen unseres Problems berechnen.

Wir behaupten nun, dass diese Gleichung in Bezug auf die Grösse ϱ quadratisch wird.

Zunächst ist sicher, dass sowohl die Grössen Ω, als auch die Grössen H ganze rationale Functionen von ϱ werden. Um also die Richtigkeit unserer Behauptung nachzuweisen, müssen wir vor Allem den Grad dieser Functionen feststellen. Dabei soll der Deutlichkeit halber unterschieden werden, ob die ganze Zahl h, — d. h. also die Grösse c_2, — ungerade oder gerade ist.

Es sei zunächst c_2 eine ungerade Zahl, also etwa

$$c_2 = 2\varkappa + 1 \quad (\leqq m).$$

In diesem Falle bestimmen nach § 3 die Fundamentalgleichungen die Grössen

$$p_1,\ U_0,\ p_2,\ U_1,\ \cdots,\ p_{m-\varkappa-1},\ U_{m-\varkappa-2}$$

eindeutig, während sie die Grössen

$$p_{m-\varkappa},\ U_{m-\varkappa-1},\ \cdots,\ p_m,\ U_{m-1}$$

linear durch ϱ ausdrücken. Ziehen wir nun die Abhängigkeit der Coefficienten Ω von den p und U in Betracht, so erkennen wir, dass

$\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{m-\varkappa-1}$ unabhängig von ϱ werden, während $\Omega_{m-\varkappa}, \Omega_{m-\varkappa+1}, \ldots, \Omega_{2m-2\varkappa-1}$ linear von ϱ abhängen, und $\Omega_{2m-2\varkappa}$ eine quadratische Function von ϱ wird.

Analog ergiebt sich, wenn wir uns die Grössen H durch die p ausgedrückt denken, dass

$H_{2m-2\varkappa}$ eine quadratische Function von ϱ wird, während $H_{2m-2\varkappa-1}, \ldots, H_{m-\varkappa}$ in Bezug auf ϱ linear werden, und $H_{m-\varkappa-1}, \ldots, H_1$ gar nicht von ϱ abhängen.

Da nun die Relation (2) in unserem Falle

$$(2^a)\quad \Omega_0 H_{2m-2\varkappa} + \Omega_1 H_{2m-2\varkappa-1} + \cdots + \Omega_{m-\varkappa-1} H_{m-\varkappa+1} + \Omega_{m-\varkappa} H_{m-\varkappa} + \Omega_{m-\varkappa+1} H_{m-\varkappa-1} + \cdots + \Omega_{2m-2\varkappa-1} H_1 + \Omega_{2m-2\varkappa} = 0$$

lautet, so zeigen die soeben gemachten Bemerkungen unmittelbar, dass ihre linke Seite eine quadratische Function der Grösse ϱ wird.

Es sei nunmehr c_2 eine gerade Zahl, also etwa

$$c_2 = 2\varkappa \ (\leqq m) .$$

Dann bestimmen nach § 3 unsere Fundamentalgleichungen die Grössen

$$p_1, U_0, p_2, U_1, \cdots, U_{m-\varkappa-2}, p_{m-\varkappa}$$

eindeutig, während sie

$$U_{m-\varkappa-1}, p_{m-\varkappa+1}, \cdots, p_m, U_{m-1}$$

linear durch ϱ ausdrücken. Hieraus aber folgt durch analoge Betrachtungen wie im vorigen Falle, dass

$\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{m-\varkappa}$ von der Grösse ϱ unabhängig, und
$\Omega_{m-\varkappa+1}, \Omega_{m-\varkappa+2}, \cdots, \Omega_{2m-2\varkappa}$ linear durch ϱ ausgedrückt werden, während sich

$\Omega_{2m-2\varkappa+1}$ als quadratische Function von ϱ ergiebt,

und dass andrerseits

$H_{2m-2\varkappa+1}$ eine quadratische Function von ϱ wird, während
$H_{2m-2\varkappa}, \cdots, H_{m-\varkappa+1}$ nur linear von ϱ abhängen, und
$H_{m-\varkappa}, \cdots, H_1$ ganz unabhängig von ϱ werden.

Da nun die Relation (2) gegenwärtig

$$(2^b) \quad \Omega_0 H_{2m-2\varkappa+1} + \Omega_1 H_{2m-2\varkappa} + \cdots + \Omega_{m-\varkappa} H_{m-\varkappa+1} + \Omega_{m-\varkappa+1} H_{m-\varkappa} + \cdots + \Omega_{2m-2\varkappa} H_1 + \Omega_{2m-2\varkappa+1} = 0$$

zu schreiben ist, so erkennen wir, dass ihre linke Seite abermals eine quadratische Function von ϱ wird.

Damit ist nachgewiesen, dass die Relation (2) in der That stets eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten ϱ liefert, sobald wir die p und U mittels der Fundamentalgleichungen durch die Constanten der Differentialgleichung und durch ϱ ausdrücken.

Mit der Auffindung dieser quadratischen Gleichung aber ist die Integration unserer Differentialgleichung auf algebraische Operationen zurückgeführt.

Da nämlich die Grössen

$$x_1 = \mathrm{sn}^2 \omega_1 , \quad x_2 = \mathrm{sn}^2 \omega_2 , \quad \cdots , \quad x_m = \mathrm{sn}^2 \omega_m$$

die Wurzeln der algebraischen Gleichung m^{ten} Grades

$$f(x) \equiv x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m = 0$$

sind, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sich vermöge der Fundamentalgleichungen unsres Problems linear durch ϱ darstellen lassen, so entspricht jeder Wurzel ϱ der obigen quadratischen Gleichung eine völlig bestimmte Gleichung $f(x) = 0$, also auch ein völlig bestimmtes System von Werthen der m Grössen x_1, $x_2, \ldots, x_m$. — Ueber die Vorzeichen von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, welche dadurch offenbar noch nicht bestimmt sind, entscheiden die Gleichungen (2) des § 4, welche jedem $x_\varkappa$ den entsprechenden Werth von

$$u_\varkappa = \operatorname{sn}\omega_\varkappa \operatorname{cn}\omega_\varkappa \operatorname{dn}\omega_\varkappa$$

eindeutig zuordnen.

Wir erhalten somit als Endergebniss den

Lehrsatz. *Die vollständige Integration einer Differentialgleichung von der Form*

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left\{c_1 + c_2 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w}\right\}\frac{dy}{dw} + \left\{c_3 + c_4 \frac{\operatorname{sn}(w+\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn} w} + \frac{c_5}{\operatorname{sn}^2 w}\right\} y = 0,$$

in welcher c_2 einen der m Werthe

$$1, 2, 3, \cdots, m$$

besitzt, und welche zwei verschiedene Lösungen von der Form

$$\Phi(v) \equiv \frac{\vartheta_0(v+\nu_1)\,\vartheta_0(v+\nu_2)\cdots\vartheta_0(v+\nu_m)}{\vartheta_1(v)^m}\, e^{-\sum_1^m \varkappa \frac{\vartheta_0'(\nu_\varkappa)}{\vartheta_0(\nu_\varkappa)} v}$$

zulässt, erfordert die Auflösung einer quadratischen Gleichung und zweier Gleichungen m^{ten} Grades. — Die Mittel zur Bildung dieser Gleichungen sind in den vorangehenden Entwickelungen enthalten.

SITZUNG VOM 31. JULI 1893.

Hermann Wiener, *Ueber Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*[1]) Vorgelegt von Herrn ENGEL. Mit 17 Figuren.

XII. Der Uebergang von Streckengleichungen zu Gleichungen zwischen Punktspiegelungen.

107. Die Aufgabe, zwei gegebene *Schraubungen* zu einer einzigen Schraubung zusammenzusetzen, habe ich in der Reihe von Abhandlungen, an die sich die vorliegende anschliesst, an die Spitze gestellt und von vornherein darauf hingewiesen, dass sich ihre Lösung in ganz entsprechender Weise gestaltet, wie bei der so einfachen Aufgabe, zwei gegebene *Strecken* zu einer einzigen Strecke zusammenzusetzen. Was aber damals vielleicht als eine nur äusserliche Analogie erschien, wird jetzt auf seinen inneren Zusammenhang zurückgeführt, wenn wir die im X. Abschnitte entwickelten allgemeinen Methoden der Uebertragung von Sätzen zu Rate ziehen. Die folgende Untersuchung wird zugleich geeignet sein, Beispiele dafür zu geben, was wir damals »*formale Uebertragungen*« genannt haben.

Strecken und Schraubungen sind zu verschiedenartige Gebilde, als dass ohne weiteres eine Verbindung zwischen beiden herzustellen wäre; um sie gleichartig zu machen, bedarf es noch einer Zurichtung. Zu diesem Zwecke genügt eine naheliegende und auch sonst vielfach verwendete Bemerkung: Soll zu einer gegebenen Strecke durch jeden Punkt des Raumes als

---

1) Diese Arbeit bildet den Abschluss der Reihe von Arbeiten, die in diesen Berichten veröffentlicht sind:

1890, S. 13—23, S. 71—87, S. 245—267,
1891, S. 424—447, S. 644—673.

Anfangspunkt eine gleiche Strecke gelegt werden, so geht deren Endpunkt aus dem Anfangspunkte durch eine *Schiebung* des Raumes hervor, also durch eine Operation, die der Schraubung eines räumlichen Systems durchaus gleichartig ist. Und wie das Gleichmachen von Strecken auf die Schiebung, so führt das Aneinanderfügen (Addiren) zweier Strecken auf die Bildung der Folge zweier Schiebungen. Der Uebergang von Streckengleichungen zu Gleichungen zwischen Folgen von Spiegelungen ist rasch gemacht, sowie wir die beiden eine Strecke begrenzenden Punkte als *Spiegelelemente* einführen; dies liefert sofort die Uebertragung

a) der Streckengleichheit,
b) der Streckenaddition.

a) Wir haben früher (Nr. 49a. Weitere Beispiele) bewiesen, *dass aus einer Streckengleichung:*

$$\overline{QR} = \overline{ST}$$

stets die Gleichung für Punktspiegelungen folgt:

$$QR = ST,$$

ein Satz, der sich ohne weiteres umkehren lässt.

b) Um zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ zu addiren, d. h. $\overline{PQ} + \overline{RS}$ zu bilden, hat man nur an den Endpunkt einer Strecke, die mit $\overline{PQ}$ gleich ist, eine zweite Strecke, die mit $\overline{RS}$ gleich ist, mit ihrem Anfangspunkte anzusetzen, und die Strecke vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der zweiten zu ziehen, d. h. man mache

(α) $$\overline{PQ} = \overline{LM}, \quad \overline{RS} = \overline{MN}$$

und bilde:

(I') $$\overline{LM} + \overline{MN} = \overline{LN}.$$

Gilt daher eine Streckengleichung

(I) $$\overline{PQ} + \overline{RS} = \overline{TU},$$

so ist in ihr die Strecke $\overline{TU}$ der soeben konstruirten Strecke gleich, d. h.:

(β) $$\overline{TU} = \overline{LN}.$$

Bildet man hingegen aus den beiden zweispiegeligen Verwandtschaften LM und MN die Folge, so wird

$$(LM)\,(MN) = LMMN = LN$$

(wegen $M^2 = 1$); aus dieser Gleichung erhält man, da sich wegen a) aus (α) und (β)

$$PQ = LM\,, \quad RS = MN\,, \quad TU = LN$$

ergiebt, die folgende Gleichung:

$$(PQ)\,(RS) = TU\,.$$

Wie diese Gleichung aus der Streckengleichung (I), so geht umgekehrt aus ihr die Gleichung (I) hervor.

Ebenso folgt aus einer Gleichung, die auf jeder Seite die Summe einer beliebigen Anzahl von Strecken enthält, eine entsprechende Gleichung, in der an ihre Stelle Folgen von zweispiegeligen Verwandtschaften treten. Beachtet man noch, dass der Streckengleichung $\overline{SS} = 0$ die Spiegelgleichung $SS = 1$ der Null also die Eins entspricht, dass ferner die Umkehrung von Strecken und von Verwandtschaften in den Formeln

$$-\overline{RS} = \overline{SR} \qquad \text{und} \qquad (RS)^{-1} = SR$$

ihren Ausdruck findet, und dass endlich die Definitionen von $\nu\overline{RS}$ und von $(RS)^\nu$ als Summe und als Folge von gleichen Dingen einander entsprechen, so erhält man den

Uebertragungssatz. *Aus einer Streckengleichung, in der jede Strecke durch ihren Anfangs- und Endpunkt bezeichnet ist, und die nur rationale*[1]*) Zahlkoefficienten enthält, lässt sich stets eine Gleichung zwischen Folgen von Punktspiegelungen ableiten. Hierzu ist nur nöthig, dass man die Nenner in den Zahlkoefficienten wegschafft und hierauf die soeben beschriebenen Aenderungen an der Streckengleichung vornimmt.*

Umgekehrt kann man aus jeder Gleichung zwischen Folgen von Punktspiegelungen eine Streckengleichung ableiten. Es ist nämlich die Anzahl von Punktspiegelungen, die in einer solchen Gleichung auftreten, stets gerade (vgl. Nr. 49 a. Weitere Beispiele).

---

1) Ist $RS = \mathfrak{A}$ eine Schiebung, so steht nichts im Wege, für jede gebrochene, ja irrationale Zahl ν die Operation $\mathfrak{A}^\nu$ zu definiren, und dasselbe gilt für alle Operationen, deren Verknüpfungsgesetze den Gesetzen der Addition von Zahlen analog sind. (Man vergleiche die Beispiele A. und B. im XIV. Abschnitt.) In anderen Fällen (Beispiel: Drehung oder Schraubung um eine Axe, vgl. XIV, C) würde die Operation $\mathfrak{A}^\nu$ mehrdeutig; sicher aber wäre in jedem einzelnen Falle eine genaue Definition des Begriffes $\mathfrak{A}^\nu$ schon für gebrochene Zahlen ν nöthig. Deshalb sehen wir hie von dieser Verallgemeinerung ab.

Man kann es daher stets erreichen, nötigenfalls durch Hinüberschaffen einer Spiegelung auf die andere Seite, dass auf jeder Seite der Gleichung eine gerade Anzahl von Spiegelungen steht. Diese gruppire man auf beiden Seiten von vorn anfangend zu zweien, schreibe statt der Folge RS die Strecke $\overline{RS}$ und stelle zwischen je zwei Gruppen das Zeichen $+$.

Wir fügen hier einige Beispiele an, die geeignet sind, diese Uebertragung zu verdeutlichen, und die, so einfach sie sind, vermöge der dann folgenden Betrachtungen eine ausserordentlich mannigfaltige Umgestaltung zulassen.

Beispiele.

108. a) Aus der Streckengleichung

$$\overline{QR} + \overline{ST} = \overline{ST} + \overline{QR}$$

folgt die Gleichung für Punktspiegelungen

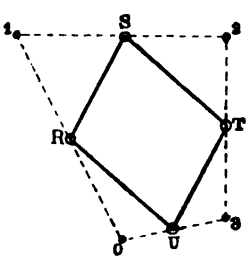
$$(QR)\,(ST) = (ST)\,(QR),$$

d. h. in jeder Folge von Punktspiegelungen können zwei benachbarte Paare vertauscht werden.

b) Es ist notwendig, den Unterschied in der Bedeutung der beiden aus einander folgenden Gleichungen

$$\overline{RS} = \overline{UT} \quad \text{und} \quad RS = UT$$

anzugeben. Die erste Gleichung sagt aus, dass R, S, T, U die Ecken eines Parallelogramms sind, wie sie rings herum auf einander folgen. Daher müssen sie auch in der zweiten Gleichung die vier Eckpunkte eines Parallelogramms sein; diese sagt aber ausserdem aus, dass, wenn man irgend einen Punkt des Raumes der Folge der Punktspiegelungen R, S unterwirft, man nach demselben Punkte kommt, wie durch die Folge der Punktspiegelungen U, T.



Die Gleichung lässt sich auch schreiben

$$RST = U,$$

wo nun R, S, T drei beliebige Punkte des Raumes sind. Unterwirft man daher einen Punkt 0 der Spiegelfolge R, S, T, so kommt man auf einen Punkt 3, der aus 0 durch Spiegelung an einem einzigen Punkt U hervorgeht, welcher dann mit R, S, T ein Parallelogramm bildet. Daraus folgt weiter, dass, wenn man ein beliebiges räumliches Viereck 0, 1, 2, 3 annimmt und die Mitten der drei ersten Kanten als Punkte R, S, T verwendet, die Mitte U der vierten Kante 3 0 mit R, S, T ein Parallelogramm bildet, ein bekannter elementarer Satz.

Wiederholt man in der letzten Gleichung sowohl die links als die rechts stehende Operation, so erhält man wegen $U^2 = 1$ die Gleichung

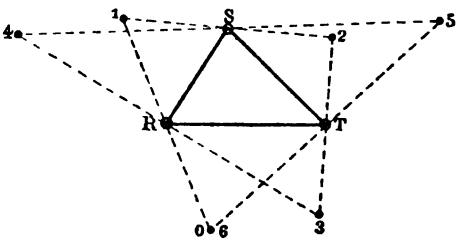
$$(R\,S\,T)^2 = 1\,;$$

dies giebt den

Satz. *Sind R, S, T drei beliebige Punkte des Raumes, so gilt stets die Spiegelgleichung*

$$(R\,S\,T)^2 = 1\,.$$

Dieser Satz sei durch die beistehende Figur erläutert, in der sowohl R, S, T wie auch 0 beliebige Punkte des Raumes sind und der Punkt 6 mit 0 zusammenfällt.



Die Figur zeigt einige Analogie mit dem PASCAL-schen Sechseck, da auch in diesem ein geschlossener Zug von sechs Linien vorkommt, von denen sich je zwei gegenüberliegende in drei ausgezeichneten Punkten treffen. Dieser Zusammenhang beruht darauf, dass auch der PASCAL'sche Satz sich in der Form einer Spiegelgleichung

$$(R\,S\,T)^2 = 1$$

schreiben lässt. (Vgl. Nr. 106a, Fussnote 1.)

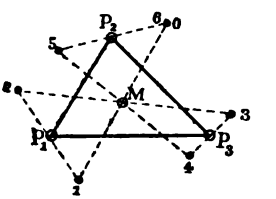
c) Sind P_1, P_2, P_3 drei beliebige Punkte des Raumes, M ihr Schwerpunkt, so gilt die Streckengleichsng

$$\overline{MP}_1 + \overline{MP}_2 + \overline{MP}_3 = 0\,.$$

Daraus folgt die Gleichung für Punktspiegelungen

$$MP_1\,MP_2\,MP_3 = 1\,.$$

Auch dieser Satz sei durch eine Figur veranschaulicht, in der 0 ein beliebiger Punkt des Raumes ist, während der Punkt 6 mit ihm zusammenfällt.



XIII. Formale Ableitung der Sätze über Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.

109. Es handelt sich jetzt darum, die bekannten Sätze der Streckenaddition für noch andere Gebiete der Geometrie nutzbar zu machen.

Die weitestreichenden Uebertragungen erhalten wir (nach 94 b_2), wenn wir die Sätze auf ihre ersten Grundsätze zurückführen, aus denen sie *formal* abgeleitet werden können.

Ueberall da wo diese Grundsätze ebenfalls gelten, ist dies auch für alle weiteren Sätze der Fall.

Der Umfang der Uebertragbarkeit ist also durch diese ersten Sätze völlig bestimmt.

Möbius hat für die Streckenaddition diese Zurückführung geleistet[1]), so dass wir uns nur an ihn anzuschliessen brauchen.

Er stellt die folgenden beiden aus der Definition der Strecken geometrisch abgeleiteten formalen Sätze an die Spitze:

I. Ist $\overline{QR} = \overline{ST}$ und $\overline{ST} = \overline{UV}$, so ist auch
$$\overline{QR} = \overline{UV}.$$

(In Worten heisst dies: Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.)

II. Ist $\overline{QR} = \overline{ST}$, so ist auch
$$\overline{QS} = \overline{RT}.$$

Aus ihnen folgt dann

III. Ist $QR = Q'R'$ und
$$\overline{RS} = \overline{R'S'}, \text{ so ist auch}$$
$$\overline{QS} = \overline{Q'S'}.$$

Ein Satz IV. erweitert noch den Satz III. auf mehr Glieder.

Der Satz III. (IV.) ist derjenige, der die *Streckenaddition* begründet.

Machen wir den im vorigen Abschnitt geschilderten Uebergang von den Strecken zu den Punktspiegelungen, so sehen wir, *dass alle diese Sätze sich schon aus den Regeln für das Rechnen mit Spiegelungen ergeben*, dass also die geometrischen Eigenschaften, die in diese formalen Sätze hineingelegt sind, schon in dem Zusammenhang der Gleichungen $\overline{QR} = \overline{ST}$ und $QR = ST$, und in der Formel $S^2 = 1$ ($M^2 = 1$, vgl. Nr. 107 a und b) aufgenommen sind.

In der That ist der dem I. entsprechende Spiegelsatz in der Definition der Verwandtschaften enthalten, II. ist in Nr. 103. bewiesen, III. folgt, indem man (gemäss dem Satze 35.) die beiden

---

1) Möbius: »Ueber die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs«. (1844.) Gesammelte Werke I. S. 604 u. ff.

Die Buchstaben, die Möbius braucht, habe ich oben abgeändert, ebenso die Bezeichnung der Strecke.

rechten Seiten und ebenso die beiden linken Seiten der gegebenen Gleichungen hintereinander schreibt:

$$(QR)\,(RS) = (Q'R')\,(R'S')\,,$$

woraus nach Weglassen der Klammern wegen $R^2 = 1$ und $R'^2 = 1$ sich ergibt:

$$QS = Q'S'\,.$$

110. Wie aber die nun folgende Entwicklung bei MÖBIUS zeigt, setzt er stillschweigend noch die folgenden beiden Sätze voraus:

Erste Voraussetzung. Ist irgend eine Strecke $\overline{QR}$ gegeben, so kann jeder beliebige Punkt des Raumes S (bezw. T) als Anfangs-(End-)Punkt einer ihr gleichen Strecke, $\overline{QR} = \overline{ST}$ gewählt werden, und der End-(Anfangs-)Punkt T (S) ist dadurch eindeutig bestimmt.

Zweite Voraussetzung. Ist $\overline{OP}$ eine beliebige Strecke und ν eine ganze Zahl[1]), so ist ein Punkt M eindeutig so bestimmt, dass die Streckengleichung gilt $\nu\,\overline{OM} = \overline{OP}$.

Ersetzen wir in diesen beiden Voraussetzungen wieder die Strecken durch die Folgen von Spiegelungen an Punkten, die letzte Gleichung durch die Spiegelgleichung $(OM)^\nu = OP$, so ist dadurch unmittelbar die Möglichkeit gegeben, *die allgemeinste durch Spiegelgleichungen zu leistende Uebertragung anzugeben*, die den Uebergang von der Lehre der Streckenaddition zu anderen Teilen der Geometrie vermittelt.

Ja wir können uns *auf die erste Voraussetzung beschränken*, und erhalten somit die Anwendbarkeit jener Gleichungen auf Teile der Geometrie, die keineswegs der Streckenaddition völlig entsprechen, in denen aber für eine gewisse Klasse von Sätzen — die nämlich allein von der ersten Voraussetzung abhängen — die Uebereinstimmung mit den so einfachen Streckensätzen hergestellt wird.

Hierher gerade gehört auch die Zusammensetzung der Schraubungen.

---

1) Da MÖBIUS auch irrationale Processe zulässt, ist bei ihm die Zahl ν beliebig rational oder irrational.

Die erste Voraussetzung.

111. Setzen wir statt jeder Strecke $\overline{RS}$ die Folge von Punktspiegelungen RS, so stellt uns die Gesammtheit aller Punkte des Raumes eine Schaar von Spiegelelementen dar, die Verbindungen RS eine Gesammtheit von zweispiegeligen Verwandtschaften (Schiebungen), die aus jenen Spiegelelementen gebildet sind.

Danach haben wir, um gleich zum allgemeinsten Falle überzugehen, die für Strecken aufgestellte erste Voraussetzung so abzuändern:

Voraussetzung I. *Es sei irgendwie eine Schaar von Spiegelungen definirt von der Beschaffenheit, dass jede aus zwei dieser Spiegelungen gebildete Verwandtschaft sich in zwei andere Spiegelungen der Schaar zerlegen lässt, von welchen die eine beliebig aus der Schaar herausgegriffen werden darf.* [*Spiegelschaar I.*]

112. Sind R, S, T irgend drei unserer Spiegelungen, so giebt es unter den Spiegelungen nach dieser Voraussetzung stets eine weitere U, so dass die Gleichung gilt

(I.) $$RS = UT \qquad \text{oder}$$
$$RST = U, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz a. *Die Folge von irgend drei Spiegelungen unserer Schaar kann stets durch eine einzige dieser Spiegelungen ersetzt werden.*

Aus der letzten Gleichung folgt dann

$$(RST)^2 = 1, \quad RST \neq 1, \qquad \text{d. h.:}$$

Satz b. *Zwischen irgend drei Spiegelungen R, S, T der Schaar bestehen stets die Beziehungen*

$$(RST)^2 = 1, \quad RST \neq 1, \qquad \text{(vgl. Nr. 101.)}$$
oder $$(RS)T = T(SR) \qquad \text{(vgl. Nr. 99.).}$$

113. Gebraucht man eine früher eingeführte Ausdrucksweise (vgl. Nr. 97.), so kann man die Voraussetzung I. auch so fassen:

Es sei eine solche Schaar von Spiegelungen gegeben, dass eine jede aus ihnen gebildete zweispiegelige Verwandtschaft zu einer jeden Spiegelung der Schaar harmonisch ist (von ihr umgekehrt wird).

Es gilt aber nicht umgekehrt, dass jede Spiegelung, die zu einer solchen Verwandtschaft harmonisch ist, zur Spiegelschaar gehört. Dies sei verdeutlicht an einem

Beispiel: Wir wählen als Spiegelelemente sämmtliche Geraden $r, s, t \ldots$, die die einzige Gerade a senkrecht treffen. Eine Verwandtschaft, die aus den Spiegelungen an zwei dieser Geraden zusammengesetzt ist, ist eine Schraubung um die Axe a, oder auch, wenn die beiden Spiegelgeraden parallel gewählt sind, eine Schiebung längs dieser Axe (vgl. die Sätze in Nr. 10. und Nr. 8.). Jede dieser Verwandtschaften kann nun in zwei Spiegelungen der Schaar zerlegt werden, von denen die eine beliebig aus ihr herausgegriffen werden kann. (Man vergleiche die Umkehrungen in Nr. 10. und 8.). Die Geraden, die die Gerade a senkrecht treffen, genügen demnach der ersten Voraussetzung. Eine Schiebung längs der Axe a kann aber ausserdem in die Spiegelungen an zwei parallelen Geraden zerlegt werden, die senkrecht zu a sind, aber a *nicht* treffen. Diese Geraden gehören nicht mehr zur Schaar und diese darf auch nicht durch sie erweitert werden, da dann die Voraussetzung I. nicht mehr erfüllt bliebe.

114. Greift man von den zweispiegeligen Verwandtschaften, die sich aus unserer Spiegelschaar bilden lassen, irgend zwei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heraus, so kann man nach der Voraussetzung I. jede von ihnen so in zwei Spiegelungen zerlegen, dass für die zweite Spiegelung von $\mathfrak{A}$ und für die erste Spiegelung von $\mathfrak{B}$ ein und dieselbe Spiegelung S verwandt wird, d. h. man mache

$$\mathfrak{A} = RS, \quad \mathfrak{B} = ST,$$

dann wird

$$\mathfrak{AB} = RSST = RT,$$

d. h. die Folge von zwei aus den Spiegelungen der Schaar gebildeten zweispiegeligen Verwandtschaften ist wieder eine solche Verwandtschaft. Alle diese Verwandtschaften bilden daher eine *Gruppe* (vgl. Nr. 50.).

Bilden wir ausser der Folge

$$\mathfrak{AB} = RT$$

auch

$$\mathfrak{BA} = STRS,$$

so kommt wegen

$$1 = (RST)^2$$

oder

$$1 = RSTRST,$$

wenn wir beiderseits vorn R, hinten T zufügen, die Gleichung heraus

$$RT = STRS \qquad \text{oder}$$
$$\mathfrak{AB} = \mathfrak{BA}. \qquad \text{(Vgl. auch Nr. 104.)}$$

Dieses Ergebniss mit dem vorigen zusammengefasst giebt den

Satz. *Alle Verwandtschaften, die aus je zwei Spiegelungen unserer Schaar I. zusammengesetzt sind, bilden eine Gruppe vertauschbarer Verwandtschaften.* [*Gruppe I.*]

Anmerkung. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, da unmöglich aus der Eigenschaft einer Gruppe, dass sie aus vertauschbaren zweispiegeligen Verwandtschaften besteht, das Vorhandensein einer Spiegelschaar geschlossen werden kann, die diese Gruppe erzeugt, und die erste Voraussetzung erfüllt.

Wenn also in der vorliegenden Arbeit nur eine Klasse von Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften behandelt wird, so is dies doch eine ausserordentlich wichtige Klasse. So liefert z. B. die Theorie der kongruenten und symmetrisch-gleichen räumlichen Systeme eine Fülle verschiedenartiger Gruppen solcher Verwandtschaften. Alle diese Gruppen lassen sich aber aus einer Gesammtheit von Spiegelungen erzeugen, die der ersten Voraussetzung genügt.

115. Da die Folge von irgend drei Spiegelungen unserer Schaar gleich einer einzigen dieser Spiegelungen ist (nach 112 a) und da die Folge von irgend vier dieser Spiegelungen $KLMN = \mathfrak{AB}$ gleich der Folge von zweien ist, $\mathfrak{AB} = RT$ (vgl. 114.) so folgt durch mehrfache Anwendung dieser Sätze der

Satz. *Die Folge einer beliebigen ungeraden oder geraden Anzahl von Spiegelungen unserer Schaar lässt sich stets auf eine einzige bezw. die Folge von zwei dieser Spiegelungen zurückführen.*

Oder in anderen Worten:

Alle Verwandtschaften, die sich als Folge einer beliebigen Anzahl von Spiegelungen unserer Schaar darstellen lassen, bilden eine Gruppe, in der diejenigen Verwandtschaften, welche aus einer geraden Anzahl dieser Spiegelungen zusammengesetzt sind, eine Untergruppe ausmachen. [*Erweiterte Gruppe I.*]

116. Betrachtet man eine beliebige Folge von Spiegelungen unserer Schaar

$$R_1 S_1 R_2 S_2 R_3 S_3 \ldots,$$

so lässt die zwischen je drei von ihnen bestehende Gleichung $(R_1 S_1 R_3)^2 = 1$ (vgl. 112 b) eine Anwendung zu, die das Rechnen mit solchen Spiegelfolgen erleichtert, und deren Analogon für

das Rechnen mit Strecken sich bei MÖBIUS[1]) findet. Jene Gleichung kann auch geschrieben werden

$$R_1 S_1 R_2 = R_2 S_1 R_1 ,$$

d. h. in jeder Folge von solchen Spiegelungen können die beiden Spiegelungen R_1 und R_2, die irgend einer, S_1, nach rechts und links benachbart sind, vertauscht werden. Wie R_1 mit R_2, so kann R_2 mit R_3 vertauscht werden u. s. w. Da aber durch Vertauschung je zweier benachbarter Elemente R_i jede beliebige Vertauschung zwischen den R_i hergestellt werden kann, und da dasselbe auch für die S_i gilt, so hat man den

Satz. *In einer jeden Folge von Spiegelungen unserer Schaar lassen sich sowohl die geradstelligen Spiegelungen wie auch die ungeradstelligen unter sich beliebig vertauschen.*

Die zweite Voraussetzung.

117. Die Forderung, dass bei gegebenen Spiegelungen O, P unserer Schaar für jedes ganze ν eine Spiegelung M der Schaar vorhanden sei, für welche die Gleichung gilt

(II.) $$(OM)^\nu = OP ,$$

lässt eine Unterscheidung in zwei Fälle zu, je nachdem nämlich die Spiegelung M *eindeutig* oder *mehrdeutig* bestimmt ist. Nur im ersten Falle erhalten wir eine Gruppe zweispiegeliger Verwandtschaften, die *vollkommen* denselben Gesetzen unterliegen, wie sie bei der Streckenaddition gelten.

Voraussetzung IIa. *Es möge irgendwie eine Spiegelschaar definirt sein, die der Voraussetzung I. genüge und ausserdem die Eigenschaft habe, dass es für irgend zwei ihrer Spiegelungen O und P und bei gegebener ganzer Zahl ν stets eine und nur eine Spiegelung M der Schaar giebt, die der Gleichung genügt*

(II.) $$(OM)^\nu = OP .$$ *[Teilungsgleichung.]*

Eine solche Schaar heisse eine *Spiegelschaar Ia.*

118. Setzt man $\nu = 2$, so erhält man

$$OMOM = OP ,$$

oder indem man beiderseits vorn MO zufügt,

$$OM = MP .$$

---

1) MÖBIUS Gesammelte Werke I. a. a. O. Nr. 6.

Diese Gleichung sagt aus (36.), dass die Spiegelung O durch M in P übergeführt wird.

Wir wollen eine solche Spiegelung M, die O in P überführt, eine *mittlere Spiegelung zwischen O und P* nennen.

Dann gilt der

Satz. *Zwischen je zwei Spiegelungen der Schaar Ia. giebt es stets eine und nur eine mittlere Spiegelung, die ebenfalls der Schaar angehört.*

Denn gäbe es noch eine zweite solche Spiegelung M', für welche

$$OM' = M'P$$

wäre, so würde daraus folgen, indem man beiderseits vorn OM' zufügt:

$$(OM')^2 = OP,$$

also müsste (nach Vor. Ia) $M' = M$ sein.

Anmerkung. *Ausserhalb* der Spiegelschaar können immerhin noch weitere mittlere Spiegelungen vorhanden sein. So bilden z. B. alle Umwendungen um Axen, die einem Parallelstrahlbündel angehören, eine Spiegelschaar Ia., und es giebt zwischen zwei Graden o, p der Schaar eine mittlere m der Schaar. Ausserdem genügt aber auch jede Gerade m_1, die zur Ebene von o und p senkrecht ist, und m trifft, der Gleichung $o\,m_1\} = \{m_1 p\}$. An diesem Beispiel einer Spiegelschaar Ia. kann gleichzeitig erkannt werden, dass auch die allgemeinere Gleichung $\{om\}^r = \{op\}$ *mehrdeutig* befriedigt werden kann, falls man für $\{m\}$ auch Spiegelungen zulässt, die ausserhalb der Schaar liegen.

Da jetzt in unserer Gruppe zweispiegeliger Verwandtschaften völlige Uebereinstimmung mit der Streckenaddition herrscht, so können wir die Sätze, die Möbius und H. Grassmann[1]) für die Streckenaddition aufgestellt haben, genau so beweisen, wie es dort geschieht. Insbesondere werden die Sätze über geometrische Mittelpunkte (Schwerpunkte) in unserer Gruppe ihr Analogon finden.

Wir stellen hier die Sätze, die wir in den geometrischen Anwendungen (im XIV. Abschnitt) verwerten werden, kurz zusammen.

---

1) Möbius, a. a. O. H. Grassmann »Die lineale Ausdehnungslehre« (1844) § 24.

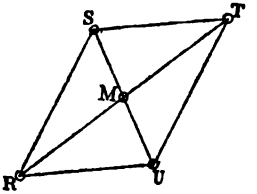
119. Sind R, S, T, U vier Spiegelungen der Schaar Ia, für die die Gleichung besteht[1])

$$(\alpha) \qquad RS = UT,$$

so bestimme man (Vor. Ia) in der Schaar die Spiegelung M, für welche ist:

$$(\beta_1) \qquad RM = MT,$$

dann wird:



$$SRRM = TUMT \qquad \text{(oder wegen 114.)}$$
$$SRRM = MTTU, \qquad \text{also}$$
$$(\beta_2) \qquad SM = MU.$$

Da im Beweise nur das Vorhandensein, nicht aber die Eindeutigkeit von M vorausgesetzt wurde, so können wir den damit bewiesenen Satz allgemein aussprechen:

Satz. *Gilt in einer Spiegelschaar I. die Gleichung $RS = UT$ und ist in ihr M eine mittlere Spiegelung zwischen R und T, so ist sie es auch zwischen S und U.*

Ist (β_1) und (β_2) vorausgesetzt, so ergiebt sich daraus, indem man die Folge der Gleichungen umkehrt, die Gleichung (α), d. h.:

Umkehrung. *Ist in einer Spiegelschaar I. M gleichzeitig mittlere Spiegelung zwischen R und T und zwischen S und U, so gilt die Gleichung $RS = UT$.*

120. Aus der Schaar Ia. seien ν Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ herausgegriffen, und hierzu noch eine weitere O, dann sei die Folge gebildet

$$OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu \ldots$$

Diese Folge lässt sich (nach Nr. 115. und nach Vor. I.) ausdrücken durch

$$OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu = OP,$$

wo auch die Spiegelung P zu der Schaar gehört; dann kann gesetzt werden (Vor. IIa)

$$OP = (OM)^\nu,$$

wo M als Spiegelung der Schaar eindeutig bestimmt ist, und es wird

$$(1) \qquad OP_1\, OP_2 \ldots OP_\nu = (OM)^\nu.$$

[1]) Für die Figur wählen wir den einfachsten Fall der Punktspiegelung.

Wählt man aus der Spiegelschaar statt O irgend eine andere Spiegelung O' aus, so kann man setzen (wegen $O'^2 = 1$)

$$OO'O'P_1\ OO'O'P_2 \ldots OO'O'P_\nu = (OM)^\nu,$$

daraus erhält man durch Umstellung (116.)

$$(OO')^\nu\ O'P_1\ O'P_2 \ldots O'P_\nu = (OM)^\nu,$$

oder indem man beiderseits ν mal $O'O$ zufügt

$$O'P_1\ O'P_2 \ldots O'P_\nu = (O'O)^\nu\ (OM)^\nu,$$

und daraus wegen der Vertauschbarkeit

$$= (O'OOM)^\nu,$$

also endlich wegen $O^2 = 1$

$$(1') \qquad O'P_1\ O'P_2 \ldots O'P_\nu = (O'M)^\nu.$$

Dies giebt den

Satz. *Gilt für die Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu, M$ und eine weitere Spiegelung O einer Spiegelschaar I. die Gleichung*

$$OP_1\ OP_2 \ldots OP_\nu = (OM)^\nu,$$

so gilt sie auch, wenn man O durch irgend eine andere Spiegelung O' der Schaar ersetzt.

Setzt man statt der beliebigen Spiegelung O die Spiegelung M ein, so wird wegen $MM = 1$

$$(2) \qquad MP_1\ MP_2 \ldots MP_\nu = 1 \qquad \text{oder auch}$$
$$P_1M\ P_2M \ldots P_\nu M = 1.$$

Ist umgekehrt durch eine Spiegelung M eine dieser beiden Gleichungen erfüllt, so folgt daraus auf dem umgekehrten Wege die Gleichung (1) für jede Spiegelung O der Schaar.

Nach den drei ersten Gleichungen dieser Nr. lässt sich die Spiegelung M aus den Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ und O, und — da die Wahl von O gleichgiltig ist — aus $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ allein eindeutig bestimmen, d. h.:

Zusatz. *Aus ν beliebigen Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ einer Spiegelschaar Ia lässt sich eindeutig eine Spiegelung M der Schaar ableiten, für welche die Gleichung gilt:*

$$MP_1\ MP_2 \ldots MP_\nu = 1;$$

es gilt dann auch für jede weitere Spiegelung O der Schaar die Gleichung

$$OP_1\ OP_2 \ldots OP_\nu = (OM)^\nu.$$

Diese Spiegelung M nennen wir die mittlere zwischen den Spiegelungen $P_1, P_2, \ldots P_\nu$.

121. Auf einem von MÖBIUS in der Streckenrechnung eingeschlagenen Wege kann man jetzt diese mittleren Spiegelungen dazu benutzen, um die Folge von einer beliebigen Anzahl zweispiegeliger Verwandtschaften der Gruppe I. zu bilden.

Ist eine solche Folge gegeben

$$\mathfrak{A} = P_1 Q_1 P_2 Q_2 \cdots P_\nu Q_\nu ,$$

und sind M und N die mittleren Spiegelungen zwischen $P_1, P_2, \cdots P_\nu$ und zwischen $Q_1, Q_2, \cdots Q_\nu$, d. h. ist

$$\begin{aligned} P_1 M P_2 M \cdots P_\nu M &= 1 \quad \text{und} \\ N Q_1 N Q_2 \cdots N Q_\nu &= 1 , \end{aligned} \tag{2}$$

so wird wegen $M^2 = 1$ und $N^2 = 1$

$$\mathfrak{A} = P_1 M M N N Q_1 P_2 M M N N Q_2 \cdots P_\nu M M N N Q_\nu ,$$

also durch Umstellung (116.)

$$\mathfrak{A} = P_1 M P_2 M \cdots P_\nu M (MN)^\nu N Q_1 N Q_2 \cdots N Q_\nu ,$$

daher wegen (2)

$$P_1 Q_1 P_2 Q_2 \cdots P_\nu Q_\nu = (MN)^\nu . \qquad \text{D. h.:}$$

Satz. *Statt die Folge von ν zweispiegeligen Verwandtschaften der Gruppe I. zu bilden, nehme man ν mal hintereinander eine einzige zweispiegelige Verwandtschaft, deren Anfangs- und Endspiegelung die mittlere der Anfangs- und Endspiegelungen der gegebenen Verwandtschaften ist.*

122. **Voraussetzung IIb.** *Sind wie bisher O und P zwei Spiegelungen einer Schaar, die der Vorraussetzung I. genügt, so sei wie bei IIa. vorausgesetzt, dass es innerhalb dieser Schaar eine Spiegelung M gäbe, welche die Gleichung*

$$(OM)^\nu = OP \tag{II.}$$

befriedigt (wo ν eine ganze Zahl sei); wir setzen jetzt aber voraus, die Spiegelung M sei durch diese Gleichung mehrdeutig bestimmt.

123. Betrachten wir zuerst den Fall $\nu = 2$ und nehmen an, M und M' seien innerhalb der Spiegelschaar I. zwei verschiedene Lösungen der Gleichung (II.), also

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= OP \quad \text{und} \\ (OM')^2 &= OP , \quad \text{wo} \\ M &\neq M' . \end{aligned}$$

Dann ergiebt sich, wie in Nr. 118.

$$OM = MP \qquad \text{und}$$
$$OM' = M'P,$$

d. h. M und M' sind *zwei mittlere Spiegelungen* der Spiegelungen O und P. Verknüpft man diese beiden Gleichungen, so wird

$$MOOM' = PMM'P$$
$$= M'PPM$$

(wegen der Vertauschbarkeit vgl. Nr. 116.), also

(1) $$MM' = M'M, \qquad \text{und da}$$
$$MM' \neq 1$$

vorausgesetzt ist, so ist MM' selbst eine involutorische Verwandtschaft (48.), also

$$MM' = M'M = A$$

wo $$A^2 = 1, \quad A \neq 1.$$

Diese Spiegelung A gehört nicht zur Schaar, denn die Verwandtschaft A, die ebenfalls der Gruppe angehört, kann nicht in A und noch eine Spiegelung zerlegt werden, sonst müsste diese zweite Spiegelung $= 1$ sein, was dem Begriff der Spiegelung widerspricht.

Ist aber R irgend eine Spiegelung der Schaar, so wird (Vor. I, vgl. Nr. 112.)

$$(MM'R)^2 = 1 \qquad \text{oder}$$
$$MM'R = RM'M, \qquad \text{also}$$
$$AR = RA.$$

Während die Gleichung $MM' = A$ aussagt, dass M zu M' und A zu M (und zu M') eine harmonische (mit ihr vertauschbare) Spiegelung sei (48.), ergiebt die letzte Gleichung, dass A zu jeder Spiegelung R der Schaar harmonisch ist, also:

Satz. *Giebt es innerhalb der Spiegelschaar I. zu irgend zwei Spiegelungen O und P der Schaar zwei verschiedene mittlere Spiegelungen M, M', so sind beide zu einander harmonisch und ihre Folge $MM' = A$ ist eine Spiegelung, die zu allen Spiegelungen der Schaar harmonisch ist.*

124. Dieser Satz lässt sich umkehren.

Umkehrung. *Ist A eine zu allen Spiegelungen der Schaar I. harmonische Spiegelung, und N eine mittlere Spiegelung zwischen irgend zwei Spiegelungen R und S der Schaar, so ist $AN = N'$ eine zweite mittlere Spiegelung zwischen R und S.*

Da A nach der Voraussetzung zu N harmonisch ist, so ist (nach 47. und 48.) $AN = N'$ ebenfalls eine Spiegelung, daher

$$A = NN' = N'N,$$

und da A auch zu R harmonisch ist, so ist

$$AR = RA, \qquad \text{also}$$
$$NN'R = RNN',$$

oder indem man beiderseits vorn N, hinten N' zufügt,

$$N'RN' = NRN.$$

Ist nun N mittlere Spiegelung zwischen R und S, so wird

$$RN = NS, \qquad \text{also}$$
$$S = NRN = N'RN' \qquad \text{oder}$$
$$SN' = N'R,$$

d. h. auch $N' = AN$ ist mittlere Spiegelung zwischen S und R.

Anmerkung. Die mittlere Spiegelung N' braucht nicht ebenfalls zur Schaar zu gehören. Wir geben *5 Beispiele*, an denen die möglichen Fälle zu erkennen sind.

a) Die Spiegelungen an allen Punkten des Raumes haben keine gemeinsame harmonische Spiegelung, doch bilden sie eine Schaar, die der Voraussetzung I. genügt. Daraus folgt (123, Satz), dass die Gleichung $OM = MP$ für M innerhalb der Schaar nicht mehrdeutig gelöst werden kann.

b) Die Spiegelungen an den Geraden eines Parallelstrahlbündels genügen der Voraussetzung I. Zu ihnen allen harmonisch ist die Spiegelung an jeder Ebene A, die auf den Strahlen des Bündels senkrecht steht. Sind o, p, m drei Strahlen des Bündels, für welche die Gleichung $\{om\} = \{mp\}$ gilt, so ist (68.) $\{mA\} = \{N\}$ die Spiegelung am Schnittpunkt N einer dieser Ebenen A mit der Geraden m; diese ist (nach der Umkehrung) ebenfalls eine Lösung der Gleichung, d. h. es ist $\{oN\} = \{Np\}$, keineswegs gehört sie aber der Schaar an.

c) Die Spiegelungen an den Geraden, die eine einzige Gerade o senkrecht treffen, genügen der Voraussetzung I. Die Spiegelung an dieser Geraden a selbst ist zu allen Spiegelungen der Schaar harmonisch; daher gehört (Umkehrung) zu einer Lösung $\{m\}$ der Gleichung $\{om\} = \{mp\}$ noch eine zweite $\{n\} = \{ma\}$. Da nun aber die Gerade a auch durch die Gerade n senkrecht getroffen wird (nach Nr. 70.), so gehört in diesem Falle auch die Spiegelung an n zur Schaar.

125. Gehen wir zu einem allgemeinen ν über, und nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Spiegelungen der Schaar, M und M', die die Gleichung II. erfüllen, also

$$(OM)^\nu = OP$$
und $$(OM')^\nu = OP, \qquad \text{wo } M \neq M',$$

so folgt daraus

$$(OM)^\nu = (OM')^\nu \qquad \text{oder}$$
$$1 = (MO)^\nu (OM')^\nu ,$$

daraus wegen der Vertauschbarkeit

$$1 = (MOOM')^\nu \qquad \text{oder}$$
$$1 = (MM')^\nu .$$

Um diese Gleichung weiter zu behandeln, setzen wir

$$MM' = M'M'' = \cdots = M^{(\nu-1)} M^{(\nu)} ,$$

wo (wegen Vor. I.) auch M', M'', $\cdots M^{(\nu)}$ zur Schaar gehören. Dann wird

$$1 = (MM')^\nu = MM'M'M'' \cdots M^{(\nu-1)} M^{(\nu)}$$
$$1 = MM^{(\nu)} , \qquad \text{also}$$
$$M^{(\nu)} = M .$$

Dabei ist (falls ν keine Primzahl ist) nicht ausgeschlossen, dass die $M^{(i)}$ teilweise untereinander gleich werden.

Die Spiegelungen M, M', M'', $\cdots$, die der Bedingung

$$MM' = M'M'' = \cdots = M^{(\nu-1)} M$$

genügen, nennt man ein *cyklisches System von Spiegelungen mit der Periode* ν, falls in der Reihe keine gleichen Spiegelungen vorkommen.

Sind nun $M^{(i)}$ und $M^{(k)}$ irgend zwei Spiegelungen dieses Systems, so erhält man

$$(M^{(i)} M^{(k)})^\nu = (M^{(i)} M^{(i+1)} M^{(i+1)} M^{(i+2)} \cdots M^{(k-1)} M^{(k)})^\nu$$
$$= (MM'MM' \cdots MM')^\nu ,$$
$$= (MM')^\nu (MM')^\nu \cdots (MM')^\nu , \quad \text{also}$$
$$(M^{(i)} M^{(k)})^\nu = 1 , \quad \text{und insbesondere}$$
$$(MM^{(i)})^\nu = 1 .$$

Bildet man nun

$$(OM^{(i)})^\nu = (OMMM^{(i)})^\nu ,$$

so wird dies wegen der Vertauschbarkeit (114.)

$$= (OM)^\nu (MM^{(i)})^\nu = OP ,$$

also

$$(OM^{(i)})^\nu = OP , \qquad \text{d. h.:}$$

Satz. *Sind in der Spiegelschaar I. zwei Spiegelungen* M *und* M' *vorhanden, die gleichzeitig die Gleichung (II.) befriedigen,*

so erzeugen diese ein cyklisches System von Spiegelungen M, M', M'', $\ldots M^{(\nu-1)}$, *die der Schaar angehören und gleichfalls jene Gleichung befriedigen.*

Auch hier ist nicht ausgeschlossen, dass gleiche unter den Spiegelungen vorhanden sind.

126. Die Sätze in Nr. 119. bis 121. sind unter der Voraussetzung geführt, dass es eine Spiegelung giebt, die der Gleichung (II.) genügt. *Sieht man also von der Eindeutigkeit der Bestimmung dieser Spiegelung* M *ab, so gelten die dort aufgestellten Gleichungen auch dann noch, wenn man für* M *irgend eine des cyklischen Systems auswählt und in sie einträgt.*

XVI. Geometrische Anwendungen.

Gruppen von projektiven Schiebungen und von Schraubungen. Polare Gebilde zu einer Gruppe von Punkten, von Ebenen, von windschiefen Geraden und von Umwendaxen.

127. Neue Beispiele von Spiegelschaaren, die den Bedingungen I. und II a. genügen, gewinnt man leicht aus dem zur Einführung benutzten Beispiele der Punktspiegelung durch die bekannten *Abbildungsmethoden* (vgl. Nr. 91, a.) der projektiven und der dualen Uebertragung. Doch erhält man so keine wesentlich neuen Sätze, und es ist auch nicht die Methode der Spiegelgleichungen, die erst eine solche Uebertragung anbahnt. Man findet ja auch ohne Spiegelgleichung, dass die unendlich ferne Ebene zu einer Punktgruppe und ihrem Schwerpunkt eine ganz analoge Lage hat, wie eine beliebige Ebene zu einer Punktgruppe und dem Pole der Ebene, oder ein beliebiger Punkt zu einer Ebenengruppe und ihrer Polare.

Es hat aber die nicht durch einen Algorithmus begründete Methode der »Abbildung« von Sätzen, abgesehen von der Beschränktheit ihrer Anwendung, den erheblicheren Mangel, dass sie verschiedene Gebiete der Geometrie in eine *nicht innerlich begründete Abhängigkeit* bringt. Es muss derjenige, der die projektive Geometrie rein geometrisch betreibt, seine Beweise so liefern können, dass sie von Sätzen der nicht projektiven Geometrie unabhängig sind, und dies gilt (was neuerdings wenig

beachtet worden ist) auch umgekehrt. Aber andererseits dürfen Sätze, die in zweierlei Gebieten der Geometrie parallel neben einander herlaufen, nicht auf völlig verschiedene Schlussmethoden gegründet werden. Dass es nicht zwei sich widersprechende Forderungen sind, *Unabhängigkeit* und doch *Gleichartigkeit* der Beweise zu verlangen, dies wird eben an unserer Methode deutlich: *entsprechende Beweise in zwei Gebieten der Geometrie werden durch entsprechende Folgen von Gleichungen geführt, und nur die Gebilde, die in die Gleichungen eintreten, sind in beiden Gebieten verschieden.*

Und gehen wir von den »Abbildungen« zu den allgemeineren »formalen Uebertragungen« über (vgl. Nr. 91, b_2), so erhalten wir ausserdem die Möglichkeit neue Sätze aufzufinden, da diese Art der Uebertragung bisher weit weniger verwendet worden ist, wie die der Abbildung. Mit ihrer Hilfe werden wir im Folgenden auf eine merkwürdige Analogie zwischen der Geometrie der *Punkte* (oder Ebenen) *des Raumes* und der Geometrie der *Geraden des Raumes* geführt, vermöge welcher *jeder Geraden des Raumes in Bezug auf eine Gruppe von Geraden eine bestimmte weitere Gerade polar zugeordnet ist*[1]).

Ich halte es für besonders wichtig, dass die im folgenden abgeleiteten projektiven Sätze (Abschnitt A. und B.) unabhängig vom Grundsatz der projektiven Geometrie bewiesen werden[2]).

---

1) Um für eine Gruppe von ν Geraden im Raume eine allgemeine Polarentheorie zu gewinnen — die weiter unten ausgeführte Konstruktion liefert nur die letzte Polare — hat man die in meiner Habilitationsschrift entwickelten Methoden anzuwenden. Dabei treten an Stelle der Projektivitäten in der Geraden die aus zwei kollinearen Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften des Raumes.

2) In einem Vortrage »Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie« (vgl. die »Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher u. Aerzte«, 64. Versammlung zu Halle, 1891, II. Band, S. 8, oder den Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I, 1890—91, S. 45) habe ich auf den Unterschied derjenigen geometrischen Sätze hingewiesen, die sich ausschliesslich auf die formalen Operationen des Verbindens und Schneidens der Grundelemente Punkte, Geraden, Ebenen, stützen, und derjenigen, die noch weitere Voraussetzungen, wie z. B. die der Stetigkeit benützen. Zur ersten Klasse gehören sicherlich die im folgenden benützten Sätze über die perspektiven Kollineationen und über harmonische Elemente. Dagegen greifen alle bekannten Beweise des »Grundsatzes der projektiven Geometrie« auf Stetigkeitsbetrachtungen zurück. Um die Grenze dieser beiden Klassen festzustellen, ist es nöthig, so viel als irgend geht, ohne

Es ist daher nöthig, so weit auf die Herleitung dieser Sätze aus den Grundeigenschaften des Projicirens und Schneidens einzugehen, dass diese Unabhängigkeit zu erkennen ist. Auch die auf Streckengleichheit gegründeten Sätze nehmen im Gebiet der nicht-projektiven Geometrie einen besonderen Platz ein, da sie vom Begriff der Länge und Kongruenz unabhängig abgeleitet werden können.

Zum Schluss wird noch ein *Beispiel einer Spiegelschaar* gegeben, *die den Bedingungen I. und IIb. genügt.* Es ist dies die Gesammtheit aller Umwendungen, deren Axen eine und dieselbe Gerade senkrecht treffen; diese Schaar führt auf die Gruppe von allen Schraubungen um ein und dieselbe Schraubenaxe.

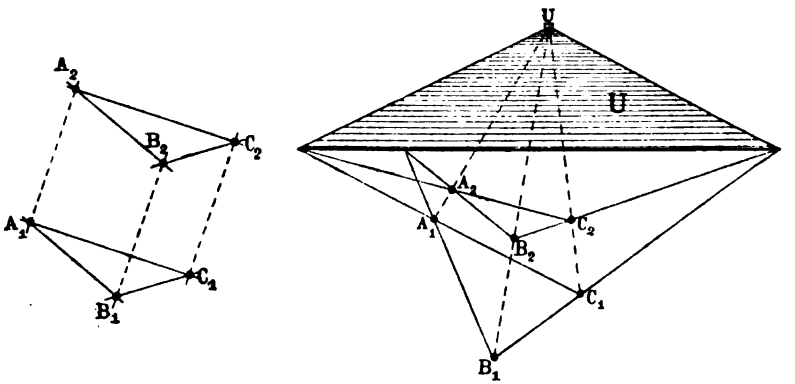
A. Projektive Schiebungen erster Art.

128. Sollen zwei Strecken einander gleich sein, $\overline{A_1 A_2} = \overline{B_1 B_2}$, so müssen sie unter einander parallel sein und ausserdem ihre Anfangspunkte und ihre Endpunkte auf parallelen Geraden liegen. Diese Eigenschaft reicht aus, um unabhängig vom Begriff der Länge zu einer Strecke $\overline{A_1 A_2}$ das ganze System der ihr gleichen Strecken (abgesehen von denen, die in derselben Geraden wie $\overline{A_1 A_2}$ liegen) zu finden, oder was dasselbe heisst (107.), um in derjenigen Schiebung, die dem Punkte A_1 den A_2 zuordnet, zu irgend einem (ausserhalb der Geraden $A_1 A_2$ gelegenen) Punkte den entsprechenden zu finden.

Aus der Figur dreier Ebenen, die eine Richtung gemein haben und von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden, folgt, *dass man zu einem Punkte C_1 denselben entsprechenden Punkt C_2 findet, ob man von dem ursprünglich gegebenen Paar A_1, A_2 oder von einem daraus erst konstruirten Paar B_1, B_2 ausgeht.* Nur wenn alle drei Paare in einer Ebene liegen, muss zum Beweise ein ausserhalb der Ebene liegendes Hilfspaar eingeführt werden; der Satz gestattet dann auch auf der Geraden $A_1 A_2$ selbst zu jedem Punkte den entsprechenden zu finden, worauf wieder durch Einführung geeigneter Hilfspaare der Satz ohne Einschränkung für jede drei Paare gefolgert werden kann.

Stetigkeitsbetrachtungen zu erledigen. Die folgenden Sätze gehören dieser aus den Operationen des Verbindens und Schneidens allein abgeleiteten Klasse an.

Anmerkung. Die Notwendigkeit einen Umweg zu machen, um von zwei Punkten A_1, A_2 auf Punkte ihrer Verbindungsgeraden zu kommen, tritt auch im folgenden an einigen Stellen auf, ohne dass wir die dadurch notwendige Vervollständigung des Beweises, die genau wie hier verläuft, besonders liefern [1]).



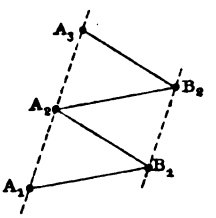
129. Wir wollen unmittelbar die erzeugende Operation statt der daraus abgeleiteten Sätze projektiv übertragen. An Stelle des gemeinsamen unendlich fernen Punktes der Strecken wählen wir jetzt einen beliebigen Punkt U als *Centrum* und an Stelle der unendlich fernen Ebene eine durch den Punkt U gehende Ebene $\mathfrak{U}$ und nennen sie *Spurebene*.

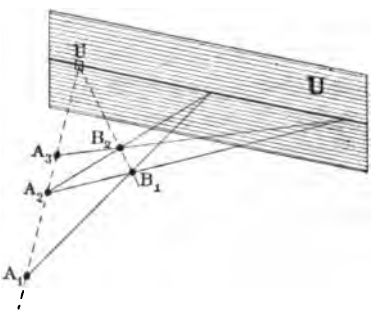
Ordnen wir dann einem beliebigen Punkte A_1 einen auf der Geraden $A_1 U$ gelegenen Punkt A_2 zu, dann ist jedem weiteren Punkte B_1 ein einziger Punkt B_2 so zugeordnet, *dass die beiden entsprechenden Punkte* B_1, B_2 *wieder mit* U *in einer Geraden liegen*, während die entsprechende Paare verbindenden Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sich in $\mathfrak{U}$ schneiden, woraus dann folgt, dass auch die durch drei Punkte A_1, B_1, C_1 und die durch ihre drei entsprechenden Punkte A_2, B_2, C_2 gelegten Ebenen sich in einer Geraden der Ebene $\mathfrak{U}$ schneiden. Auch diese Beziehung ist unabhängig vom Ausgangspaar und ordnet dann jedem Punkte des Raumes

1) Auf die genauere Ausführung dieser Sätze, die hier nur als Hilfssätze auftreten, kann ich um so eher verzichten, da ich an anderer Stelle darauf zurückkommen muss.

einen bestimmten Punkt zu, und zwar so, *dass den Punkten einer Geraden oder Ebene wieder die Punkte einer Geraden oder Ebene entsprechen, welche die erste in einem Punkte oder einer Geraden der Ebene* U *trifft.*

Die so definirte Verwandtschaft nennen wir eine *projektive Schiebung erster Art mit dem Centrum U und der Spurebene* U[1]). Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{A}$.





130. Soll in der projektiven Schiebung $\mathfrak{A}$, die dem Punkte A_1 den Punkt A_2 zuordnet, zu diesem Punkte A_2 wieder der entsprechende gesucht werden, so hat man die Konstruktion aus einem Hilfspaar B_1, B_2 herzuleiten, das nicht auf der Geraden $A_1 A_2$ liegt. Da sich die Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in U treffen, und das Paar $A_1 A_2$ aus einem Punkte der Spurebene nach B_1, B_2, dieses Paar aber aus einem weiteren Punkte der Spurebene nach A_2, A_3 projicirt werden, so bilden die zwei Spurpunkte zusammen mit B_1 und B_2 ein vollständiges Viereck, auf dessen Nebenseite $A_2 U$ die beiden Punkte A_1, A_3 durch die Punkte A_2 und U harmonisch getrennt werden. D. h.:

Satz. *Ordnet eine projektive Schiebung* $\mathfrak{A}$ *einem Punkte* A_1 *den Punkt* A_2 *zu, so ordnet ihre Wiederholung, d. h. die Verwandtschaft* $\mathfrak{A}^2$, *dem Punkte* A_1 *seinen vierten harmonischen* A_3 *zu* A_2 *und dem Centrum* U *zu.*

Da aber die Verwandtschaft $\mathfrak{A}^2$ ihrer Definition zu Folge ebenfalls eine projektive Schiebung mit dem Centrum U und der Spurebene U ist, so kann man umgekehrt sie als eine beliebige

1) Sie ist eine *perspektive Kollineation*, bei welcher das Centrum in der Spurebene liegt. Ueber diese Verwandtschaft vergleiche man v. STAUDT, Geometrie der Lage Nr. 135.

solche Verwandtschaft $\mathfrak{A}'$ ansehen und aus ihr diejenige projektive Schiebung suchen, deren Wiederholung $\mathfrak{A}'$ ergiebt. Ist in dieser dem Punkte A_1 der Punkt A_2 zugeordnet, so muss in $\mathfrak{A}'$ (nach dem Satze) der vierte harmonische A_3 von A_1 zu A_2 und U zugeordnet sein. Daher ist auch bei gegebenem A_1 und A_3 der Punkt A_2 als vierter harmonischer von U zu A_1 und A_3 bestimmt:

Umkehrung. *Ordnet eine projektive Schiebung $\mathfrak{A}'$ einem Punkte A_1 den Punkt A_3 zu, so ist sie die Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung, die dasselbe Centrum U und dieselbe Spurebene $\mathfrak{U}$ wie jene hat, und welche dem Punkte A_1 den vierten harmonischen A_2 von U zu A_1 und A_3 zuordnet.*

Satz. *Es giebt nur eine einzige projektive Schiebung, deren Wiederholung eine gegebene projektive Schiebung $\mathfrak{A}'$ liefert.*

Denn der dem Punkt A_1 entsprechende Punkt A_2 ist eindeutig bestimmt, und somit ist es auch die Schiebung $\mathfrak{A}$, da sie Centrum und Spurebene mit $\mathfrak{A}$ gemein hat.

131. Die Spiegelung an einem Punkte geht durch projektive Uebertragung in die projektive Spiegelung an einem aus Punkt und Ebene bestehenden Paare über; die Ebene ist diejenige, die bei der Uebertragung aus der unendlich fernen Ebene hervorgeht.

Wenn wir daher früher die Schiebung als Folge zweier Punktspiegelungen dargestellt haben, so wird jetzt die projektive Schiebung als Folge zweier projektiven Spiegelungen ausgedrückt werden können, welche die Spurebene zum gemeinschaftlichen Spiegelelement haben. Der direkte Beweis dafür geht aus einem Satze hervor, den wir in seiner allgemeinsten Form voranstellen.

Die projektiven Spiegelungen sowohl an Punkt und Ebene, wie an zwei windschiefen Geraden sind *kollineare Verwandtschaften*[1]). Daraus folgt, dass Punkte einer Geraden wieder in solche Punkte und insbesondere vier harmonische Punkte einer Geraden wieder in solche gespiegelt werden. Hieraus ergiebt sich aber der

---

1) Die Spiegelung an Punkt und Ebene kann als besonderer Fall einer perspektiven Kollineation aufgefasst werden, bei der das Centrum nicht (wie bei der projektiven Schiebung) in der Spurebene liegt, bei der aber irgend ein Paar entsprechender Punkte (und in Folge dessen jedes Paar) harmonisch zum Centrum und zur Spurebene liegt. Da die Folge zweier kollinearen Verwandtschaften wieder eine solche ist, so ist auch die Spiegelung an einem Geradenpaare, die sich (nach 81.) in zwei Spiegelungen an Punkt und Ebene zerlegen lässt, kollinear.

Satz. *Werden durch eine Spiegelung* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\}$ *zwei Spiegelelemente* $\mathfrak{r}_1$ *und* $\mathfrak{r}_2$ *(also Punkt und Ebene, die nicht in einander liegen, oder zwei Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen) in die Elemente* $\mathfrak{r}_1'$ *und* $\mathfrak{r}_2'$ *übergeführt, so geht dabei die Spiegelung* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{matrix}\right\}$ *in die Spiegelung* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{matrix}\right\}$ *über.*

Denn entsprechen sich zwei Punkte A_1, A_2 in der Spiegelung $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{matrix}\right\}$, so hat ihre Verbindungsgerade sowohl mit dem Spiegelelement $\mathfrak{r}_1$, wie mit $\mathfrak{r}_2$ einen Punkt gemein, und beide Punkte liegen zum Paar A_1, A_2 harmonisch; daher müssen auch die beiden Punkte A_1' und A_2' und die Punkte der Spiegelelemente $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$, in die jene Punkte durch $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\}$ übergeführt werden, wiederum auf einer Geraden harmonisch liegen, also A_1' und A_2' sich in der Spiegelung $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{matrix}\right\}$ entsprechen, d. h. es wird die Spiegelung $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1\\ \mathfrak{r}_2\end{matrix}\right\}$ durch $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\}$ in $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{matrix}\right\}$ übergeführt.

Es gilt daher (36.) die Gleichung:

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1 & \mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{r}_2 & \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1 & \mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{s}_2 & \mathfrak{r}_2'\end{matrix}\right\}.$$

Umkehrung. *Gilt diese Gleichung, so wird das Spiegelelement* $\mathfrak{r}_1$ *durch* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\}$ *in eines der Spiegelelemente* $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{r}_2'$ *übergeführt,* $\mathfrak{r}_2$ *aber in das andere.*

Denn würde $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ in $\mathfrak{r}_1''$ und $\mathfrak{r}_2''$ übergeführt, so würde nach dem Satz die Gleichung gelten

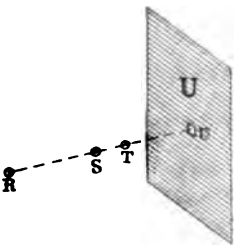
$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1 & \mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{r}_2 & \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1 & \mathfrak{r}_1''\\ \mathfrak{s}_2 & \mathfrak{r}_2''\end{matrix}\right\};$$

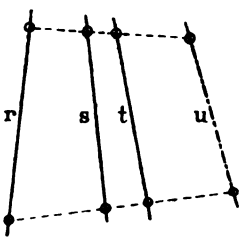
durch Vergleichung dieser mit der obigen Gleichung erhält man, indem man die beiden rechten Seiten gleichsetzt und dann beiderseits vorn $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{s}_2\end{matrix}\right\}$ zufügt,

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1'\\ \mathfrak{r}_2'\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{r}_1''\\ \mathfrak{r}_2''\end{matrix}\right\}.$$

Daher müssen die Spiegelelemente r_1' und r_2' entweder den Elementen r_1'' und r_2'' oder r_2'' und r_1'' gleich sein, w. z. b. w.

132. Wenden wir diesen Satz auf projektive Spiegelungen an, die eine Ebene oder eine Gerade als gemeinsames Spiegelelement besitzen, so muss, da dieses in sich gespiegelt wird,

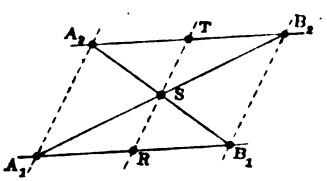


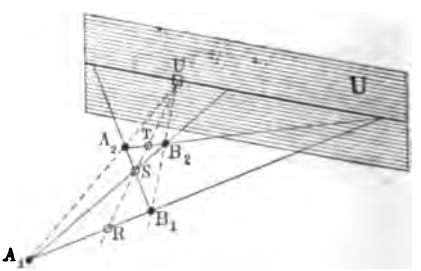


das andere der ersten Spiegelung in das andere der letzten gespiegelt werden, und wir erhalten so für die Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} R\ S \\ \mathsf{U}\ \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S\ T \\ \mathsf{U}\ \mathsf{U} \end{Bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{Bmatrix} r\ s \\ u\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\ t \\ u\ u \end{Bmatrix}$$

die geometrischen Bedingungen, *dass der Punkt R an* $\begin{Bmatrix} S \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ *in T und die Gerade r an* $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ *in t gespiegelt wird*, deren erste man noch so fassen kann, *dass die Punkte R, S, T in einer Geraden liegen und in ihr die Punkte R und T von S und dem Schnittpunkt mit* U *harmonisch getrennt werden.*





133. Die erste Gleichung der vorigen Nummer sagt aus, dass, wenn man einen Punkt A_1 erst an $\begin{Bmatrix} R \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ nach B_1 und diesen an $\begin{Bmatrix} S \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ spiegelt, man auf denselben Punkt A_2 kommt, als wenn man A_1 zuerst an $\begin{Bmatrix} S \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ nach B_2 und diesen an $\begin{Bmatrix} T \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix}$ gespiegelt hätte. Der

Satz ist also nur ein Ausdruck der harmonischen Lage von Punkten in einem vollständigen Viereck, dessen Ecken die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 und von dessen Nebenecken die eine in S, eine zweite in U, die dritte in der Ebene $\mathfrak{U}$ liegt, während die Nebenseite SU die Seiten des Vierecks noch in den Punkten R und T trifft.

Da demnach die beiden Geraden A_1A_2 und RT in U, die Geraden A_1R und A_2T in einem Punkte von $\mathfrak{U}$ zusammenlaufen, so bringt die Folge der Spiegelungen $\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathfrak{U} & \mathfrak{U} \end{Bmatrix}$ den Punkt A_1 in dieselbe Lage A_2, wie eine projektive Schiebung mit dem Centrum U und der Spurebene $\mathfrak{U}$, in welcher dem Punkte R der Punkt T entspricht, das ist aber (nach 130. Umkehrung) die Schiebung, die durch Wiederholung derjenigen entsteht, welche dem Punkte R den Punkt S zuordnet, und U zum Centrum, $\mathfrak{U}$ zur Spurebene hat. Da dies für jedes Paar A_1, A_2 gilt, so folgt der

Satz. *Die Verwandtschaft* $\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathfrak{U} & \mathfrak{U} \end{Bmatrix}$ *entsteht durch Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung, welche dem Punkte R den Punkt S zuordnet und welche* $\mathfrak{U}$ *zur Spurebene und deren Schnittpunkt mit der Geraden RS zum Centrum hat.*

Zugleich folgt die

Umkehrung. *Jede projektive Schiebung mit der Spurebene* $\mathfrak{U}$, *in der einem Punkte* A_1 *der Punkt* A_2 *zugeordnet ist, lässt sich in zwei projektive Spiegelungen zerlegen, die die Spurebene zur gemeinsamen Spiegelebene haben.*

Von den Spiegelpunkten R und S der beiden Spiegelungen kann für den einen jeder beliebige Punkt des Raumes (ausserhalb $\mathfrak{U}$*) gewählt werden, während der andere so bestimmt werden muss, dass dem Punkte R der Punkt S in derjenigen projektiven Schiebung entspricht, deren Wiederholung die gegebene Schiebung ergiebt.*

Oder in anderer Fassung:

Zusatz I. *Sind eine Ebene* $\mathfrak{U}$ *und drei beliebige ausserhalb ihr gelegene Punkte Q, R, S gegeben, so ist dadurch eindeutig ein Punkt P so bestimmt, dass wird:*

$$\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathfrak{U} & \mathfrak{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q & P \\ \mathfrak{U} & \mathfrak{U} \end{Bmatrix}.$$

Hier entspricht nun dem Punkte R der Punkt S und dem Punkte Q der Punkt P in ein und derselben projektiven Schiebung, die $\mathfrak{U}$ zur Spurebene hat.

Aus der Gleichung folgt noch, dass für irgend drei Punkte Q, R, S und eine (nicht durch sie hindurch gehende) Ebene $\mathfrak{U}$ stets die Bedingung gilt

$$\left\{\begin{matrix} Q\,R\,S \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\}^2 = 1\,, \quad \left\{\begin{matrix} Q\,R\,S \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\} \neq 1\,.$$

Wir geben dem Satze noch eine weitere Fassung, die wichtigste von allen:

Zusatz II. *Die projektiven Spiegelungen, die eine gemeinsame Spiegelebene* $\mathfrak{U}$ *und alle mögliche (ausserhalb* $\mathfrak{U}$ *gelegenen) Punkte des Raumes zu Spiegelpunkten haben, bilden eine Spiegelschaar, die der Voraussetzung I. des XIII. Abschnittes genügt.*

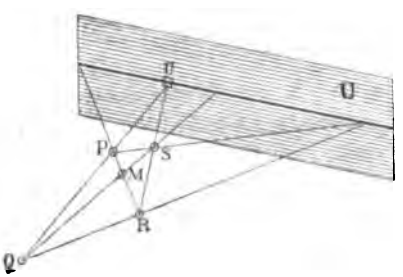
Aus dem Satze 114. folgt noch mit Rücksicht auf die Umkehrung des Satzes 133.:

Zusatz III. *Alle projektiven Schiebungen mit gemeinsamer Spurebene bilden eine Gruppe vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*

134. Die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} R\,S \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} Q\,P \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\}$$

lässt bei gegebenen Punkten Q, R, S den vierten Punkt P durch eine projektive Schiebung finden (133. Zusatz I.).



Diese Konstruktion lässt sich durch zweimaliges Auffinden harmonischer Punkte ersetzen. Bestimmt man nämlich einen Punkt M so, dass

$$\left\{\begin{matrix} Q\,M \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M\,S \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\}$$

wird, d. h. so, dass Q und S durch M und die Ebene $\mathfrak{U}$ harmonisch getrennt werden, so folgt aus dieser und der vorigen Gleichung (nach 119.):

$$\left\{\begin{matrix} R\,M \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M\,P \\ \mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \end{matrix}\right\},$$

d. h. P bestimmt sich als viertes harmonisches Element des Punktes R zum Punkte M und der Ebene $\mathfrak{U}$.

135. Spiegelt man einen Punkt O an $\left\{\begin{matrix} S_1 \\ U \end{matrix}\right\}$ nach S_2, S_1 an $\left\{\begin{matrix} S_2 \\ U \end{matrix}\right\}$ nach S_3, u. s. f., schliesslich $S_{\nu-2}$ an $\left\{\begin{matrix} S_{\nu-1} \\ U \end{matrix}\right\}$ nach S_ν, so erhält man (132.) die Gleichungen:

$$\left\{\begin{matrix} O\,S_1 \\ U\;U \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} S_1\,S_2 \\ U\;U \end{matrix}\right\} = \cdots = \left\{\begin{matrix} S_{\nu-2}\,S_{\nu-1} \\ U\;\;U \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} S_{\nu-1}\,S_\nu \\ U\;\;U \end{matrix}\right\}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\left\{\begin{matrix} O\,S_1 \\ U\;U \end{matrix}\right\}^\nu = \left\{\begin{matrix} O\,S_1\;S_1\,S_2\;\cdots\;S_{\nu-2}\,S_{\nu-1}\;S_{\nu-1}\,S_\nu \\ U\;U\;\;U\;U\;\;\;U\;\;U\;\;\;U\;\;U \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} O\,S_\nu \\ U\;U \end{matrix}\right\}.$$

Nach der Konstruktion bilden auf der Geraden OS_1 die Punkte O, S_1, S_2, $\cdots S_{\nu-1}$, S_ν eine harmonische Reihe mit demjenigen Punkte U als Grenzpunkt, in welchem die Gerade von der Ebene U getroffen wird. Gilt aber umgekehrt die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} O\,S_1 \\ U\;U \end{matrix}\right\}^\nu = \left\{\begin{matrix} O\,S_\nu \\ U\;U \end{matrix}\right\},$$

so muss eine harmonische Reihe von Punkten $O, S_1, S_2, \cdots$ auf der Geraden OS_1 existiren, in der der Punkt S_ν als ν^{ter} auf O folgt.

Sind nun die beiden Punkte O und S_ν beliebig ausserhalb der Ebene U gegeben, so ist durch den Punkt O als Anfangspunkt, S_ν als $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Punkt und durch den Schnittpunkt der Geraden OS_ν mit U als Grenzpunkt eine harmonische Reihe *eindeutig* bestimmt[1]). Und ist in ihr S_1 der erste auf O folgende Punkt, so gilt wieder die obige Gleichung.

Satz. *Sind ausserhalb der Ebene* U *zwei beliebige Punkte* O *und* S_ν *gegeben, so ist dadurch eindeutig ein Punkt* S_1 *bestimmt, derart, dass die Spiegelgleichung gilt*

$$\left\{\begin{matrix} O\,S_1 \\ U\;U \end{matrix}\right\}^\nu = \left\{\begin{matrix} O\,S_\nu \\ U\;U \end{matrix}\right\}.$$

---

1) Die Konstruktion von S_1 bei gegebenen O, S_ν und U ist, wie bekannt, ganz entsprechend der ν-Teilung einer Strecke auszuführen: Man ziehe durch O eine beliebige weitere Gerade (ausser OS_ν) und konstruire auf ihr eine beliebige harmonische Reihe mit dem Anfangspunkt O und dem Grenzpunkt in U. Ist $O, T_1, T_2, \cdots T_\nu$ diese Reihe, T_ν also der ν^{te} auf O folgende Punkt, so projicire man aus einem Punkte von U T_ν nach S_ν, dann projicirt sich T_1 nach S_1 und die ganze harmonische Reihe $O, T_1, \cdots T_\nu$ nach $O, S_1, \cdots S_\nu$. Aus dieser Konstruktion folgt auch die Eindeutigkeit des Punktes S_1.

Die Vergleichung dieses Satzes mit der Voraussetzung IIa. liefert den

Zusatz. *Die in Nr. 133, Zusatz II, bezeichnete Spiegelschaar genügt auch der Voraussetzung IIa. des XIII. Abschnittes.*

Daraus folgt, dass alle dort aus den Voraussetzungen I. und IIa. abgeleiteten Sätze ohne weiteres auf unsere Spiegelschaar übertragen werden dürfen.

136. Wir könnten die Sätze über die projektiven Schiebungen erster Art noch dual übertragen und würden so zu ihrer Darstellung aus zwei projektiven Spiegelungen mit gemeinsamen Centren kommen. Statt dessen wollen wir diese Darstellung aus der vorigen auf einem Wege ableiten, der noch auf eine Zerlegung in ganz anders geartete Spiegelungen führt.

Betrachten wir die projektive Schiebung

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix},$$

und legen wir durch die Punkte R und S zwei beliebige Ebenen R und S, deren Schnittgerade w_2 in U liegt, so wird, wenn man die Gerade RS mit w_1 bezeichnet, nach 81.

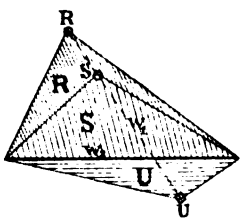
$$\begin{Bmatrix} R \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,w_1 \\ \mathsf{R}\,w_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1\,U \\ w_2\,\mathsf{S} \end{Bmatrix},$$

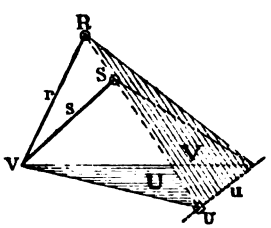
also

$$\begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,w_1\,w_1\,U \\ \mathsf{R}\,w_2\,w_2\,\mathsf{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U\,U \\ \mathsf{R}\,\mathsf{S} \end{Bmatrix},$$

oder wenn wir die Buchstaben oben und unten vertauschen,

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R\,S \\ \mathsf{U}\,\mathsf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathsf{R}\,\mathsf{S} \\ U\,U \end{Bmatrix}.$$





Legen wir andererseits durch die Punkte R und S zwei beliebige *Geraden* r und s, die sich in der Spurebene U im Punkte V treffen, und ferner in der Spurebene U durch das Centrum U eine beliebige Gerade u (die nicht durch V geht), so wird, falls

man die Ebene, die u und R und S enthält, mit $\mathbf{V}$ bezeichnet, nach 81.

$$\begin{Bmatrix} R \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & V \\ u & \mathbf{V} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V & s \\ \mathbf{V} & u \end{Bmatrix},$$

also

$$\begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & V & V & s \\ u & \mathbf{V} & \mathbf{V} & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix},$$

daher

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} R & S \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ U & U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Hier sind nicht nur R und S entsprechende Punkte der Schiebung, deren Wiederholung $\mathfrak{A}$ ergiebt, sondern (nach 129.) auch $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$ entsprechende Ebenen und r und s entsprechende Geraden dieser Verwandtschaft. Daraus folgt der

Satz. *Es giebt dreierlei Möglichkeiten, eine projektive Schiebung erster Art als Folge zweier projektiven Spiegelungen darzustellen. Man wähle für beide Spiegelungen ein gemeinsames Spiegelelement, und zwar entweder die Spurebene, oder das Centrum, oder eine Gerade, die in der ersten liegt und durch das zweite geht, und als weitere Elemente beider Spiegelungen im ersten Fall zwei Punkte, im zweiten zwei Ebenen, im dritten zwei Geraden, die einander in derjenigen projektiven Schiebung entsprechen, deren Wiederholung die gegebene Schiebung ergiebt.*

Da man auch von vornherein die Ebenen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$ und den Punkt U oder die beiden sich schneidenden Geraden r und s und die Gerade u annehmen kann, und dazu die übrigen Elemente hinzufügen, die den Satz ausmachen, so ergiebt sich die

Umkehrung. *Die Folge zweier projektiven Spiegelungen, die ein Spiegelelement gemein haben, und deren beide andere Spiegelelemente, falls sie Geraden sind, sich schneiden, ist eine projektive Schiebung erster Art.*

Ist das gemeinsame Spiegelelement eine Ebene, so ist sie die Spurebene der Schiebung, während die beiden anderen Spiegelelemente Punkte sind, deren Verbindungsgerade die Spurebene im Centrum trifft.

Ist das gemeinsame Spiegelelement ein Punkt, so ist er das Centrum der Schiebung, während die beiden anderen Spiegelelemente Ebenen sind, deren Schnittgerade mit dem Centrum durch die Spurebene verbunden wird.

Und ist das gemeinsame Spiegelelement eine Gerade, so sind die beiden anderen Spiegelelemente zwei sich schneidende Geraden, deren Ebene jene Gerade im Centrum trifft und deren Schnittpunkt mit jener Geraden durch die Spurebene verbunden wird.

137. Die für räumliche Systeme angestellten Betrachtungen gelten in naturgemässer Veränderung auch für *ebene Systeme* und für *Systeme auf der Geraden*. Statt der Spiegelungen an Punkt und Ebene hat man in der *Ebene* die Spiegelung an Punkt und Gerade zu setzen, während die Spiegelung am windschiefen Geradenpaar nichts entsprechendes hat. Ebenso bleibt in der *Geraden* die Spiegelung am Punktepaar für die den vorigen analogen Sätze als einzige Spiegelung übrig.

An Stelle der räumlichen projektiven Schiebung erster Art tritt in der *Ebene* als einzige Schiebung diejenige mit Spurgeraden und in ihr liegendem Centrum, während in der *Geraden* ein Punkt allein als ausgezeichnetes Element der Schiebung vorhanden ist und zugleich als Centrum, wie als Spurpunkt aufzufassen ist.

So gilt in der Geraden z. B. zwischen vier beliebigen Punkten Q, R, S und U die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} R\,S\,T \\ U\,U\,U \end{matrix}\right\}^2 = 1\,;$$

dies ist aber der in der in der Fussnote 2) Nr. 106a. erwähnte Satz.

B. Projektive Schiebungen zweiter Art.

138. Zu einer allgemeineren (ebenfalls kollinearen) Verwandtschaft gelangen wir, wenn wir, wie in Nr. 136, die Folge zweier Spiegelungen an Geradenpaaren mit einer Geraden als gemeinsamem Spiegelelement betrachten, jedoch ohne die Einschränkung, dass die beiden anderen Geraden sich treffen müssen.

Es seien jetzt also r, s und u drei beliebige Geraden, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass u von keiner der beiden anderen getroffen wird. Wir untersuchen dann die zweispiegelige Verwandtschaft

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{matrix} r\ s \\ u\ u \end{matrix}\right\}.$$

Legt man durch die Gerade u irgend eine Ebene, welche r und s in den Punkten R und S schneiden möge, so lässt sich die

Spiegelung $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ *für die Punkte dieser Ebene* ersetzen durch $\begin{Bmatrix} R \\ u \end{Bmatrix}$ (vgl. Nr. 79. 5) und ebenso $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ durch $\begin{Bmatrix} S \\ u \end{Bmatrix}$. Die Verwandtschaft $\begin{Bmatrix} R\,S \\ u\,u \end{Bmatrix}$ ist aber eine projektive Schiebung in dieser Ebene, man hat also den

Satz. *Die kollineare Verwandtschaft* $\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} r\,s \\ u\,u \end{Bmatrix}$ *führt jede durch die Gerade u gehende Ebene vermöge einer ebenen projektiven Schiebung in sich über, deren Spurgerade die Gerade u ist, und deren Centrum U aus u von derjenigen Geraden ausgeschnitten wird, welche die in jener Ebene liegenden Punkte von r und s verbindet.*

Wir nennen eine solche Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ eine *projektive Schiebung zweiter Art*[1]). Die Gerade u heisst ihre *Spurgerade.*

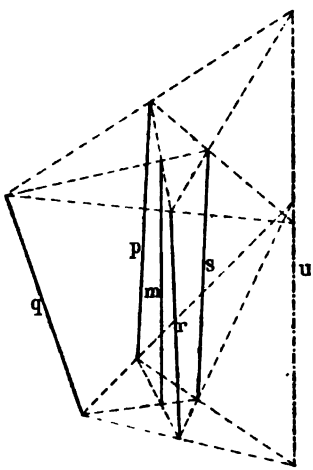
Diese Verwandtschaft bewirkt, dass jeder durch u gehenden Ebene ein bestimmter Punkt U der Spurgeraden als Centrum beigegeben ist, und umgekehrt, dass jedem Punkte U der Geraden u eine durch u gehende Ebene beigegeben ist, welche nämlich diejenige durch U gehende Gerade enthält, welche die Geraden r und s trifft. Es findet sich demnach in jeder solchen Ebene ein Strahlbüschel, dessen Centrum U in u liegt, und von dessen Strahlen ein jeder durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in sich nach dem Centrum (Spurpunkt) U hin geschoben wird.

139. Ist nun q irgend eine weitere Gerade, die von der Geraden u nicht getroffen wird, so giebt es eine und nur eine Gerade m derart, dass die Gerade s an $\begin{Bmatrix} m \\ u \end{Bmatrix}$ in q gespiegelt wird. Denn legt man durch u zwei Ebenen, die q und s in den Punkten Q_1 und S_1, und in Q_2 und S_2 treffen, so giebt es in jeder dieser Ebenen einen Punkt, M_1 in der einen, M_2 in der anderen, derart, dass in dem ebenen Systeme die Gleichungen gelten

$$\begin{Bmatrix} Q_1\,M_1 \\ u\;\;u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1\,S_1 \\ u\;\;u \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} Q_2\,M_2 \\ u\;\;u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_2\,S_2 \\ u\;\;u \end{Bmatrix}.$$

1) Die Erweiterung dieser Sätze auf Räume höherer Dimension, in denen entsprechend der vergrösserten Anzahl projektiver Spiegelungen auch mehr Arten von projektiven Schiebungen auftreten, unterliegt keiner Schwierigkeit. Man könnte in unserem Raum zwischen (1, 3)-Schiebungen und (2, 2)-Schiebungen unterscheiden. Ebenso im Raume ν^{ter} Stufe zwischen $(1, \nu-1)$-, $(2, \nu-2)$-, $(3, \nu-3)$-Schiebungen u. s. w.

Ist dann m die Gerade, die die beiden Punkte M_1 und M_2 verbindet, so werden (nach 79. 5) die Punkte Q_1 und Q_2 am Geradenpaar $\left\{\begin{matrix} m \\ u \end{matrix}\right\}$ in S_1 und S_2, also (da die Spiegelung eine kollineare Abbildung ist) die Gerade q in die Gerade s gespiegelt. Es gilt daher (Satz in 131.) die Gleichung



$$1) \qquad \left\{\begin{matrix} q\ m \\ u\ u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m\ s \\ u\ u \end{matrix}\right\}.$$

Spiegelt man die Gerade r an $\left\{\begin{matrix} m \\ u \end{matrix}\right\}$ nach p, so wird ebenso

$$2) \qquad \left\{\begin{matrix} r\ m \\ u\ u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m\ p \\ u\ u \end{matrix}\right\}.$$

Werden nun die vier Geraden p, q, r, s und die Gerade m von einer beliebigen durch u gehenden Ebene in den Punkten P, Q, R, S geschnitten, so gelten (nach 79. 5) in dieser Ebene die Gleichungen:

$$\left\{\begin{matrix} P\ M \\ u\ u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M\ R \\ u\ u \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix} S\ M \\ u\ u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M\ Q \\ u\ u \end{matrix}\right\}$$

und aus ihnen folgt nach Nr. 134 mit Rücksicht auf Nr. 137 die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} Q\ P \\ u\ u \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} R\ S \\ u\ u \end{matrix}\right\}.$$

Statt einen Punkt dieser Ebene an der Folge $\left\{\begin{matrix} Q\ P \\ u\ u \end{matrix}\right\}$ oder an der Folge $\left\{\begin{matrix} R\ S \\ u\ u \end{matrix}\right\}$ zu spiegeln, kann man ihn (wegen 79.5) an den Folgen von Geradenpaaren $\left\{\begin{matrix} q\ p \\ u\ u \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} r\ s \\ u\ u \end{matrix}\right\}$ spiegeln und beide Folgen ergeben wegen der letzten Gleichung dieselbe Endlage des Punktes. Da aber jeder Punkt in einer solchen Ebene liegt, so wird jeder Punkt des Raumes durch die Folge $\left\{\begin{matrix} q\ p \\ u\ u \end{matrix}\right\}$ in die-

selbe Endlage übergeführt, wie durch die Folge $\begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}$, d. h. es gilt allgemein die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Wir haben hierin die Gerade p durch zwei Spiegelungen je einer Geraden an einem Geradenpaar erhalten [Gleichungen 1) und 2)], und können daher den Satz aussprechen:

Satz. *Sind vier beliebige Geraden q, r, s und u gegeben, so dass die letzte von keiner der drei anderen geschnitten wird, und bestimmt man aus q, s und u eine Gerade m und aus r, m und u eine Gerade p, so dass sie den Gleichungen genügen*

$$\begin{Bmatrix} q & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & s \\ u & u \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} r & m \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m & p \\ u & u \end{Bmatrix},$$

so gilt zwischen den Geraden p, q, r, s und u die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Zusatz I. *Sind eine Gerade u und drei beliebige Geraden q, r, s, die die erste nicht schneiden, gegeben, so ist dadurch eindeutig eine Gerade p so bestimmt, dass wird:*

$$\begin{Bmatrix} q & p \\ u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}.$$

Oder:

Zusatz II. *Die projektiven Spiegelungen, die eine Gerade u als gemeinsames Spiegelelement und alle möglichen (u nicht schneidenden) Geraden als zweite Spiegelelemente haben, bilden eine Spiegelschaar, die der Voraussetzung I. des XIII. Abschnittes genügt.*

Zusatz III. *Die projektiven Schiebungen zweiter Art, die eine Gerade u als gemeinsames Spiegelelement haben, bilden eine Gruppe vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften.*

In diese Gruppe eingerechnet sind auch solche Verwandtschaften, bei denen sich die beiden Geraden r und s treffen, d. h. projektive Schiebungen erster Art, deren Centrum auf der Geraden u liegt, während ihre Spurebene durch sie hindurchgeht (vgl. Nr. 136.).

140. Da nach dem Beweisgange der vorigen Nummer Gleichungen, die für die Punkte zweier durch die Geraden gelegten Ebenen entsprechend gelten, sich zu einer Gleichung zwischen den Verbindungsgeraden jener Punkte verknüpfen lassen, so folgt, dass auf demselben Wege, den wir in der vorigen Nummer eingeschlagen haben, auch die übrigen für projektive Schiebungen der zwei Ebenen geltenden Sätze sich auf die Verbindungsgeraden übertragen lassen.

So erhalten wir noch die folgenden Ergebnisse.

Satz. *Sind zwei beliebige Geraden o und s_ν gegeben, die eine dritte Gerade u nicht treffen, so ist dadurch eindeutig eine Gerade s_1 bestimmt, derart dass die Gleichung gilt:*

$$\begin{Bmatrix} o\, s_1 \\ u\, u \end{Bmatrix}^\nu = \begin{Bmatrix} o\, s_\nu \\ u\, u \end{Bmatrix}.$$

Zusatz. *Die im vorigen (Nr. 139, Zusatz II.) bezeichnete Spiegelschaar genügt auch der Voraussetzung IIa. des XIII. Abschnittes.*

141. Bestimmt man die Gerade t so, dass die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{B} = \begin{Bmatrix} r\, s \\ u\, u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\, t \\ u\, u \end{Bmatrix},$$

so wird die Gerade r durch $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ in sich gespiegelt, durch $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ aber in Folge dieser Gleichung in t (132.); d. h. der Geraden r entspricht in der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ die Gerade t.

Daraus folgt jetzt aber, *dass eine Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ durch die Spurgerade u und ein Paar entsprechender Geraden, die u nicht treffen, eindeutig bestimmt ist.* Denn sind r und t diese Geraden und wird u an $\begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix}$ nach s' gespiegelt, so gilt die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} r\, s' \\ u\, u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s'\, t \\ u\, u \end{Bmatrix};$$

stellt man aber die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ so dar, dass r als erste Spiegelgerade gewählt, s als zweite dazu bestimmt wird, so muss die Gerade r, da sie durch die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ in t übergeführt werden soll und an $\begin{Bmatrix} r \\ u \end{Bmatrix}$ in sich gespiegelt wird,

an $\begin{Bmatrix} s \\ u \end{Bmatrix}$ in t gespiegelt werden, oder was dasselbe heisst, es muss u an $\begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix}$ in s gespiegelt werden, d. h. s mit s' identisch sein.

Dann folgt aber wiederum, dass die Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung zweiter Art, die der Geraden r die Gerade s zuordnet, die Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ ergiebt, d. h.:

Satz. *Die Verwandtschaft* $\begin{Bmatrix} r & s \\ u & u \end{Bmatrix}$ *entsteht durch Wiederholung derjenigen projektiven Schiebung zweiter Art, welche u zur Spurgeraden hat, und der Geraden r die Gerade s zuordnet.*

Und die

Umkehrung. *Jede projektive Schiebung zweiter Art mit der Spurgeraden u, welche einer Geraden a_1 eine Gerade a_2 zuordnet, lässt sich in zwei projektive Spiegelungen zerlegen, die die Spurgerade zum gemeinsamen Spiegelelement haben.*

Von den beiden anderen Spiegelelementen r und s kann für das eine jede beliebige (u nicht schneidende) Gerade des Raumes gewählt werden, während das andere so bestimmt werden muss, dass der Geraden r die Gerade s in derjenigen projektiven Schiebung entspricht, deren Wiederholung die gegebene ergiebt.

Polare Gebilde.

142. Durch den Nachweis, dass unsere Schaaren von Spiegelungen, die ein gemeinsames Spiegelelement besitzen, den Bedingungen I. und Ia. genügen, ist sofort die Anwendbarkeit aller Sätze, die aus diesen beiden Bedingungen gefolgert worden sind, auf diese Schaaren bewiesen. Insbesondere nehmen jetzt die Sätze der Nr. 120. die folgende Form an:

Nimmt man im Raume eine beliebige Ebene $\mathbf{U}$ *oder einen beliebigen Punkt U oder eine beliebige Gerade u an, und ausserdem eine Gruppe von ν Punkten $P_1, \ldots P_\nu$, die nicht in* $\mathbf{U}$ *liegen, oder eine Gruppe von ν Ebenen $\mathbf{P}_1, \ldots \mathbf{P}_\nu$, die nicht durch U gehen, oder eine Gruppe von ν Graden $p_1, \ldots p_\nu$, die nicht u schneiden, so ist dadurch eindeutig ein Punkt M, oder eine Ebene* $\mathbf{M}$ *oder eine Gerade m bestimmt, derart dass die Gleichungen gelten:*

$$\begin{Bmatrix} M & P_1 & M & P_2 & \dots & M & P_\nu \\ U & U & U & U & & U & U \end{Bmatrix} = 1, \qquad \text{oder}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{M} & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{M} & \mathbf{P}_\nu \\ U & U & U & U & & U & U \end{Bmatrix} = 1, \qquad \text{oder}$$

$$\begin{Bmatrix} m & p_1 & m & p_2 & \dots & m & p_\nu \\ u & u & u & u & \dots & u & u \end{Bmatrix} = 1.$$

Wählt man überdies einen beliebigen Punkt O, oder eine beliebige Ebene **O**, *oder eine beliebige Gerade o, so gelten die Gleichungen:*

$$\begin{Bmatrix} O & P_1 & O & P_2 & \dots & O & P_\nu \\ U & U & U & U & & U & U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O & M \\ U & U \end{Bmatrix}^\nu,$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{P}_\nu \\ U & U & U & U & & U & U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ U & U \end{Bmatrix}^\nu,$$

$$\begin{Bmatrix} o & p_1 & o & p_2 & & o & p_\nu \\ u & u & u & u & & u & u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} o & m \\ u & u \end{Bmatrix}^\nu.$$

Gelten umgekehrt diese Gleichungen für irgend ein Element O, **O**, o, so gelten sie für jedes andere Element O', **O'**, o' ebenfalls, und es gelten auch die ersten Gleichungen. Daraus ergiebt sich wegen der Willkürlichkeit für das Element O, **O**, o eine Menge von speciellen Verfahren, um die Elemente M, **M**, m zu finden, wie sie analog beim Aufsuchen des Schwerpunktes zu einem System von Punkten verwendet werden.

Der Punkt M heisst der *Pol der Ebene* **U**, die Ebene **M** *die Polare des Punktes* **U** in Bezug auf jene Punkt- und Ebenen-Gruppe, und ebenso können wir die Gerade m die *polare Axe der Geraden u* zu jener Gruppe von Geraden nennen. Dann folgt der

Satz. *Dreht sich eine Ebene um eine Gerade u und man sucht in jeder ihrer Lagen den Pol der Geraden u in Bezug auf die ν Schnittpunkte der Ebene mit ν festen Geraden des Raumes, so liegen diese Pole sämmtliche auf einer Geraden, nämlich der polaren Axe der Geraden u in Bezug auf die ν festen Geraden.*

C. Schraubungen um ein und dieselbe Axe.

143. **Satz.** *Die Umwendungen um alle Geraden, die ein und dieselbe Gerade a senkrecht treffen, bilden eine Spiegelschaar, die der Bedingung 1. genügt.*

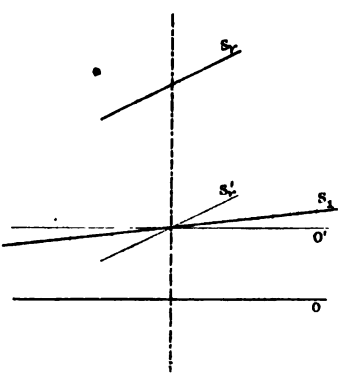
Dies ist nur ein anderer Ausdruck der in Nr. 10 bewiesenen Sätze. Da die Folge zweier solchen Umwendungen eine Schraubung um die Axe a ist (10. Satz), so ergiebt sich (nach 114.) der

Zusatz. *Die Gesammtheit der Schraubungen um ein und dieselbe Axe a bildet eine Gruppe zweispiegeliger vertauschbarer Verwandtschaften.*

114. Um das Verhalten unserer Spiegelschaar zu der Voraussetzung II. zu prüfen, haben wir die *ν-Teilung einer Schraubung* zu untersuchen; d. h. sind o und s_ν irgend zwei Geraden der Schaar, so ist eine Gerade s_1 so zu finden, dass die Gleichung gilt

II. $$\{o\, s_\nu\} = \{o\, s_1\}^\nu \qquad \text{oder}$$

$$\{o\, s_1\} = \{s_1\, s_2\} = \cdots = \{s_{\nu-2}\, s_{\nu-1}\} = \{s_{\nu-1}\, s_\nu\}.$$



Ist s_ν zu o parallel, also $\{o\, s_\nu\}$ eine Schiebung, so ist diejenige Gerade, welche zu beiden parallel ist und das zwischen ihnen gelegene Stück der Axe von o aus gerechnet ν-teilt, eine Lösung für s_1. Ist aber s_ν nicht parallel zu o, ein anderes Gemeinlot als a zwischen ihnen also nicht möglich, so muss jede Gerade, die o und s_1 senkrecht trifft, in Folge der letzten Gleichungen auch s_2, und dann auch s_3 u. s. w., endlich s_ν senkrecht treffen, d. h. das Gemeinlot a von o und s_ν ist auch das einzig mögliche Gemeinlot von o und s_1, daher gehört s_1 zu der Geradenschaar.

Ist überhaupt eine Gerade s_1 als Lösung denkbar, so hängt die Ein- oder Mehrdeutigkeit von dem Bestehen einer Gleichung ab (vergl. 125.)

$$\{s_1\, s_1'\}^\nu = 1$$

oder:

$$\{s_1\, s_1'\} = \{s_1'\, s_1''\} = \cdots = \{s_1^{(\nu-2)}\, s_1^{(\nu-1)}\} = \{s_1^{(\nu-1)}\, s_1\}.$$

Eine Schraubung oder Schiebung kann bei keiner Wiederholung die Identität ergeben, es kann daher $\{s_1\, s_1'\}$ nur eine Drehung sein, d. h. s_1 und s_1' müssen sich treffen. Wir sind daher auf die bekannte Aufgabe geführt, eine volle Umdrehung

in ν Teile zu zerlegen[1]), oder, da der Drehwinkel von $\{s_1\ s_1'\}$ der doppelte Winkel der Geraden s_1 s_1' ist (9. Satz), so erhalten wir eine Lösung für s_1', indem wir den gestreckten Winkel in ν gleiche Teile theilen und für s_1' den ersten dieser Teilstrahlen nehmen. Bei dieser Annahme wird s_1'' der zweite u. s. f., d. h.:

Die Geraden s_1, s_1', . . $s_1^{(\nu-1)}$ *bilden einen regelmässigen* ν*-Strahl.*

145. Es ist nur noch zu zeigen, dass es überhaupt einen Strahl s_1 giebt, der die Gleichung II. befriedigt.

Hierzu denke man sich die Gerade s_1 gefunden und durch ihren Fusspunkt eine Parallele o' zu o gelegt, dann wird

$$\{o\ s_\nu\} = \{o\ o'\ o'\ s_1\}^\nu$$

oder wegen der Vertauschbarkeit (114.)

$$= \{o\ o'\}^\nu\ \{o'\ s_1\}^\nu.$$

Hier ist $\{o\ o'\}$ und daher auch $\{o\ o'\}^\nu$ eine *Schiebung* längs der Axe a, $\{o'\ s_1\}$ und daher auch $\{o'\ s_1\}^\nu$ eine Drehung um diese Axe, d. h. die Schraubung $\{o\ s_\nu\}$ ist in ihre Schiebung und Drehung zerlegt. Zieht man daher die Gerade o'' parallel zu o durch den Fusspunkt von s_ν, und s_ν' parallel zu s_ν durch den Fusspunkt von o', so wird $\{o\ o''\}$ die Schiebung, $\{o'\ s_\nu'\}$ die Drehung der Schraubung $\{o\ s_\nu\}$, also

$$\{o\ o''\} = \{o\ o'\}^\nu \quad \text{und} \quad \{o'\ s_\nu'\} = \{o'\ s_1\}^\nu.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass das Stück der Axe zwischen o und o'' das ν-fache von dem zwischen o und o' beträgt, und bestimmt damit den *Fusspunkt* der Geraden s_1; die zweite Gleichung verlangt die ν*-Teilung einer Drehung*, führt also wieder auf eine bekannte, durch einen Grenzprocess zu lösende Aufgabe.

Damit ist auch das Vorhandensein einer Lösung dargethan und wir erhalten den

Satz. *Für die Gleichung* $\{o\ s_\nu\} = \{o\ s_1\}^\nu$ *giebt es innerhalb der Schaar von Geraden, die das Gemeinlot* a *der beiden Geraden* o *und* s_1 *senkrecht treffen,* ν *Lösungen, nämlich die* ν *Strahlen eines regelmässigen Strahlbüschels.*

---

1) Es braucht wohl kaum betont werden, dass die Lösung dieser Aufgabe auf ganz anderen Grundlagen beruht, wie sämmtliche Betrachtungen der Abschnitte A. und B.

Zusatz. *Die Umwendungen um alle Geraden, die ein und dieselbe Gerade a senkrecht treffen, genügen den Voraussetzungen I. und IIb. des XIII. Abschnittes.*

Mittlere Umwendaxen.

146. Und nun können wir in Anwendung des dort bewiesenen ohne weiteres Folgerungen ziehen. So erhalten wir z. B.:

Satz I. *Sind ν Geraden $p_1, p_2, \cdot\cdot p_\nu$ gegeben, die ein und dieselbe Gerade a senkrecht treffen, so giebt es stets einen regelmässigen ν-Strahl von Geraden $m', m'', \cdot\cdot m^{(\nu)}$ (Mittelaxen), für deren jede die Gleichung gilt*

$$\{p_1 m^{(i)} p_2 m^{(i)} \cdot\cdot p_\nu m^{(i)}\} = 1,$$

während für jedes beliebige weitere Lot o der Geraden a die Gleichung gilt

$$\{o\,p_1\,o\,p_2 \cdot\cdot o\,p_\nu\} = \{o\,m^{(i)}\}^\nu.$$

(Vergl. Nr. 120 und 126).

Satz II. *Statt der Folge von ν Schraubungen um dieselbe Axe, deren jede durch eine Anfangs- und Endumwendung gegeben ist, kann man auch eine einzige Schraubung ν-mal hintereinander ausführen, deren Anfangs-(End-)umwendung eine der Mittelaxen der gegebenen Anfangs-(End-)umwendaxen ist.*

Also

$$\{p_1 q_1 p_2 q_2 \cdot\cdot p_\nu q_\nu\} = \{m^{(i)} n^{(k)}\}^\nu,$$

wo $m^{(i)}$ irgend eine der ν Mittellinien von $p_1, p_2, \cdot\cdot p_\nu$ und $n^{(k)}$ eine der ν Mittellinien von $q_1, q_2, \cdot\cdot q_\nu$ ist. (Vergl. Nr. 121 und 126).

Schlussbemerkung.

147. Hiermit will ich diese Reihe von Aufsätzen beschliessen. Dass die abstrakte Lehre[1]) von den geometrischen Verwandtschaften aus dem Begriffe der Spiegelung vielfachen Nutzen zu ziehen vermag, ist wie ich hoffe hinreichend hervorgetreten, wenn ich auch wichtige Abschnitte dieser Lehre bis jetzt nur

---

1) Diese Lehre setzt keinerlei geometrische Kenntnisse voraus, sondern ist (vgl. Nr. 33. und die Fussnote am Schluss von Nr. 93.) formal aus Definitionen abgeleitet.

wenig oder gar nicht berühren konnte. So wäre noch manches über die harmonischen Verwandtschaften[1]), sowie über mehrspiegelige Verwandtschaften zu sagen, dessen Veröffentlichung ich nun auf eine andere Gelegenheit verschiebe. Ausser der abstrakten Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, die sich Selbstzweck sein kann, sind von nicht geringer Wichtigkeit die *geometrischen Anwendungen*, und von ihnen habe ich hier nur so viel mitgetheilt, als nötig war, um die Bedeutung der allgemeinen Sätze in's rechte Licht zu stellen. Wenn wir einerseits an wichtigen Beispielen zeigen konnten, dass die allgemeine Lehre der aus Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften das Band ist, das verschiedene Zweige der Geometrie verknüpft, so ist andererseits der Wunsch gerechtfertigt, jeden einzelnen dieser Zweige für sich zu betrachten[2]), und aus solchen Einzeldarstellungen muss sich ja dann wieder neuer Stoff für die Weiterentwickelung der allgemeinen Theorie ergeben. So kommen Theorie und Anwendung in die natürliche Wechselbeziehung, aus denen beide den grössten Nutzen schöpfen.

Das Auffinden neuer Sätze und das tiefere Eindringen in die Grundlagen sind die beiden Richtungen, nach denen das Einzelgebiet durch die allgemeine Theorie gefördert wird. Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie waren für mich die Veranlassung, der Theorie der Spiegelungen meine Aufmerksamkeit zuzuwenden, nach dieser Richtung hin hätte ich daher zunächst die Folgerungen aus der hiermit beschlossenen Reihe von Arbeiten zu ziehen.

1) Hierher gehören die Betrachtungen des V. Abschnittes.

2) In neuester Zeit hat Th. Reye die Lehre von den projektiven Verwandtschaften in dieser Hinsicht sehr gefördert, indem er in der 3. Auflage des 2. und 3. Bandes seiner »Geometrie der Lage« (Leipzig 1892) das Rechnen mit Verwandtschaften als wesentliche Methode aufgenommen und schöne Untersuchungen damit durchgeführt hat. Man vergleiche auch Th. Reye's neueste Abhandlung: »*Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften*«, Math. Ann. XLIII. S. 145 bis 170.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Abhandlung (13. 1. 1890.).

Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen. Nr. 1—11.

Nr.

I. **Die Umwendung als elementare Bewegung** . . . . . 2—5
II. **Die Folge zweier Umwendungen** . . . . . 6—10
III. **Die Zusammensetzung zweier Schraubungen** 11

Zweite Abhandlung (3. 3. 1890.).

Zur Theorie der Umwendungen. Nr. 12—28.

IV. **Die Ueberführung eines Systems aus einer Lage in eine beliebige andere**[1]. . . . . 12—21
V. **Die Ueberführung einer Geraden in eine andere** . . . . . 22—28

Dritte Abhandlung (7. 7. 1890.).

Ueber geometrische Analysen. Nr. 29—50.

VI. **Das Rechnen mit Verwandtschaften** . . . . . 29—39
A. Erklärungen[2]. 33
B. Das associative Gesetz 34
C. Verbindung und Umformung der Gleichungen[2] . . . 35
D. Die Ueberführung von Verwandtschaften . . . . . 36—38
E. Vertauschbarkeit von Verwandtschaften 39
VII. **Das Rechnen mit involutorischen Verwandtschaften** . . . 40—48
A. Erklärung 41
B. Folgerungen des associativen Gesetzes 42
C. Umformung der Gleichungen 43
D. Die Ueberführung und die harmonischen Verwandtschaften . . . . . 44—46
E. Vertauschbarkeit . . . . . 47—48
VIII. **Klassen und Gruppen von Verwandtschaften, deren jede eine Folge von involutorischen Verwandtschaften ist** . . 49—50
Beispiele: Punktspiegelungen und daraus gebildete Gruppen 49

Vierte Abhandlung (3. 8. 1891.).

Ueber geometrische Analysen, Fortsetzung. Nr. 51—85.

IX. **Ueber Gruppen, die ausser der Identität nur involutorische Verwandtschaften enthalten** . . . . . 51—85
A. Allgemeine Theorie . . . . . 52—64
B. Anwendungen. . . . . 65—85
α) Spiegelungen an Punkten, Geraden und Ebenen . . 65—77
β) Projektive Spiegelungen . . . . . 78—85

1) Hierzu vergleiche man auch Nr. 94b.
2) Hierzu vergleiche man die Fussnote am Schlusse von Nr. 93.

Fünfte Abhandlung (7. 12. 1891.).

Ueber die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften. Nr. 86—106.

Nr.

X. Ueber geometrische Uebertragungssätze . . . . . 86—94

Einschub I. . . . . . 89—90

A. Sätze über Projektivitäten in der Geraden (Nr. 89a bis l).

A'. Sätze über Bewegungen starrer räumlicher Systeme. (Nr. 90a' bis l').

XI. Ueber Verwandtschaften, die sich als Folgen zweier Spiegelungen darstellen lassen . . . . . 95—106

Beispiele: 1) Wann gelten für drei Umwendaxen die Beziehungen $\{rst\}^2 = 1$, $\{rst\} \neq 1$? 102

2) Wann sind zwei Bewegungen vertauschbar? . . . 105

Einschub II. Involutionen eines Büschels.

Konstruktion entsprechender Punkte einer Projektivität mittelst einer endlichen Anzahl von Konstruktionen harmonischer Punkte (Nr. 106a bis f).

Sechste Abhandlung (31. 7. 1893.).

Ueber Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften. Nr. 107—147.

XII. Der Uebergang von Streckengleichungen zu Gleichungen zwischen Punktspiegelungen . . . . . 107—108

Beispiele 108

XIII. Formale Ableitung der Sätze über Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften . . . . . 109—126

Voraussetzung I. . . . . 111—116

Voraussetzung II a. . . . . 117—121

Voraussetzung II b. . . . . 122—126

XIV. Geometrische Anwendungen . . . . . 127—146

(Gruppen von projektiven Schiebungen und von Schraubungen. Polare Gebilde zu einer Gruppe von Punkten, von Ebenen, von windschiefen Geraden und von Umwendaxen.)

A. Projektive Schiebungen erster Art . . . . . 128—137

B. Projektive Schiebungen zweiter Art . . . . . 138—141

Polare Gebilde 142

C. Schraubungen um ein und dieselbe Axe . . . . . 143—146

Mittlere Umwendaxen 146

Schlussbemerkung 147

INHALT.

Seite

Otto Staude, Ueber die Bahncurven eines in einem Raume von drei Dimensionen beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen. Vorgelegt von Herrn ENGEL 511

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. III. . 523

E. Naetsch, Ueber eine gewisse Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art integriren lassen. Vorgelegt von Herrn M. KRAUSE 538

H. Wiener, Ueber Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften. VI. Vorgelegt von Herrn ENGEL. Mit 17 Figuren 555

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LIBRARY

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

VII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1894.

Einzelpreis: 1 Mark.

SITZUNG VOM 16. OCTOBER 1893.

W. Ostwald, *Ueber das Princip des ausgezeichneten Falles.*

Die allgemeinsten Gesetze, welche bisher für das Geschehen der natürlichen Dinge aufgstellt worden sind, beziehen sich auf die Umwandlung der betheiligten Energieen, und sind als erster und zweiter Hauptsatz der Energetik bekannt. Der erste Hauptsatz regelt, kurz gesagt, die Bilanz: *wenn* etwas geschieht, so muss die verschwundene Energie gleich der entstandenen sein. Ob aber etwas geschieht, und was, darüber sagt der erste Hauptsatz nichts aus.

Der zweite Hauptsatz besagt, dass Energie nur von höherer zu niederer Intensität gehen kann, und bestimmt demnach in dem Falle, dass es nur *einen* Weg (nebst dem entgegengesetzten) giebt, den das Gebilde gehen könnte, welche von beiden Möglichkeiten eintritt, oder in welcher Richtung der Vorgang erfolgt. Es genügt demnach in dem Falle der zwangläufigen (oder der mit nur einem Freiheitsgrade ausgestatteten) Gebilde zur Entscheidung der Frage, was geschehen wird, wenn die Bedingungen, d. h. die Arten der Energie und ihre räumliche Anordnung gegeben sind. Es ist zu bemerken, dass hierbei die Frage nach der *Zeit*, in welcher sich die fragliche Aenderung vollzieht, nur in dem Falle beantwortet wird, dass eine der massgebenden Energiearten die *Bewegungsenergie* ist, welche die Zeit in ihrer Definition enthält. Bei den anderen Energiearten, von denen keine einen Zeitfactor enthält, wird durch den zweiten Hauptsatz nur der Sinn, nicht aber die Geschwindigkeit des Vorganges bestimmt.

Hat das betrachtete Gebilde aber mehrere Grade der Freiheit, so reicht auch der zweite Hauptsatz nicht aus, um aus den gegebenen Bedingungen eindeutig zu bestimmen, was eintreten wird. Die Zahl der Aenderungen, welche dem ersten Hauptsatz genügen, ist alsdann unendlich gross; von diesen pflegt allerdings meist nur ein Theil gleichzeitig dem zweiten Hauptsatz zu entsprechen, aber auch für diesen Bruchtheil ist die Zahl der möglichen Fälle unendlich. Da unter diesen unendlich vielen *möglichen* Fällen doch nur ein *wirklicher* vorhanden ist, so muss neben den beiden Hauptsätzen offenbar noch ein weiteres Princip bestehen, welches diesen zu bestimmen gestattet.

Denkt man sich nun sämmtliche nach den beiden Hauptsätzen möglichen Fälle derartig graphisch aufgetragen, dass die Maasszahl der Grösse, nach welcher gefragt wird, als Ordinate dient, als Abscisse dagegen eine Veränderliche, durch deren Aenderung die Gesammtzahl der Möglichkeiten erschöpft wird, so wird die zugehörige Curve im Allgemeinen für irgend einen Werth der zweiten Veränderlichen ein Maximum oder Minimum zeigen. Erfahrungsmässig entsprechen nun die wirklich eintretenden Fälle stets den Werthen der Veränderlichen, für welche diese Maxima oder Minima auftreten. Dies ist der gesuchte Satz. Nennen wir den Werth der bestimmenden Veränderlichen, welcher ein Maximum oder Minimum ergiebt, den *ausgezeichneten Fall*, so lässt sich das fragliche Princip folgendermassen aussprechen:

Sind für irgend einen Vorgang unendlich viele Möglichkeiten vorhanden, so ist das wirklich eintretende Geschehniss der ausgezeichnete Fall unter den möglichen Fällen.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass dieser Satz im engsten Zusammenhange mit dem zuerst von Maupertuis in ungenügender Gestalt aufgestellten Satze von der kleinsten Action, dem Gauss'schen Princip des kleinsten Zwanges, dem Hamilton-schen Princip, den Sätzen von Euler, Lagrange, Jacobi u. A. über das Auftreten von Maximalwerthen der Bewegungsenergie bei den durch Impulse hervorgerufenen Bewegungen u. s. w. steht. In der That ist er als eine Zusammenfassung und Verallgemeinerung aller dieser Sätze aufzufassen, welche zunächst für mechanische Vorgänge aufgestellt worden sind, indem sie die Maximum- oder Minimumbedingung (d. h. das Verschwinden

der Variation) für gewisse, je nach den Aufgaben geeignet gewählte Functionen der Veränderlichen aussprechen. In derselben Weise, in welcher vor zwei Jahren das Princip der virtuellen Energieänderungen als Erweiterung des mechanischen Princips der virtuellen »Geschwindigkeiten« auf alle Energieformen formulirt wurde, lässt sich das in jenen mechanischen Gesetzen zur Geltung gelangende Princip des ausgezeichneten Falles auf Geschehnisse beliebiger, nicht nur mechanischer Natur erweitern. Thatsächlich sind solche Erweiterungen auf das elektrodynamische Gebiet bereits durch v. Helmholtz und Boltzmann ausgeführt worden, doch dürfte die oben versuchte möglichst allgemeine Formulirung des Satzes immerhin einiges selbständige Interesse beanspruchen.

Auch nach einer Seite, die ausserhalb des Gebietes der Physik (im allgemeinsten Sinne) liegt, scheint mir das Princip des ausgezeichneten Falles eine brauchbare Zusammenfassung thatsächlicher Verhältnisse zu sein. Wie erwähnt gilt es für Gebilde mit mehr als einem Grade der »Freiheit«. Die Benutzung dieses dem Seelenleben entnommenen Wortes legt Zeugniss davon ab, dass hier eine Analogie zwischen physischen und psychischen Vorgängen empfunden worden ist; in dem Lichte des ausgesprochenen Satzes tritt diese Analogie oder Uebereinstimmung deutlich hervor. Denn man darf sagen, dass auch bei jeder willkürlichen oder Wahlhandlung die Entscheidung auf den »ausgezeichneten Fall« führen wird, d. h. auf den Fall, welcher in Bezug auf die vorhandene Willensbeschaffenheit ein Maximum von Erfolg verspricht. Auf diese Weise beantwortet sich wenigstens theilweise die viel erörterte Frage, wie die thatsächliche Bestimmtheit der Naturerscheinungen, welcher auch die psychologischen Vorgänge unterliegen müssen, sich mit dem unzweifelhaft vorhandenen Bewusstsein eines »freien Willens« vereinigen lasse; doch kommen hier noch weitere Punkte in Betracht, deren Erörterung an anderer Stelle erfolgen soll.

Was nun die physikalischen Anwendungen des Principes des ausgezeichneten Falles anlangt, so sind viele von ihnen wohlbekannte Beispiele der Maximum- und Minimumrechnung. Die Frage, wie in der kürzesten Zeit eine von einem Punkte ausgehende allseitige Bewegung zu einem entfernten anderen gelangt, führt im Falle der ungehinderten Bewegung zur geradlinigen Verbindung, im Falle, dass ein Punkt einer Fläche

berührt werden muss, zum Spiegelungsgesetz und im Falle, dass der zweite Punkt in einem Mittel mit anderer Fortpflanzungsgeschwindigkeit liegt, zu dem Brechungsgesetz und man erhält auf diese Weise die Grundgesetze der geometrischen Optik. Aus dem von Maxwell bewiesenen Satze, dass wenn in einem Leiternetz die durch gegebene elektromotorische Kräfte hervorgerufenen Ströme sich nach dem Ohm'schen Gesetz vertheilen, die Wärmeentwicklung ein Minimum wird, geht umgekehrt hervor, dass die Bedingung, die Wärmeentwicklung solle dem ausgezeichneten Falle entsprechen, d. h. ein Minimum sein (ein Maximum ist physikalisch unmöglich), zum Ohm'schen Gesetz führt.

Eine besonders beachtenswerthe Anwendung findet das Princip auf die Frage nach der »Richtung der Kräfte«. Betrachten wir der Anschauung wegen den Fall der Gravitation, so wissen wir, dass die entsprechende Energie in horizontalen Flächen constant ist. Da die Kraft der Differentialquotient der Distanzenergie nach einer Strecke ist, so ist für jede Richtung irgend einer Bewegung die entsprechende Kraft angebbar; positiv für jede Bewegung unter die Niveaufläche, Null für jede Bewegung in derselben, negativ für jede Hebung. Zufolge der beiden Hauptsätze der Energetik wäre eine Senkung nach jeder beliebigen Richtung möglich, Horizontalbewegung und Hebung dagegen ausgeschlossen. Die thatsächliche Bewegung unter den unendlich vielen möglichen erfolgt der Kraft gemäss, welche den ausgezeichneten Fall unter allen möglichen darstellt. Das Maximum des Differentialquotienten der Energie nach dem Raum findet für die Richtung statt. welche zur Niveaufläche senkrecht steht, und dies ist dann auch die Richtung der wirklichen Kraft, oder vielmehr der wirklichen Bewegung.

Eine gewisse Schwierigkeit in der Anwendung des Princips liegt in der Frage, welches in jedem Falle die charakteristische Grösse ist, deren Variation verschwinden soll. Wenn auch in sehr vielen Fällen die Antwort sich aus der Beschaffenheit des Problems ergiebt, so muss doch zugegeben werden, dass zweifelhafte Fälle möglich sind. Eine allgemeingültige Antwort weiss ich nicht zu geben. Doch wird in dieser Beziehung der Hinweis von Werth sein, dass im Allgemeinen in jedem Falle mehrere Grössen vorhanden sein werden, welche Functionen von einander sind, und bei demselben Werthe der anderen Veränderlichen gleichzeitig ausgezeichnete Werthe annehmen

werden [1]). Alsdann erhält man offenbar das gleiche Resultat, welche von diesen Grössen man auch zur Ableitung benutzt. Was die andere Veränderliche anlangt, so hat sie keine andere Bedingung zu erfüllen, als dass durch ihre Aenderung alle mögliche Fällen erschöpfend dargestellt werden; im Uebrigen ist ihre Wahl vollkommen frei.

1) So wird z. B. die Lage eines ausgezeichneten Werthes einer beliebigen Function f nicht verändert, wenn man aus ihr die Functionen $f+c$, cf, f^c und ${}^c\log f$ bildet, wo c eine beliebige Constante ist.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Dreissigste Abhandlung.

Ueber den Wärmewerth der aliphatischen Säuren

von

F. Stohmann, Cl. Kleber, H. Langbein und P. Offenhauer.

A. Einbasische gesättigte Säuren.

Wir haben bereits im Jahre 1885 (Abh. IV[1]) den Wärmewerth einer grösseren Zahl der einbasischen aliphatischen Säuren durch Verbrennung der Silbersalze derselben mit Kaliumchlorat ermittelt. Dabei ergab sich eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung zwischen den von uns bestimmten und den später von Longuinine[2]) gefundenen Werthen, wie in Abh. XIV[3]) gezeigt worden ist. Trotz dieser Uebereinstimmung mussten aber Zweifel in die völlige Richtigkeit jener Beobachtungen aus mehreren Gründen in uns erwachen, und zwar:

1) weil wir durch unsere neueren Untersuchungen erkannt haben, dass die sämmtlichen nach der Kaliumchloratmethode ermittelten Werthe, in Folge der Einführung von nicht ganz richtigen Constanten, um etwa 2 Proc. zu tief liegen;

2) weil neue, mit der Berthelot'schen Bombe ausgeführte Bestimmungen des Werthes der Laurin- und Myristinsäure um 1,5 Proc. höhere Werthe gegen früher ergaben (Abh. XXII[4]);

3) weil jene Untersuchungen für den Zuwachs von CH_2 in der homologen Reihe eine mittlere Erhöhung des Wärmewerthes

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], XXXII, 407.
2) Annales de Chimie et de Physique [6] XI, 220.
3) Journ. f. prakt. Chem. [2], XXXVI, 139.
4) Journ. f. prakt. Chem. [2], XXXXII, 374.

von 154,3 Cal. ergeben haben, während nach unseren neueren Bestimmungen (Abh. XXV[1]) eine Vermehrung des Wärmewerthes von 156,6 Cal. für jedes Glied der Reihe, mit der Essigsäure beginnend und mit der Behensäure endigend, zu erwarten war;

4) weil inzwischen von Berthelot[2]) neue Bestimmungen des Werthes der Ameisensäure und der Essigsäure ausgeführt worden sind, welche so genau mit den von Jahn[3]) auf ganz anderem Wege gefundenen Zahlen übereinstimmen, dass an der Richtigkeit derselben nicht zu zweifeln ist, während die früher ermittelten Werthe ebenfalls kleine Abweichungen zeigen.

Alles dieses veranlasste uns, die Untersuchung von Neuem aufzunehmen, um zu genauen Werthen zu kommen.

Unsere Verbrennungen wurden, so weit sie hier in Betracht kommen, mit einer Ausnahme, in dem Berthelot'schen Apparate, immer in auf 25 Atm. comprimirtem Sauerstoff ausgeführt. Ausser der Berthelot'schen Bombe verfügen wir seit etwa Jahresfrist noch über den von Mahler construirten, gleichen Zwecken dienenden Apparat. Der Mahler'sche Apparat[4]), von seinem Erfinder für technische Zwecke bestimmt, gestattet, wie wir uns durch hunderte von Versuchen überzeugt haben, ebenso genaue Messungen, wie die Berthelot'sche Bombe und kann dieselbe bei den exactesten wissenschaftlichen Untersuchungen völlig ersetzen. Da derselbe in vorzüglichster Ausführung zu dem verhältnissmässig billigen Preise von 450 fr. von dem Mechaniker L. Golaz in Paris (Rue St. Jacques 282) geliefert wird, so ist den Forschern, welche nicht in der Lage sind sich den Berthelot'schen Apparat zu verschaffen, damit ein Instrument gegeben, mit dessen Hilfe die Ausführung derjenigen thermochemischen Messungen, bei welchen man bis dahin ausschliesslich auf die Bombe angewiesen war, ermöglicht wird. Der Mahler'sche Apparat unterscheidet sich im Wesentlichen von dem Berthelot'schen nur dadurch, dass er an seiner Innenfläche mit einem Emailüberzuge versehen ist, wodurch das Eisen ebenso gut vor der Verbrennung und vor dem Angriffe der Säuren bewahrt bleibt, wie dieses

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], XXXXIV, 394.

2) Annal. de Chimie et de Physique [6] XXVIII, 137; Compt. rend. CXIV, 1148.

3) Annal. der Physik. [2], XXXVII, 444, 480.

4) Contribution à l'étude des combustibles. Paris, Librairie polytechnique Baudry et Comp. 1893.

durch das dicke Platinfutter jenes Apparates, mit mehr als 1200 Grm. Platin, geschieht.

Mahler giebt seinem Apparate einen Innenraum von 652 ccm Grösse. Da ein so grosses Volum aber nur für gewisse Zwecke erforderlich ist, während man im Uebrigen mit einem etwa halb so grossen Apparate vollständig ausreicht, so haben wir den für uns bestimmten entsprechend verkleinern lassen. Der Apparat, mit welchem wir arbeiten, hat einen Fassungsraum von 342 ccm und ist daher noch etwas grösser als unsere Bombe, welche ein Volumen von 294 ccm hat. Mit der Vergrösserung des Apparates vermehrt sich die Masse desselben in entsprechendem Verhältnisse, damit steigert sich der Wasserwerth und damit wieder die Grösse der dafür in Rechnung zu setzenden Zahl. Ausserdem muss das Calorimetergefäss in seiner Grösse dem Volum des Verbrennungsapparates angepasst werden. Da nun unser Berthelot-scher Apparat in seinen Abmessungen sich als sehr zweckentsprechend erwiesen hat, so zogen wir es vor, den Mahler'schen Apparat in ähnlicher Grösse ausführen zu lassen.

Erste Bedingung für die Sicherung der Resultate ist die genaue Kenntniss des Wasserwerthes des Apparates mit seinem Zubehöre. Da dieser für jeden einzelnen Apparat ermittelt werden muss, so glauben wir Denen, die künftig ähnliche Untersuchungen vornehmen wollen, einen Dienst zu erweisen, wenn wir hier die Einzelheiten unserer Bestimmungen anführen.

Ermittelung des Wasserwerthes des Apparates.

Als wir vor sechs Jahren in Besitz der Berthelot'schen Bombe kamen, waren wir darauf angewiesen, den Wärmewerth derselben nach der Mischungsmethode zu bestimmen. Die zu diesem Zwecke ausgeführten, höchst mühevollen Operationen, welche unsere Arbeitskraft für reichlich ein halbes Jahr in Anspruch nahmen, sind in Abh. XVI[1]) beschrieben. Ein so umständliches Verfahren waren wir gezwungen anzuwenden, weil wir damals nicht über Substanzen von genügend genau bekanntem Wärmewerthe verfügten, durch deren Verbrennung wir eine bestimmte Menge von Wärme auf den Apparat übertragen konnten. Gegenwärtig liegt eine genügend grosse Zahl

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXIX, 503.

von Substanzen vor, deren Wärmewerth aus übereinstimmenden Untersuchungen von Berthelot und uns mit aller Sicherheit bekannt ist. Wir brauchen daher nur eine bekannte Menge eines solchen Körpers im Apparate zu verbrennen und die dadurch hervorgerufene Temperaturzunahme zu messen.

Es sei W die im Apparate durch die Verbrennung einer bekannten Substanzmenge erzeugte Wärme.

Es sei ferner δ die dadurch bewirkte Temperaturzunahme des Apparates sammt seiner Wasserfüllung.

Dann entspricht $\frac{W}{\delta}$ der Zahl von Calorien, welche dem Apparate, sammt der Wasserfüllung, zugeführt werden muss, um denselben um 1° C. zu erwärmen. Das ist aber sein Wasserwerth. Der Wasserwerth des leeren Apparates ist demnach $\frac{W}{\delta} - Aq$, worin Aq die bekannte Menge von Wasser, welche sich in dem Calorimetergefässe findet.

Wir haben z. B. in einem Versuche durch Verbrennung von 1,0143 Grm. Hippursäure eine Wärmemenge von 5749,3 cal. erzeugt. Dazu kommen noch 14,6 cal. als Verbrennungswärme des Eisendrahtes, dessen wir uns zur Zündung der Substanz bedienen, sowie 19,6 cal. als Bildungswärme der bei der Verbrennung entstandenen Salpetersäure. (Vgl. Journ. prakt. Chem. [2], XXXIX, 522.) Wir haben daher:

Substanz	5749,3 cal.
Eisen	14,6 »
Salpetersäure	19,6 »
	$W = 5783{,}5$ cal.

Die wirkliche Temperaturzunahme betrug 2,0441°. Es ist demnach der Wasserwerth des Apparates W_a mit der Wasserfüllung:

$$W_a = \frac{W}{\delta} = \frac{5783{,}5}{2{,}0441} = 2829{,}4 \text{ Grm.}$$

Die in das Calorimetergefäss eingewogene Menge von Wasser betrug 2391,0 Grm. und darnach ist der Wasserwerth des leeren Calorimeters 2829,4 — 2391,0 = 438,4 Grm.

Der grosse Vortheil dieser Methode beruht darin, dass der Wasserwerth des ganzen Apparates mit all seinem Zubehöre in

einer Operation ermittelt wird und zwar unter Bedingungen, welche völlig den Umständen entsprechen, unter denen die späteren Operationen ausgeführt werden. Selbstverständlich hängt dabei Alles von der genauen Kenntniss des Wärmewerthes der angewandten Substanz ab, da die geringste Unrichtigkeit in erhöhtem Maasse in der Restzahl, in dem Wasserwerthe, zum Ausdrucke kommt. Um in dieser Beziehung sicher zu gehen, sollte man Reihen von Beobachtungen mit mindestens zwei verschiedenen Substanzen ausführen. Wir haben mit vier verschiedenen Substanzen, mit Hippursäure, Campher, Benzoësäure und Rohrzucker, also mit Stoffen, deren Wärmewerthe weit auseinander liegen, gearbeitet. Da wir in allen Fällen Uebereinstimmung im Wasserwerthe fanden, so ist damit der Beweis geführt, dass einerseits der Wasserwerth richtig ermittelt ist, und dass ferner die Wärmewerthe sämmtlicher Substanzen genau richtig sind.

Die Wärmewerthe der von uns verwandten Substanzen betragen nach unseren und nach Berthelot's Ermittelungen für ein Gramm bei constantem Volum:

	Stohmann cal.	Berthelot cal.
Hippursäure	5668,2	5659,3
Campher	9291,6	9288,0
Rohrzucker	3955,2	3961,7
Benzoësäure	6322,3	6322,1

Wir haben den folgenden Berechnungen die von uns ermittelten Werthe zu Grunde gelegt.

Uebersicht der Bestimmungen des Wasserwerthes des Calorimeters.

Nr.	Substanz	Im Calorimeter producirte Wärme: Aus der Substanz cal.	Aus verbranntem Eisen cal.	Aus gebildeter Salpetersäure cal.	Im Ganzen W cal.	Temperaturzunahme δ ° C.	$\frac{W}{\delta}$ cal.	Wasserfüllung Aq Grm.	$\frac{W}{\delta} - Aq$ Grm.
1.	1,0143 Grm. Hippursäure	5749,3	14,6	19,6	5783,5	2,0441	2829,4	2391,0	438,4
2.	0,9537 » »	5405,8	14,6	18,3	5438,7	1,9230	2828,2	2391,0	437,2
3.	0,9469 » »	5367,2	14,6	17,4	5399,2	1,9084	2829,2	2391,0	438,2
4.	0,9302 » Campher	8643,0	14,6	21,8	8679,4	3,0673	2829,6	2391,0	438,6
5.	0,9408 » »	8741,5	7,3	21,4	8770,2	3,1020	2827,3	2391,0	436,3
6.	0,9354 » »	8691,4	7,3	21,6	8720,3	3,0865	2825,2	2391,0	434,2
7.	0,9997 » Rohrzucker	3954,0	7,3	11,5	3972,8	1,4048	2828,0	2391,0	437,0
8.	1,1128 » »	4401,3	7,3	12,0	4420,6	1,5639	2826,6	2391,0	435,6
9.	1,0966 » Benzoësäure	6933,0	7,3	14,3	6954,6	2,4623	2824,4	2391,0	433,4
10.	1,0585 » »	6692,2	7,3	15,4	6714,9	2,3730	2829,7	2391,0	438,7
11.	0,9830 » »	6214,8	7,3	15,0	6237,1	2,2052	2828,3	2391,0	437,3

Bei einer gleichmässigen Füllung des Apparates mit 2391 Grm. Wasser schwanken daher die Ermittelungen des Wasserwerthes des gefüllten Apparates innerhalb der Extreme von 2824,4 Grm. als Minimum bis zu 2829,7 Grm. als Maximum, während die eingeführten Wärmemengen sich innerhalb der Grenzwerthe von 3972,8 bis zu 8770,2 cal. bewegen. Wir haben daher eine Uebereinstimmung der Resultate, welche nicht grösser gedacht werden könnte. Auf Grund dieser Bestimmungen nehmen wir das sich ergebende Mittel

436,8 Grm.

als Wasserwerth des leeren Apparates an.

Um mit runden Zahlen rechnen zu können, bringen wir bei allen Bestimmungen 2363,2 Grm. Wasser in das Calorimetergefäss. Es ist demnach der Wasserwerth des ganzen Apparates:

Wasser	2363,2 Grm.
Apparat	436,8 »
Wasserwerth	2800,0 Grm.

Um eine weitere Controle zu haben, verfahren wir häufig so, dass mit derselben Substanz Verbrennungen im Berthelot'schen und im Mahler'schen Apparate ausgeführt werden. Bei Uebereinstimmung der Zahlen haben wir die Sicherheit, dass der Wasserwerth beider Apparate richtig bestimmt ist. Um ein beliebiges Beispiel unter vielen herauszugreifen, so ergab der Salicylsäure-Guajacolester pro Gramm:

im Berthelot'schen Apparate	6508,3 cal.
	6520,0 »
im Mahler'schen Apparate	6522,0 »
	6517,7 »

Da der erstere einen Wasserwerth von 2500 cal. hat, während der des letzteren 2800 cal. beträgt, so wäre eine solche Uebereinstimmung nicht möglich, wenn der eine oder der andere mit einem Fehler behaftet wäre.

Vergleiche auch bei Arachinsäure unten Seite 623.

Endlich haben wir den Wasserwerth des ganzen Apparates noch aus der specifischen Wärme seiner Bestandtheile berechnet. Bei unseren früheren Untersuchungen[1]) hat sich völlige Uebereinstimmung zwischen den nach dieser Methode ermittel-

1) Journ. prakt. Chem. [2] XXXIX, 532.

ten und den direct, nach der Mischungsmethode, gefundenen Werthen ergeben. Wir hatten damals die specifische Wärme des zur Anfertigung des Apparates verwandten Gussstahles selbst bestimmt und zu 0,10968 gefunden. Als wir diese Zahl in unsere jetzige Rechnung einsetzten, fanden wir für den Wasserwerth des Apparates 447,1 cal. Diese Differenz gegen die obigen Bestimmungen musste unser Befremden erregen. Auf unsere Anfrage erklärte uns der Verfertiger, dass zu den Mahler'schen Apparaten jetzt nicht mehr Gussstahl, sondern weiches Eisen, fer doux, also wohl Schmiedeeisen, verwandt wird. Es erschien uns kaum der Mühe werth, noch einmal die specifische Wärme dieser Eisensorte selbst zu ermitteln. Nimmt man dafür den von Pettersson und Hodelius[1]) gefundenen Werth mit 0,108079, so ergiebt sich für unseren Apparat ein Wasserwerth von 442,1 cal., der sich also dem gefundenen sehr nähert. Da dieser Werth mit einer aus der Unkenntniss der wahren specifischen Wärme des angewandten Eisens hervorgehenden Unsicherheit behaftet ist, so können wir ihn nur als Näherungswerth betrachten.

Experimenteller Theil.

Um die Wärmewerthe der hier in Betracht kommenden Stoffe bei gleichem Aggregatzustande vergleichen zu können, haben wir, nachdem wir die Säuren in ihrem natürlichen Zustande verbrannt hatten, die ganze Reihe der Zahlen unter Berücksichtigung der Schmelzwärme einmal für den festen und einmal für den flüssigen Zustand berechnet. Als Grundlage hierfür dienten folgende Ermittelungen der Schmelzwärme:

Ameisensäure	58,44	cal.	pro	Gramm	(Pettersson)[2])
Essigsäure	43,66	»	»	»	» [3])
»	46,52	»	»	»	(de Visser)[4])
Laurinsäure	43,69	»	»	»	(Stohmann u. Wilsing)[5])
Myristinsäure	47,48	»	»	»	»

1) Landolt & Börnstein, Tabellen, 2. Aufl. S. 318.
2) Journ. prakt. Chem. [2] XXIV, 298.
3) Daselbst [2] XXIV, 300.
4) Zeitschr. phys. Chem. IX, 767.
5) Journ. f. prakt. Chem. [2] XXXII, 92.

Diese Zahlen zeigen, dass die Schmelzwärmen von der Essigsäure bis zur Myristinsäure, wenn dieselben auf die Gewichtseinheit bezogen werden, wesentlich gleich sind, während die Ameisensäure eine Ausnahmestellung einnimmt. Von der Essigsäure anfangend, nehmen wir daher für die ganze Reihe eine gleiche Schmelzwärme, dem Mittel vorstehender Zahlen entsprechend, von 45,34 cal. pro Gramm an.

1. Ameisensäure CH_2O_2 . . . . . 46.

Berthelot[1]) giebt nach seinen neuesten Ermittelungen folgende Wärmewerthe für flüssige Ameisensäure:

62,0 Cal. für constantes Volum
61,7 » » constanten Druck.

Da Jahn[2]) durch Elektrolyse der Ameisensäure einen fast gleichen Werth, 62,9 Cal. für constanten Druck gefunden hatte, so kann Berthelot's Zahl als richtig betrachtet werden. Es ist demnach der Wärmewerth bei constantem Druck für

flüssige Ameisensäure 61,7 Cal.
feste » 59,0 »

Bildungswärme der flüssigen Ameisensäure 101,3 Cal.
» » festen » 101,0 »

2. Essigsäure $C_2H_4O_2$ . . . . . 60.

Aus gleichem Grunde wie oben, nehmen wir auch hier Berthelot's[3]) Zahl an:

flüssige Essigsäure . . .	3491,1	cal. pro	Grm.	für	const.	Volum
» » . . .	209,4	Cal. »	»	Mol.	»	»
» » . . .	209,4	» »	»	»	»	Druck
feste » . . .	206,7	» »	»	»	»	»
Bildungswärme d. flüssig. Essigsäure	116,6	» »	»	»	»	»
Bildungswärme d. festen Essigsäure	119,3	» »	»	»	»	»

3. Propionsäure $C_3H_6O_2$ . . . . . 74.

Zur Reindarstellung dieser, wie vieler der folgenden Säuren

1) Ann. Chim. Phys. [6] XXVIII, 137.
2) Ann. Physik [2] XXXVII, 414.
3) Compt. rend. CXIV, 1148.

wandten wir das Verfahren von Conrad und Gutzeit[1]) an, nach welchem alkylsubstituirte Malonsäuren durch vorsichtiges Erwärmen in die um CO_2 ärmeren Säuren verwandelt werden. Da die entsprechenden Malonsäuren verhältnissmässig leicht rein zu erhalten sind, so erwies sich dieses Verfahren als sehr zweckdienlich. Bewirkt man die Zersetzung der anhaltend getrockneten Säuren im luftleeren Raume, so beginnt die Entwickelung der Kohlensäure bereits bei einer Temperatur von 130° und ist oft schon bei 140° beendet, ohne dass irgend welche secundäre Reaction dabei einträte. Die völlige Entwässerung der Malonsäuren ist jedoch äusserst schwierig, wenigstens enthielten die daraus dargestellten einbasischen Säuren meist noch Spuren von Wasser, von denen sie jedoch durch geringe Mengen von Phosphorsäureanhydrid, mit denen sie in der Kälte einige Stunden zusammengelassen wurden, leicht getrennt werden konnten. Die entwässerten Säuren wurden klar von der Phosphorsäure abgegossen und dann meist im luftverdünnten Raume destillirt, wobei sie mit ganz scharfem Siedepunkte übergingen.

Da die flüssigen Säuren äusserst hygroskopisch sind, so wurden sie unmittelbar nach der Darstellung verbrannt und inzwischen im Exsiccator über Schwefelsäure verwahrt.

Die aus Methylmalonsäure dargestellte Propionsäure hatte einen Siedepunkt von 140,0°. Bei allen Siedepunktsbestimmungen verwenden wir verkürzte Thermometer, bei denen sich der Quecksilberfaden ganz im Dampfe befindet.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für Fe cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,2575	20,1437	17,6321	2,5116	2500	6279,0	14,6	19,3
2.	0,9773	18,7997	16,8494	1,9503	2500	4875,7	14,6	18,0

1) Ann. Chem. CCIV, 127.

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6245,1	4966,3	367,5	100,11
2.	4843,1	4955,6	366,7	99,89
	Mittel	4960,9	367,1	für flüssige Propionsäure bei constant. Volum
			367,4	» » » » » Druck
			364,0	» feste » » » »
			121,6	Bildungswärme der flüssigen Propionsäure
			125,0	» » festen »

4. Normale Buttersäure $C_4H_8O_2$ . . . . . 88.

Erhalten durch Erhitzen von Aethylmalonsäure auf 150 bis 160°. Das Destillat wurde mit Phosphorsäuranhydrid entwässert und im Vacuum destillirt. Siedepunkt constant bei 65° bei 12 mm Druck.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth. W_a Grm.	$(\vartheta_n - \vartheta_1)\ W$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,1700	19,2443	16,4429	2,8014	2500	7003,5	14,6	17,8
2.	1,0568	18,1426	15,6145	2,5281	2500	6320,25	14,6	17,9
3.	1,0346	19,0694	16,5937	2,4757	2500	6189,25	14,6	18,2

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6971,1	5958,2	524,3	100,09
2.	6287,75	5949,8	523,6	99,95
3.	6156,45	5950,5	523,6	99,96
	Mittel	5952,8	523,8	für flüssige Buttersäure bei constant. Volum
			524,4	» » » » » Druck
			520,4	» feste » » » »
			127,6	Bildungswärme der flüssigen Buttersäure
			131,6	» » festen »

5. Normale Valeriansäure $C_5H_{10}O_2$ . . . . 102.

Erhalten durch Erwärmen von Propylmalonsäure auf 150° bei 300 mm Druck. Destillat mit Phosphorsäuranhydrid entwässert. Siedepunkt unter Atmosphärendruck bei 184°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	0,9860	18,7933	16,1475	2,6458	2500	6614,5	14,6	19,2
2.	1,0853	19,8623	16,9495	2,9128	2500	7282,0	14,6	21,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6580,7	6674,1	680,8	99,98
2.	7246,3	6676,8	681,0	100,02
	Mittel 6675,4		680,9	für flüssige Valeriansäure bei constant. Volum
			681,8	» » » » » Druck
			677,2	» feste » » » »
			133,2	» Bildungswärme der flüssigen Valerians.
			137,8	» » » festen »

6. Capronsäure, Isobutylessigsäure $C_6H_{12}O_2$. 116.

Präparat von KAHLBAUM, zweimal rectificirt. Siedepunkt constant bei 200,0° unter Atmosphärendruck.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,0440	20,5394	17,5125	3,0269	2500	7567,25	14,6	22,0
2.	1,0315	21,2426	18,2558	2,9868	2500	7467,0	14,6	19,4

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7530,65	7213,3	836,7	100,05
2.	7433,0	7206,0	835,9	99,95
	Mittel	7209,7	836,3	für flüssige Capronsäure bei constant. Volum
			837,5	» » » » » Druck
			832,2	» feste » » » »
			140,5	Bildungswärme der flüssigen Capronsäure
			145,8	» » festen »

7. Capronsäure, Diaethylessigsäure $C_6H_{12}O_2$. 116.

Dargestellt aus Diaethylmalonsäure. Siedepunkt 190° bei Atmosphärendruck.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,0349	18,5372	15,5360	3,0012	2500	7503,0	14,6	24,0
2.	1,0240	21,0188	18,0534	2,9654	2500	7413,5	14,6	18,7

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7464,4	7212,7	836,7	100,04
2.	7380,2	7207,2	836,0	99,96
	Mittel	7210,0	836,4	für flüssige Diaethylessigsäure b. const. Volum
			837,6	» » » » » Druck
			832,3	» feste » » » »
			140,4	Bildungswärme der flüss. Diaethylessigsäure
			145,7	» » festen »

8. Heptylsäure, Aethylpropylessigsäure $C_7H_{14}O_2$ 130.

Dargestellt durch Erwärmen der Aethylpropylmalonsäure. Siedepunkt unter Atmosphärendruck bei 209,0°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	1,0115	19,3795	16,2751	3,1044	2500	7761,0	14,6	18,1
2.	0,9780	21,1564	18,1547	3,0017	2500	7504,25	14,6	18,4

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7728,3	7640,4	993,3	100,01
2.	7471,25	7639,3	993,1	99,99

Mittel 7639,9 993,2 für flüssige Heptylsäure bei constant. Volum
994,7 » » » » » Druck
988,8 » feste » » » »
146,3 Bildungswärme der flüssigen Heptylsäure
152,2 » » festen »

9. Octylsäure, Dipropylessigsäure $C_8H_{16}O_2$. 144.

Dargestellt durch Erhitzen von Dipropylmalonsäure auf 150 bis 180°. Siedepunkt 225° bei einem Druck von 748 mm.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	1,0387	20,3013	16,9654	3,3356	2500	8339,0	14,6	26,4
2.	1,0007	20,0431	16,8319	3,2112	2500	8028,0	14,6	23,6

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	8298,0	7988,0	1150,4	100,02
2.	7989,8	7984,2	1149,7	99,98
	Mittel	7986,5	1150,1	für flüssige Octylsäure bei constant. Volum
			1151,5	» » » » » Druck
			1145,0	» feste » » » »
			152,5	Bildungswärme der flüssigen Octylsäure
			159,0	» » festen »

10. Nonylsäure, Heptylessigsäure $C_9H_{18}O_2$. 158.

Heptylmalonsäure wurde bei einem Drucke von 300 mm auf 150 bis 160° erwärmt, das Destillat mit Phosphorsäuranhydrid entwässert und im Vacuum rectificirt. Siedepunkt 137° bei 12 mm Druck; erstarrt zu einer bei 12,5° schmelzenden Krystallmasse.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,2842	18,8289	14,5608	4,2681	2500	10670,25	14,6	27,4
2.	1,0597	18,7696	15,2483	3,5213	2500	8803,25	14,6	23,4
3.	1,0384	18,2579	14,8061	3,4518	2500	8629,5	14,6	18,6

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	10628,25	8276,2	1307,6	100,01
2.	8765,25	8271,4	1306,9	99,95
3.	8596,3	8278,4	1308,0	100,04
	Mittel	8275,3	1307,5	für flüssige Nonylsäure bei constant. Volum
			1309,5	» » » » » Druck
			1302,3	» feste » » » »
			157,5	Bildungswärme der flüssigen Nonylsäure
			164,7	» » festen »

11. Normale Caprinsäure $C_{10}H_{20}O_2$. . . 172.

Erhalten durch Erwärmen von normaler Octylmalonsäure auf 150° im Vacuum. Siedepunkt 200° bei 10 mm Druck. Schmelzpunkt bei eingesenktem Thermometer 31,3°.

Bestimmung des Wärmewerthes der festen Säure.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_e Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_e$ cal.	Correction für Fe cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	0,7317	18,6547	16,1653	2,4894	2500	6223,5	14,6	18,4
2.	0,9720	20,7097	17,4001	3,3096	2500	8274,0	14,6	27,5

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6190,5	8460,4	1455,2	99,95
2.	8231,9	8469,0	1456,7	100,05

Mittel 8464,7 1455,9 für feste Caprinsäure bei constant. Volum
1458,3 » » » » » Druck
1466,1 » flüssige » » » »
171,7 Bildungswärme der festen Caprinsäure
163,9 » » flüssigen »

12. Undecylsäure $C_{11}H_{22}O_2$. . . . . 186.

Dargestellt nach dem Verfahren von Krafft[1]). Undecylensäure wurde mit Jodwasserstoffsäure vom Siedepunkt 127° und rothem Phosphor im geschlossenen Rohre einen Tag lang auf 200° erhitzt und die Säure durch Destillation im Vacuum und durch mehrfache Krystallisation aus Ligroin im Kältegemisch gereinigt. Blättrige Krystalle, Schmelzpunkt 28°.

1) Ber. chem. Ges. XI, 2219.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	0,9083	17,4200	14,2605	3,1595	2500	7898,8	9,1	14,0
2.	0,8824	16,8787	13,8058	3,0729	2500	7682,3	9,1	18,8
3.	0,8889	16,6026	13,5076	3,0950	2500	7737,5	9,1	16,2

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7875,7	8670,8	1612,8	99,97
2.	7654,4	8674,5	1613,5	100,01
3.	7712,2	8676,1	1613,8	100,02

Mittel 8673,8 1613,3 für feste Undecylsäure bei constant. Volum
1615,9 » » » » » Druck
1624,3 » flüssige » » » »
177,1 Bildungswärme der festen Undecylsäure
168,7 » » flüssigen »

13. Laurinsäure $C_{12}H_{24}O_2$ . . . . . 200.

Wärmewerth nach unseren neuen Bestimmungen (Abhandlung XXII[1]).

pro Grm. 8844,4 cal. feste Säure bei const. Volum
» Grm. Mol. 1768,9 Cal. » » » » »
» » » 1771,8 » » » » » Druck
» » » 1780,9 » flüssige » » » »
» » » 184,2 » Bildungswärme der festen Säure
» » » 175,1 » » » flüssigen »

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 373.

14. Myristinsäure $C_{14}H_{28}O_2$ . . . . . 228.

Wärmewerth nach unseren neuen Bestimmungen[1]).

pro Grm. 9133,5 cal. feste Säure bei const. Volum
» Grm. Mol. 2082,4 Cal. » » » » »
» » » 2085,9 » » » » » Druck
» » » 2096,2 » flüssige » » » »
» » » 196,1 » Bildungswärme der festen Säure
» » » 185,8 » » » flüssigen »

15. Palmitinsäure $C_{16}H_{32}O_2$ . . . . . 256.

Dargestellt aus Wallrath nach dem Verfahren von Heintz. Die Rohsäure wurde mit Methylalkohol und Schwefelsäure in den Methylester übergeführt und dieser sorgfältig im Vacuum fractionirt. Die aus dem constant siedenden Ester durch Spaltung mit alkoholischem Kalihydrat abgeschiedene Säure wurde aus Alkohol mehrfach unkrystallisirt. Lange filzige Nadeln, Schmelzpunkt 61°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n(corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	0,9816	17,3344	13,6530	3,6814	2500	9203,5	9,1	13,4
2.	0,9324	17,4357	13,9391	3,4966	2500	8741,5	9,1	12,1
3.	0,9231	16,8801	13,4170	3,4631	2500	8657,8	9,1	14,8

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	9181,0	9353,1	2394,4	100,00
2.	8720,3	9352,5	2394,2	100,00
3.	8633,9	9353,2	2394,4	100,00
	Mittel 9352,9		2394,3	für feste Palmitinsäure bei constant. Volum
			2398,4	» » » » » Druck
			2410,0	» flüssige » » » »
			209,6	Bildungswärme der festen Palmitinsäure
			198,0	» » flüssigen »

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 373.

16. Stearinsäure $C_{18}H_{36}O_2$ . . . . . 284.

Dargestellt aus Cetylmalonsäure durch langsames Erwärmen bis auf 160° bei einem Drucke von 300 mm. Das Rohproduct schmolz zwischen 66° und 69°. Es wurde mehrfach aus verdünntem Weingeist unkrystallisirt. In reinem Zustande lag der Schmelzpunkt der Säure bei 69,2°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	1,0493	18,9413	14,9278	4,0135	2500	10033,75	14,6	23,4
2.	0,7117	19,1816	16,4687	2,7229	2500	6807,25	14,6	11,4
3.	0,7615	18,7997	15,8801	2,9196	2500	7299,0	14,6	21,4

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	9998,6 [1]	9528,8	2706,2	99,97
2.	6782,06 [2]	9529,4	2706,4	99,97
3.	7263,0	9537,7	2708,7	100,06
Mittel		9532,0	2707,1	für feste Stearinsäure bei constant. Volum
			2711,8	» » » » » Druck
			2724,7	» flüssige » » » »
			222,2	Bildungswärme der festen Stearinsäure
			209,3	» » flüssigen »

Arachinsäure $C_{20}H_{40}O_2$ . . . . . 312.

Die Arachinsäure wurde nach dem von Fitz [3]) angegebenen Verfahren dargestellt. Erucasaures Kalium wurde mit Kalihydrat

1) Bei der Verbrennung war 0,00035 Grm. Russ abgeschieden, welcher mit 2,85 cal. in Rechnung gestellt ist.

2) Bei der Verbrennung war 0,0004 Grm. Russ abgeschieden, welcher mit 0,81 cal. in Rechnung gestellt ist.

3) Ber. chem. Ges. IV, 444, 946.

möglichst vorsichtig erhitzt, bis die dabei entstehende bröcklige Masse, ohne zu verkohlen, sich zu färben begann. Nach dem Lösen in Wasser wurde mit Salzsäure zersetzt und die abgeschiedene Säure mehrfach aus Weingeist krystallisirt, bis der Schmelzpunkt unverändert blieb. Die aus mässig verdünntem Weingeist beim raschen Erkalten abgeschiedene Säure bildete feine verfilzte Nadeln. Schmelzpunkt 75°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

Bei den Bestimmungen 1 und 2 wurde der Apparat von MAHLER, bei 3 und 4 der von BERTHELOT verwandt.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,0833	18,9918	15,2363	3,7555	2800	10515,4	10,9	26,0
2.	0.8804	17,9724	14,9170	3,0554	2800	8555,1	10,9	22,0
3.	0,7565	18,6362	15,6914	2,9448	2500	7362,0	10,9	20,5
4.	0,6940	18,4737	15,7732	2,7005	2500	6751,2	10,9	19,5

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	10478,5	9672,3	3017,7	99,91
2.	8522,2	9679,9	3020,1	99,98
3.	7330,6	9690,1	3023,3	100,09
4.	6720,8	9683,4	3021,2	100,02
	Mittel 9681,4		3020,6	für feste Arachinsäure bei constant. Volum
			3025,8	» » » » » Druck
			3039,9	» flüssige » » » »
			234,2	Bildungswärme der festen Arachinsäure
			220,1	» » flüssigen »

Behensäure $C_{22}H_{44}O_2$ . . . . . 340.

Wärmewerth nach unseren Bestimmungen (Abhdg. XXII[1]).

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 379.

pro Grm. 9801,4 cal. für feste Säure bei const. Volum
» Grm. Mol. 3332,5 Cal. » » » » » »
» » 3338,3 » » » » » » Druck
» » 3353,7 » » flüssige » » » »
» » 247,7 » Bildungswärme der festen Säure
» » 232,3 » » » flüssigen »

Uebersicht der einbasischen Säuren.

Sämmtlich fest.

		Mol.-Gew.	Wärmewerth Cal.	Bildungswärme Cal.
Ameisensäure	$C\ H_2\ O_2$	46	59,0	104,0
Essigsäure	$C_2\ H_4\ O_2$	60	206,7	119,3
Propionsäure	$C_3\ H_6\ O_2$	74	364,0	125,0
Norm. Buttersäure . . .	$C_4\ H_8\ O_2$	88	520,4	131,6
Norm. Valeriansäure . .	$C_5\ H_{10}O_2$	102	677,2	137,8
Isobutylessigsäure . . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	832,2	145,8
Diaethylessigsäure . . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	832,3	145,7
Aethylpropylessigsäure	$C_7\ H_{14}O_2$	130	988,8	152,2
Dipropylessigsäure . . .	$C_8\ H_{16}O_2$	144	1145,0	159,0
Heptylessigsäure	$C_9\ H_{18}O_2$	158	1302,3	164,7
Norm. Caprinsäure . . .	$C_{10}H_{20}O_2$	172	1458,3	171,7
Undecylsäure	$C_{11}H_{22}O_2$	186	1615,9	177,1
Laurinsäure	$C_{12}H_{24}O_2$	200	1771,8	184,2
Myristinsäure	$C_{14}H_{28}O_2$	228	2085,9	196,1
Palmitinsäure	$C_{16}H_{32}O_2$	256	2398,4	209,6
Stearinsäure	$C_{18}H_{36}O_2$	284	2711,8	222,2
Arachinsäure	$C_{20}H_{40}O_2$	312	3025,8	234,2
Behensäure	$C_{22}H_{44}O_2$	340	3338,3	247,7

Uebersicht der einbasischen Säuren.

Sämmtlich flüssig.

		Mol.-Gew.	Wärmewerth Cal.	Bildungswärme Cal.
Ameisensäure	$C\ H_2\ O_2$	46	61,7	101,3
Essigsäure	$C_2\ H_4\ O_2$	60	209,4	116,6
Propionsäure	$C_3\ H_6\ O_2$	74	367,4	121,6
Norm. Buttersäure . .	$C_4\ H_8\ O_2$	88	524,4	127,6
Norm. Valeriansäure .	$C_5\ H_{10}O_2$	102	681,8	133,2
Isobutylessigsäure . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	837,5	140,5
Diaethylessigsäure . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	837,6	140,4
Aethylpropylessigsäure	$C_7\ H_{14}O_2$	130	994,7	146,3
Dipropylessigsäure . .	$C_8\ H_{16}O_2$	144	1151,5	152,5
Heptylessigsäure . . .	$C_9\ H_{18}O_2$	158	1309,5	157,5
Norm. Caprinsäure . .	$C_{10}H_{20}O_2$	172	1466,1	163,9
Undecylsäure	$C_{11}H_{22}O_2$	186	1624,3	168,7
Laurinsäure	$C_{12}H_{24}O_2$	200	1780,9	175,1
Myristinsäure	$C_{14}H_{28}O_2$	228	2096,2	185,8
Palmitinsäure	$C_{16}H_{32}O_2$	256	2410,0	198,0
Stearinsäure.	$C_{18}H_{36}O_2$	284	2724,7	209,3
Arachinsäure	$C_{20}H_{40}O_2$	312	3039,9	220,1
Behensäure	$C_{22}H_{44}O_2$	340	3353,7	232,3

Abgeleitete Resultate.

Homologie.

Die einzelnen Säuren lassen sich auf ihren Homologiewerth nur prüfen, wenn sie in gleichem Aggregatzustande mit einander verglichen werden. Ob sie dabei im festen oder im flüssigen Zustande verglichen werden, bleibt sich zur Entscheidung der Frage, ob wesentliche Verschiedenheiten durch den Zuwachs der Atomgruppe CH_2 herbeigeführt werden, gleich. Wir haben in folgender Tabelle die sämmtlichen untersuchten Säuren im festen Zustande zusammengestellt und die Differenzen von je zwei aufeinander folgenden Glieder gezogen.

		Mol.-Gew.	Wärmewerth Cal.	Differenzen Cal.
Ameisensäure	$C\ H_2\ O_2$	46	59,0	
Essigsäure	$C_2\ H_4\ O_2$	60	206,7	147,7
Propionsäure	$C_3\ H_6\ O_2$	74	364,0	157,3
Norm. Buttersäure . .	$C_4\ H_8\ O_2$	88	520,4	156,4
Norm. Valeriansäure .	$C_5\ H_{10}O_2$	102	677,2	156,8
Isobutylessigsäure . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	832,2	155,0
Diaethylessigsäure . .	$C_6\ H_{12}O_2$	116	832,3	155,1
Aethylpropylessigsäure	$C_7\ H_{14}O_2$	130	988,8	156,5
Dipropylessigsäure . .	$C_8\ H_{16}O_2$	144	1145,0	156,2
Heptylessigsäure . . .	$C_9\ H_{18}O_2$	158	1302,3	157,3
Norm. Caprinsäure . .	$C_{10}H_{20}O_2$	172	1458,3	156,0
Undecylsäure . . .	$C_{11}H_{22}O_2$	186	1615,9	157,6
Laurinsäure . . .	$C_{12}H_{24}O_2$	200	1771,8	155,9
Myristinsäure	$C_{14}H_{28}O_2$	228	2085,9	157,0×2
Palmitinsäure . . .	$C_{16}H_{32}O_2$	256	2398,4	156,2×2
Stearinsäure	$C_{18}H_{36}O_2$	284	2711,8	156,7×2
Arachinsäure	$C_{20}H_{40}O_2$	312	3025,8	157,0×2
Behensäure	$C_{22}H_{44}O_2$	340	3338,3	156,3×2

Sieht man vorläufig von der Ameisensäure ab und überblickt man die Reihe der Differenzen, so ergiebt sich eine bemerkenswerthe Gleichartigkeit derselben. Die gleichen Werthe, welche sich bei den Anfangsgliedern finden, kommen auch bei den höchsten Gliedern der Reihe vor, und in der ganzen Reihe sind die Differenzen so wenig von einander abweichend, dass die vorkommenden kleinen Abweichungen innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler liegen.

Da wir in dieser Reihe sowohl normale wie secundäre Säuren haben, so müssten sich Abweichungen der Differenzen zeigen, wenn die Isomeren sich in ihrem Wärmewerthe wesentlich verschieden verhielten. Dies ist jedoch nicht der Fall und wir müssen daher zu dem Schlusse kommen:

> die isomeren einbasischen gesättigten Säuren der aliphatischen Reihe sind in ihren Wärmewerthen wesentlich gleich.

Damit soll jedoch nicht gesagt sein, dass sie absolut gleich seien. Es mögen vielmehr kleine Differenzen vorkommen, die aber so unbedeutend sind, dass es bislang nicht möglich ist, einen

Zahlenausdruck dafür zu finden. Die einbasischen Säuren verhalten sich daher in Bezug auf ihre Isomerie gänzlich verschieden von den zweibasischen Säuren. Während bei ersteren unter den Isomeren keine Verschiedenheiten nachweisbar sind, verhalten sich die isomeren alkylsubstituirten Malonsäuren gänzlich verschieden von den ihnen isomeren Derivaten der Bernsteinsäure und von den ihnen isomeren normalen zweibasischen Säuren, wie sich schon aus unserer Abhdg. XIX[1]) ergiebt und wie unten noch weiter gezeigt werden wird.

Mit Sicherheit erwarteten wir bei der Undecylsäure eine grössere Abweichung zu finden, da die höheren Säuren mit ungeraden Kohlenstoffatomzahlen sich in ihren übrigen physikalischen Eigenschaften von den Säuren mit geraden Zahlen verschieden verhalten. Leider hat es uns nicht gelingen wollen, die Säuren mit 13, 15, 17, 19, 21 At. Kohlenstoff genügend rein zu erhalten, und so bleiben wir auf das eine Glied dieser Reihe, die Undecylsäure beschränkt. Diese unterscheidet sich von der Caprinsäure um 157,6 Cal., von der Laurinsäure um 155,9 Cal. Ist erstere Differenz auch die grösste, welche in der ganzen Reihe vorkommt, so ist sie doch, wenn man die absolute Grösse des Wärmewerthes der Säure in Betracht zieht, gegenüber den sonstigen Differenzen in ihrer Abweichung so verschwindend klein, dass kein bestimmter Schluss daraus zu ziehen ist.

Bis weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt worden sind, müssen wir daher auch die hierhergehörenden Glieder der Reihe mit ungeraden Kohlenstoffatomzahlen thermisch als wahre Homologe der übrigen Säuren betrachten.

Die Differenz des Wärmewerthes der festen Essigsäure und der festen Behensäure beträgt 3131,6 Cal. Daraus ergiebt sich die mittlere Differenz von 156,58 Cal. für jedes Glied der festen Säuren. Ebenso ist die Differenz für flüssige Essigsäure und flüssige Behensäure 3144,3 Cal. und also die mittlere Differenz für jedes Glied der flüssigen Säuren 157,215 Cal.

Unter Zugrundelegung dieser Zahlen ist die folgende Tabelle, welche alle Säuren von C_2 bis C_{22} umfasst, berechnet worden. Die daraus sich ergebende Uebereinstimmung zwischen den berechneten und gefundenen Werthen ist geradezu Staunen er-

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XL, 202.

regend. Eine solche Uebereinstimmung wäre aber unmöglich, wenn bei den isomeren Säuren dieser Reihe Verschiedenheiten vorkämen. Damit ist die Richtigkeit des oben Gesagten erwiesen.

		Mol.-Gew.	Gefunden Cal.	Berechnet Cal.	Differenz gegen Berechnet Cal.
Flüssige Säuren:					
Essigsäure . . .	$C_2 H_4 O_2$	60	209,4	209,4	0
Propionsäure . .	$C_3 H_6 O_2$	74	367,4	366,6	+ 0,8
Buttersäure . . .	$C_4 H_8 O_2$	88	524,4	523,8	+ 0,6
Valeriansäure . .	$C_5 H_{10} O_2$	102	681,8	681,0	+ 0,8
Capronsäure . . .	$C_6 H_{12} O_2$	116	837,6	838,3	— 0,7
Heptylsäure . . .	$C_7 H_{14} O_2$	130	994,7	995,5	— 0,8
Octylsäure . . .	$C_8 H_{16} O_2$	144	1151,5	1152,7	— 1,2
Nonylsäure . . .	$C_9 H_{18} O_2$	158	1309,5	1309,9	— 0,4
Feste Säuren:					
Caprinsäure . . .	$C_{10} H_{20} O_2$	172	1458,3	1459,3	— 1,0
Undecylsäure . .	$C_{11} H_{22} O_2$	186	1615,9	1615,9	0
Laurinsäure . . .	$C_{12} H_{24} O_2$	200	1771,8	1772,5	— 0,7
Tridecylsäure . .	$C_{13} H_{26} O_2$	214	—	1929,1	
Myristinsäure . .	$C_{14} H_{28} O_2$	228	2085,9	2085,7	+ 0,2
Pentadecylsäure .	$C_{15} H_{30} O_2$	242	—	2242,2	
Palmitinsäure . .	$C_{16} H_{32} O_2$	256	2398,4	2398,8	— 0,4
Heptadecylsäure .	$C_{17} H_{34} O_2$	270	—	2555,4	
Stearinsäure . . .	$C_{18} H_{36} O_2$	284	2711,8	2712,0	— 0,2
Nondecylsäure . .	$C_{19} H_{38} O_2$	298	—	2868,6	
Arachinsäure . .	$C_{20} H_{40} O_2$	312	3025,8	3025,1	+ 0,7
Medullinsäure . .	$C_{21} H_{42} O_2$	326	—	3181,7	
Behensäure . . .	$C_{22} H_{44} O_2$	340	3338,3	3338,3	0

Völlig abweichend von den übrigen hierher gehörenden Säuren verhält sich die Ameisensäure. Die Differenz ihres Wärmewerthes gegen den der Essigsäure beträgt nur 147,7 Cal. Wäre sie den übrigen Säuren thermisch homolog, so müsste ihr Wärmewerth im flüssigen Zustande 52,2 Cal. sein, während er in Wirklichkeit 61,7 Cal. ist. Ebenso wie die Ameisensäure zu der Essigsäure, so verhält sich die Oxalsäure zu der Malonsäure, die Differenz des Wärmewerthes beider beträgt 147,1 Cal. Wären beide thermisch

homolog, so müsste der Wärmewerth der Oxalsäure 51 Cal. betragen, während er in Wirklichkeit 60,2 Cal. ist.

Da der Wärmewerth der organischen Verbindungen nur ein Ausdruck für ihren Energiegehalt ist, so kann man hiernach auch sagen, die Ameisensäure enthält im Vergleiche zur Essigsäure, und die Oxalsäure enthält im Vergleiche zur Malonsäure einen bedeutenden Ueberschuss an Energie.

Es ist in Früherem bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass der Wärmewerth isomerer Säuren stets in gleicher Richtung wie ihr elektrisches Leitvermögen geht, derart dass diejenige Säure, der das höhere Leitvermögen zukommt, auch einen höheren Wärmewerth besitzt als die von geringerem Leitvermögen. Das elektrische Leitvermögen ist aber wieder ein Ausdruck für die chemische Energie, für die Aviditätsgrösse der Säure. Je grösser ihr Leitvermögen, je grösser ihre Aviditätsgrösse. Je grösser ihre chemische Energie, je grösser wird auch unter sonst gleichen Bedingungen ihre Gesammtenergie, und somit auch ihr Wärmewerth sein.

Da nun die Ameisensäure im Vergleiche zur Essigsäure und die Oxalsäure im Vergleiche zur Malonsäure einen so bedeutenden Ueberschuss an Energie enthält, so muss ihr Verhalten diesem entsprechen. Dem ist in der That so. Nach Ostwald[1]) verhält sich das elektrische Leitvermögen der Essigsäure zu dem der Ameisensäure wie 0,424 : 1,68.

Die Geschwindigkeitsgrösse bei der hydrolytischen Spaltung des Methylacetates verhält sich bei der Essigsäure und Ameisensäure wie 0,345 : 1,31.

Die Geschwindigkeitsgrösse bei der hydrolytischen Spaltung des Rohrzuckers verhält sich bei beiden Säuren wie 0,400 : 1,53. Die Ameisensäure enthält daher rund das Vierfache an chemischer Energie im Vergleiche zur Essigsäure.

Die Propionsäure und Buttersäure, welche thermisch sich als wahre Homologe der Essigsäure erweisen, sind auch in ihrer Aviditätsgrösse kaum von der Essigsäure verschieden.

Bei der Malonsäure verhält sich das elektrische Leitvermögen zu dem der Oxalsäure wie 3,10 : 19,7.

Das Verhältniss der Geschwindigkeitsgrösse bei der Spal-

1) Lehrbuch (2. Aufl.) Bd. II, Abth. 1, S. 650.

tung des Methylacetates ist bei beiden Säuren wie 2,87 : 17,6 : das bei der Spaltung des Rohrzuckers wie 3,08 : 18,6.

Die Oxalsäure enthält daher das Sechsfache an chemischer Energie im Vergleiche zur Malonsäure.

Der Ueberschuss an Gesammtenergie, welchen die Ameisensäure und Oxalsäure enthalten, findet daher seine volle Erklärung. Er macht sich bei chemischen Processen als Kraftquelle geltend.

B. Zweibasische gesättigte Säuren.

I. Alkylsubstituirte Malonsäuren.

In einer früheren Arbeit (Abhandl. XIX[1]) haben wir bereits die Wärmewerthe einer Reihe von alkylsubstituirten Malonsäuren bestimmt. In Folgenden geben wir, ausser einer Anzahl von Bestimmungen des Werthes weiterer, bislang noch nicht untersuchter Glieder dieser Reihe, mehrfache Wiederholungen früherer Beobachtungen, um diese einer Controle zu unterziehen.

Da wir die Wärmemessungen so vollständig in der Hand haben, dass bei denselben ein Fehler völlig ausgeschlossen ist, so kann eine Abweichung in den Resultaten, wenn eine solche vorkommt, nur durch eine nicht absolute chemische Reinheit der angewandten Präparate herbeigeführt werden. Wir haben, so lange wir thermochemische Bestimmungen ausführen, unser Hauptaugenmerk hierauf verwandt und keine Mühe gescheut, um zu reinsten Präparaten zu gelangen. Es ist aber die Darstellung der Präparate in dem Grade von Reinheit, wie wir sie für unsere Zwecke gebrauchen, viel schwieriger als die meisten Chemiker glauben. Beimischungen von fremden Substanzen in solchen Mengen, dass sie sich durch die Elementaranalyse nicht mehr verrathen, können doch den Wärmewerth soweit beeinflussen, dass Abweichungen von einigen Calorien dadurch herbeigeführt werden. Da es sich aber bei unseren Untersuchungen erwiesen hat, dass häufig der Charakter der Verbindung durch einen Mehr- oder Mindergehalt von einer Calorie ausgedrückt wird, so muss bei dem jetzigen Stande unserer Wissenschaft dahin gestrebt werden, den allerhöchsten Grad von Genauigkeit zu erlangen. Aus diesem Grunde stehen wir nicht

1) Journ. f. prakt. Chem. XL, 202.

an, jede Zahl, welche irgendwie unser Bedenken erregt, neu zu ermitteln, gleichviel ob sie von uns oder von anderen Forschern gefunden worden ist.

Zu den hier vorliegenden Untersuchungen sind ausschliesslich neu dargestellte Präparate verwandt. Als Ausgangsmaterial bei der Darstellung der Methylmalonsäure diente α-Brompropionsäure, welche genau auf gleiche Weise in Methylmalonsäure übergeführt wurde, wie bei der Darstellung der Malonsäure aus Monochloressigsäure von Conrad[1]) angegeben ist. Alle übrigen Säuren wurden aus Natriummalonsäureester durch Einwirkung der betreffenden Jodalkyle nach Conrad's Verfahren dargestellt, wobei besondere Sorgfalt auf die völlige Reinheit der Rohmaterialien verwandt wurde. Als vorzügliche Mittel zum Umkrystallisiren der bei der Spaltung der Ester erhaltenen Rohsäuren erwiesen sich Chloroform und Essigsäure-Aethylester, wobei die Lösung in letzterem mit Petroleumäther bis zur Ausscheidung der Krystalle versetzt wurde.

Wir haben eine fortlaufende Reihe der Säuren bis zur Octylmalonsäure und ausserdem noch die Cetylmalonsäure dargestellt. Die alkylsubstituirten Octylmalonsäuren in reiner Form zu gewinnen ist uns leider nicht möglich gewesen.

Ueber Allylmalonsäure und Benzylmalonsäure wird unten berichtet werden.

1. Methylmalonsäure $C_4H_6O_4$ . . . . . 118.

Neues Präparat, welches von uns aus α-Brompropionsäure dargestellt wurde, wie oben angegeben ist. Die aus dem Calciumsalze abgeschiedene Säure wurde zuerst mehrfach aus Aether, dann aus Wasser umkrystallisirt. Schmelzpunkt 130°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

Zur Sicherung der Zündung, welche bei den an Sauerstoff reichen Verbindungen mitunter Schwierigkeiten macht, wurde hier, wie auch später, ein gewogener Naphtalinkrystall auf die zur Verbrennung bestimmte Pastille gelegt und dessen Wärmewerth in Anrechnung gebracht.

1) Ann. Chem. 204, 125.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0806	0,0045	15,5147	14,1629	1,3518	2500	3379,5
2.	0,8640	0,0205	15,2679	14,1193	1,1486	2500	2871,5

Correction für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	f. Naphtalin cal.
9,1	7,0	43,3
9,1	6,7	197,4

Wärmewerth.

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	3320,1	3072,5	362,6	99,94
2.	2658,3	3076,7	363,1	100,07
	Mittel	3074,4	362,8	bei constantem Volum
			362,5	» » Druck
			220,5	Bildungswärme.

Wir hatten früher (Abhandl. XIX[1]) für Methylmalonsäure 364,8 Cal. gefunden, während unsere jetzigen Messungen 362,5 Cal. ergeben. Die Differenz beträgt daher nur 2,3 Cal. Diese fast unerheblich scheinende Differenz ist aber insofern bedeutungsvoll, als durch die neue Messung eine scheinbare Anomalie in der homologen Reihe zum Verschwinden kommt.

Nach den älteren Messungen ergaben die drei Glieder dieser Reihe folgende Differenzen:

		Differenz
Malonsäure	207,3	157,5
Methylmalonsäure	364,8	153,1
Aethylmalonsäure . . .	517,9	

Nach den jetzigen Bestimmungen gestalten sich die Differenzen folgendermassen:

1) Journ. prakt. Chem. [2] XL, 207.

Malonsäure	207,3	155,2 Cal.
Methylmalonsäure	362,5	
Aethylmalonsäure	517,9	155,4 »

Die scheinbaren Verschiedenheiten sind daher auf den kleinen Fehler der früheren Zahl zurückzuführen, in Wirklichkeit sind sie nicht vorhanden.

Ebenso verringern sich die Verschiedenheiten zwischen den Isomeren: Methylmalonsäure und Bernsteinsäure. Wir hatten früher:[1])

Methylmalonsäure	364,8	8,0 Cal.,
Bernsteinsäure	356,8	

während die jetzigen Bestimmungen Folgendes ergeben:

Methylmalonsäure	362,5	5,7 Cal.
Bernsteinsäure	356,8	

Methylaethylmalonsäure $C_6H_{10}O_4$ . . . . 146.

Schmelzpunkt der Krystalle 118°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0093	0,0029	17,6836	15,7927	1,8908	2500	4727,25
2.	0,8961	0,0021	17,4214	15,7437	1,6774	2500	4193,5

Correction		
für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	f. Naphtalin cal.
14,6	13,5	27,9
14,6	12,0	20,2

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4671,25	4628,2	675,7	100,01
2.	4146,7	4627,5	675,6	99,99
	Mittel	4627,9	675,7 f. const. Volum	
			676,0 » » Druck	
			233,0 Bildungswärme.	

1) Vergl. Journ. prakt. Chem. [2] XL, 218.

Wir hatten früher gefunden 672,3 Cal. für constanten Druck. Auf Grund der Leitfähigkeit der Säure ist aber von uns[1]) schon angeführt worden, dass der Werth aller Wahrscheinlichkeit nach um etwas höher als 675,2 Cal. liegen müsse. Der Versuch hat die Richtigkeit dieser Vorhersage bewiesen.

Normale Propylmalonsäure $C_6H_{10}O_4$ . . . 146.

Darstellung nach dem Verfahren von Conrad. Als sehr zweckmässige Reinigungsmethode der hierher gehörenden Säuren erwies sich ein Lösen in Essigsäure-Aethylester und Zusatz von Petroleumäther bis zur Ausscheidung von Krystallen. Wo nichts Anderes bemerkt ist, ist diese, jedesmal mehrfach wiederholte Methode zur Anwendung gekommen. Schmelzpunkt der reinen Säure 94°.[2])

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0236	0,0034	17,9198	15,9992	1,9206	2500	4801,5
2.	0,9305	0,0070	16,9156	15,1545	1,7611	2500	4402,75

Correction		
für Fe cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	14,5	32,7
14,6	10,8	67,4

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4739,7	4630,4	676,0	99,98
2.	4309,95	4631,8	676,2	100,02
	Mittel	4631,1	676,1	bei constantem Vol.
			676,4	» » Druck
			232,6	Bildungswärme.

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XL, 359.

2) In unserer früheren Publication (Journ. f. prakt. Chem. [2] XL, 214 ist durch einen Druckfehler 84° angegeben.

Wir hatten früher 675,0 Cal. für constanten Druck gefunden. Die Differenz zwischen beiden Bestimmungen (1,4 Cal.) ist so gering, dass man beide Zahlen für identisch halten könnte. Wir haben aber Grund die frühere Zahl für die richtigere zu halten und werden daher diese beibehalten.

Isopropylmalonsäure $C_6H_{10}O_4$ . . . . . 146.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1.0072	0,0052	17,2262	15,3272	1,8990	2500	4747,5
2.	1,0077	0,0020	18,1961	16,3133	1,8828	2500	4707,0

Correction für Fe cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	13,5	50,1
14,6	11,4	19,3

Wärmewerth.

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4669,3	4635,9	676,8	100,11
2.	4661,7	4626,1	675,4	99,89
	Mittel 4631,0		676,1	für constant. Volum.
			676,4	» » Druck
			232,6	Bildungswärme.

Wir hatten früher 675,2 Cal. für constanten Druck gefunden. Da die Differenz nur 1,2 Cal. beträgt, so behalten wir, ebenso wie bei der vorhergehenden Säure, den früheren Werth bei.

Diaethylmalonsäure $C_7H_{12}O_4$ . . . . . 160.

Die rohe Säure wurde durch Umkrystallisiren aus Chloroform gereinigt. Schmelzpunkt 124°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	0,8600	0,0060	19,4472	17,6254	1,8218	2500	4554,5
2.	0,9271	0,0035	17,9880	16,0309	1,9571	2500	4892,75

Correction für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	12,5	57,7
14,6	17,8	33,7

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4469,7	5197,3	831,6	99,91
2.	4826,65	5206,2	833,0	100,09
	Mittel 5201,8		832,3	für constant. Volum
			832,9	» » Druck
			239,1	Bildungswärme.

Aethylpropylmalonsäure $C_7H_{14}O_4$ . . . . 174.

Die Rohsäure durch Umkrystallisiren aus Chloroform gereinigt. Schmelzpunkt 104°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0531	0,0029	18,7521	16,3365	2,4156	2500	6039,0
2.	1,0681	0,0055	18,8170	16,3570	2,4600	2500	6150,0

Correction für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	17,4	27,9
14,6	17,0	52,9

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5979,1	5677,6	987,9	99,99
2.	6065,5	5678,8	988,1	100,01
	Mittel	5678,2	988,0	für constant. Volum
			989,9	» » Druck
			245,0	Bildungswärme.

Dipropylmalonsäure $C_9H_{16}O_4$ . . . . . 188.

Rohsäure durch Krystallisation aus Chloroform gereinigt. Schmelzpunkt 156°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_s Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_s$ cal.
1.	0,9240	0,0144	18,8705	16,5529	2,3176	2500	5794,0
2.	0,9970	0,0036	19,3559	16,8981	2,4578	2500	6144,5

Correction für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	17,3	138,6
14,6	19,5	34,7

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5623,5	6086,0	1144,2	99,93
2.	6075,7	6094,0	1145,7	100,07
	Mittel	6090,0	1144,9	für constant. Volum
			1146,1	» » Druck
			251,9	Bildungswärme.

Heptylmalonsäure $C_{10}H_{18}O_4$ . . . . . 202.

Die Rohsäure wiederholt aus Chloroform krystallisirt. Schmelzpunkt 97°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0724	0,0049	19,5745	16,7804	2,7941	2500	6985,25
2.	1,0021	0,0042	19,3671	16,7534	2,6137	2500	6534,25
3.	1,0473	0,0018	18,4884	15,7696	2,7188	2500	6797,0

Correction für Fe cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	19,6	47,2
14,6	18,0	40,4
14,6	19,5	17,3

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6903,85	6437,8	1300,4	99,93
2.	6461,25	6447,7	1302,4	100,09
3.	6745,6	6440,9	1301,1	99,98
	Mittel	6442,1	1301,3	für constant. Volum
			1302,7	» » Druck
			258,3	Bildungswärme.

Normale Octylmalonsäure $C_{11}H_{20}O_4$ . . . 216.

Rohsäure gereinigt durch Umkrystallisiren aus Chloroform. Schmelzpunkt 112°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Naphtalin Grm.	ϑ_n(corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0125	0,0022	20,1678	17,4135	2,7543	2500	6885,75
2.	1,0085	0,0018	18,8511	16,1090	2,7421	2500	6855,25

Correction		
für *Fe* cal.	für HNO_3 cal.	für Naphtalin cal.
14,6	20,5	21,2
14,6	22,5	17,3

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6829,45	6745,1	1456,9	100,01
2.	6800,85	6743,5	1456,6	99,99
	Mittel 6744,3		1456,8	für constant. Volum
			1458,5	» » Druck
			265,5	Bildungswärme.

Cetylmalonsäure $C_{19}H_{36}O_4$ . . . . . 328.

Die Rohsäure, in Essigsäure-Aethylester gelöst, wurde durch fractionirtes Ausfällen durch Petroleumäther gereinigt. Schmelzpunkt 121°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz	Naphtalin	ϑ_n corr.	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$
	Grm.	Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	0,9147	0.0035	19.2655	16,2230	3,0425	2500	7606,25
2.	0,9113	0,0053	19.0525	16,0143	3,0382	2500	7595.5
3.	0,6079	0,0026	17,3249	15,2974	2,0275	2500	5068,75

Correction		
für *Fe*	für HNO_3	für Naphtalin
cal.	cal.	cal.
14,6	19,2	33,7
14,6	21,2	51,0
14,6	16,2	25,0

Wärmewerth

	der Substanz	pro Grm.	pro Grm.-Mol.	Mittel
	cal.	cal.	Cal.	= 100
1.	7538,75	8241,8	2703,3	99,99
2.	7508,7	8239,5	2702,6	99,96
3.	5012,95	8246,3	2704,8	100,05
	Mittel	8242,5	2703,6	für constant. Volum
			2707,7	» » Druck
			320,3	Bildungswärme.

Uebersicht der Malonsäuren[1]).

		Mol.-Gew.	Gefunden Cal.	Berechnet Cal.
Malonsäure*)	$C_3 H_4 O_4$	104	207,3	212,7
Methylmalonsäure	$C_4 H_6 O_4$	118	362,5	220,5
Aethylmalonsäure*) . . .	$C_5 H_8 O_4$	132	517,9	228,1
Dimethylmalonsäure*) . .	$C_5 H_8 O_4$	132	515,3	230,7
Methylaethylmalonsäure . .	$C_6 H_{10} O_4$	146	676,0	233,0
Isopropylmalonsäure*) . .	$C_6 H_{10} O_4$	146	675,2	233,8
Propylmalonsäure*) . . .	$C_6 H_{10} O_4$	146	675,0	234,0
Diaethylmalonsäure . . .	$C_7 H_{12} O_4$	160	832,9	239,1
Aethylpropylmalonsäure .	$C_8 H_{14} O_4$	174	989,9	245,0
Dipropylmalonsäure . . .	$C_9 H_{16} O_4$	188	1146,1	251,9
Heptylmalonsäure	$C_{10} H_{18} O_4$	202	1302,7	258,3
Octylmalonsäure	$C_{11} H_{20} O_4$	216	1458,5	265,5
Cetylmalonsäure	$C_{19} H_{36} O_4$	328	2707,7	320,3

Abgeleitete Resultate.

Homologie.

Obgleich aus vorstehender Uebersicht hervorgeht, dass die isomeren Säuren nicht ganz gleichen Wärmewerth besitzen, worauf noch unten zurückzukommen sein wird, so sei vorläufig hiervon abgesehen und ein gleichmässiges Ansteigen des Wärmewerthes von der Malonsäure bis zur Cetylmalonsäure angenommen. Die Differenz zwischen beiden Säuren beträgt 2500,4 Cal., also für den Zuwachs von je CH_2 156,275 Cal. Bei den einbasischen Säuren beträgt dieser Werth nach Obigem (s. S. 627) 156,58 Cal. Unter Zugrundelegung ersterer Zahl erhalten wir folgende Reihe:

[1]) Die mit *) bezeichneten Angaben sind unseren früheren Bestimmungen entnommen.

		Wärmewerth Gefunden Cal.	Wärmewerth Berechnet Cal.	Differenz gegen Berechnet Cal.
Malonsäure	$C_3 H_4 O_4$	207,3		
Methylmalonsäure . . .	$C_4 H_6 O_4$	362,5	363,6	— 1,1
Aethylmalonsäure . . .	$C_5 H_8 O_4$	517,9	519,8	— 1,9
Dimethylmalonsäure . .	$C_5 H_8 O_4$	515,3	519,8	— 4,5
Methylaethylmalonsäure.	$C_6 H_{10} O_4$	676,0	676,1	— 0,1
Isopropylmalonsäure . .	$C_6 H_{10} O_4$	675,2	676,1	— 0,9
Propylmalonsäure . . .	$C_6 H_{10} O_4$	675,0	676,1	— 1,1
Diaethylmalonsäure . .	$C_7 H_{12} O_4$	832,9	832,4	+ 0,5
Aethylpropylmalonsäure	$C_8 H_{14} O_4$	989,9	988,7	+ 1,2
Dipropylmalonsäure . .	$C_9 H_{16} O_4$	1146,1	1144,9	+ 2,8
Heptylmalonsäure . . .	$C_{10} H_{18} O_4$	1302,7	1301,2	+ 1,5
Octylmalonsäure . . .	$C_{11} H_{20} O_4$	1458,5	1457,5	+ 1,0
Cetylmalonsäure . . .	$C_{19} H_{36} O_4$	2707,7		

Auffällig bei dieser Zahlenreihe ist, dass die, obgleich kleinen, Differenzen bis zu den Säuren mit 6 At. Kohlenstoff regelmässig mit — Vorzeichen auftreten, während sie bei den höheren Säuren ebenso regelmässig das + Zeichen haben. Die regelmässige Wiederkehr der gleichnamigen Zeichen macht es höchst wahrscheinlich, dass der Werth für den Zuwachs von je CH_2 in dieser Reihe von Säuren nicht ein gleichmässiger ist, sondern bei den Säuren bis zu 6 Atomen Kohlenstoff unter dem Mittelwerthe, dagegen bei den höheren Säuren über demselben liegt. Dieses wird zur Gewissheit, wenn man die Wärmewerthe der einzelnen Glieder der Reihe mit dem der Malonsäure vergleicht. Dabei ergeben sich folgende Werthe:

	Cal.			
Malonsäure	207,3			
Methylmalonsäure . . .	362,5	= 207,3 +	155,2	
Aethylmalonsäure . . .	517,9	= 207,3 +	155,3	× 2
Dimethylmalonsäure . .	515,3	= 207,3 +	154,0	× 2
Methylaethylmalonsäure	676,0	= 207,3 +	156,23	× 3
Isopropylmalonsäure . .	675,2	= 207,3 +	155,97	× 3
Propylmalonsäure . . .	675,0	= 207,3 +	155,90	× 3
Diaethylmalonsäure . . .	832,9	= 207,3 +	156,4	× 4
Aethylpropylmalonsäure	989,9	= 207,3 +	156,52	× 5
Dipropylmalonsäure . .	1146,1	= 207,3 +	156,47	× 6
Heptylmalonsäure . . .	1302,7	= 207,3 +	156,49	× 7
Octylmalonsäure	1458,5	= 207,3 +	156,40	× 8
Cetylmalonsäure	2707,7	= 207,3 +	156,28	× 16

Bei den Anfangsgliedern, bis zu den Propylmalonsäuren liegt daher der Werth für CH_2 zwischen 154 und 156 Cal. und erreicht nur in einem Falle 156,23, während derselbe bei den höheren Gliedern im Durchschnitte, mit äusserst geringen Abweichungen, 156,43 Cal. beträgt. Charakteristisch für die ganze Reihe ist es, dass der Mittelwerth der Reihe der einbasischen Säuren von 156,58 Cal. nicht in einem einzigen Falle erreicht wird.

Noch complicirter gestalten sich die Verhältnisse, wenn man statt der Malonsäurereihe die einzelnen Glieder der normalen zweibasischen Säuren in Betracht zieht. Die folgenden Werthe sind theils unserer Abhdlg. XIX[1]), theils der Abhdlg. XXVII[2]) entnommen.

	Cal.	
Malonsäure $C_3H_4O_4$	207,3	
Bernsteinsäure $C_4H_6O_4$	356,8	149,5
Glutarsäure $C_5H_8O_4$	515,0	158,2
Adipinsäure $C_6H_{10}O_4$	668,9	153,9
Pimelinsäure $C_7H_{12}O_4$	828,9	160,0
Korksäure $C_8H_{14}O_4$	983,7	154,8
Azelainsäure $C_9H_{16}O_4$ . . .	1141,3	157,6
Sebacinsäure $C_{10}H_{18}O_4$ . . .	1296,8	155,5

Auf den ersten Blick scheint hier gar keine Regelmässigkeit zu herrschen. Die Malonsäure verhält sich zur Bernsteinsäure wie die Ameisensäure zur Essigsäure und wie die Oxalsäure zur Malonsäure (vergl. S. 629). Die gleichen Ursachen, wie dort, sind auch hier massgebend. Die Malonsäure enthält gegenüber der Bernsteinsäure einen bedeutenden Ueberschuss an Energie und ist in Folge dessen eine sechsmal so starke Säure wie diese[3]).

Das elektrische Leitvermögen von Oxalsäure, Malonsäure und Bernsteinsäure steht im Verhältnisse von 19,7 : 3,10 : 0,581.

Sieht man von der Malonsäure ab und vergleicht man die übrigen Zahlen, so folgt regelmässig auf eine hohe Zahl eine geringe Zahl. Eine thermische Homologie findet daher in der Reihe dieser Säuren nicht statt, wohl aber ergiebt sich eine solche, wenn man die Säuren mit geraden Kohlenstoffatomzahlen unter sich und andererseits die Säuren mit ungeraden Kohlenstoffatomzahlen mit einander vergleicht:

---

1) Journ. f. prakt. Chemie [2] XL, 202.
2) Daselbst XLV, 475.
3) Vgl. Ostwald, Lehrbuch Bd. II, 1, S. 651.

	Cal.	
Bernsteinsäure $C_4H_6O_4$	356,8	156,05 × 2
Adipinsäure $C_6H_{10}O_4$	668,9	157,40 × 2
Korksäure $C_8H_{14}O_4$	983,7	156,55 × 2
Sebacinsäure $C_{10}H_{18}O_4$ . . .	1296,8	
Glutarsäure $C_5H_8O_4$	515,0	156,95 × 2
Pimelinsäure $C_7H_{12}O_4$ . . .	828,9	156,20 × 2
Azelainsäure $C_9H_{16}O_4$ . . .	1141,3	

Wir müssen daher in der Reihe der normalen zweibasischen Säuren mit Nothwendigkeit zunächst zwei thermisch homologe Gruppen unterscheiden, von der die eine die Säuren mit geraden, die andere die Säuren mit ungeraden Kohlenstoffatomzahlen, mit ihren durch Alkylsubstitution daraus hervorgegangenen Derivaten, umfasst. — Es walten daher hier ganz andere Verhältnisse als in der Reihe der einbasischen Säuren, wo derartige Verschiedenheiten nicht nachweisbar sind.

Isomerie.

In der Reihe der einbasischen Säuren haben wir bei den Isomeren keine nennenswerthe Verschiedenheit des Wärmewerthes nachweisen können. Wären solche vorhanden, so hätten sie zu Tage treten müssen. Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse bei den zweibasischen Säuren. Die Methylmalonsäure liegt erheblich höher als die Bernsteinsäure, (vergl. S. 633). Bei den drei untersuchten Propylmalonsäuren kommen ebenfalls Differenzen vor und ähnliche Differenzen finden sich bei den alkylirten Bernsteinsäuren.

Wie gleich gezeigt werden soll, gilt als ganz ausnahmslose Regel:

> Der Wärmewerth von isomeren Malonsäure-Derivaten liegt immer höher als der von ihnen isomeren Bernsteinsäure-Derivaten, und es liegt ferner der Werth der Bernsteinsäure-Derivate höher als derjenige isomerer normaler Säuren.

Ausserdem zeigt sich ganz ohne Ausnahme, dass die Verschiedenheiten im elektrischen Leitvermögen sich immer in gleichem Sinne bewegen, wie der Wärmewerth. So haben ausnahmslos die alkylirten Malonsäuren, neben dem höheren Wärmewerthe, auch zugleich höheres Leitvermögen als die ihnen isomeren Bernsteinsäuren; und es haben wieder die alkylirten

Bernsteinsäuren, neben dem höheren Wärmewerthe, auch ein höheres Leitvermögen als die ihnen isomeren normalen Säuren. Aber nicht genug damit. Der Wärmewerth von isomeren alkylirten Malonsäuren ist ebensowenig unter sich gleich, wie der Wärmewerth isomerer alkylirter Bernsteinsäuren nicht gleich ist. Sind die Differenzen mitunter auch nicht gross, so verlaufen sie doch immer in gleichem Sinne, derartig nämlich, dass dem höheren Wärmewerthe auch immer ein höheres Leitvermögen entspricht. Es ist diese Thatsache bereits früher von uns erkannt (Abhdlg. XX[1]) und später auch für die stellungsisomeren Körper bestätigt (Abhdlg. XXVI[2]). Inzwischen sind von uns mehrere Neubestimmungen der Wärmewerthe (Abhandlung XXVII[3]) hinzugekommen und ausserdem sind neue Ermittelungen des Leitvermögens von Bethmann[4]) und von Walden[5]) ausgeführt worden, einzelne Bestimmungen des Leitvermögens, welche in jenen Arbeiten fehlen, sind von uns selbst vorgenommen. Alle diese Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt, worin die mit * bezeichneten Grössen des Leitvermögens von uns ermittelt sind.

	Wärmewerth Cal.	Elektr. Leitvermögen K
$C_4H_6O_4$		
Methylmalonsäure	362,5	0,0860
Bernsteinsäure	356,8	0,00665
$C_5H_8O_4$		
Aethylmalonsäure	517,9	0,1270
Dimethylmalonsäure	515,3	0,0760
Methylbernsteinsäure	515,2	0,0086
Glutarsäure	515,0	0,00475
$C_6H_{10}O_4$		
Methylaethylmalonsäure	676,0	0,1610
Isopropylmalonsäure	675,2	0,1270
Propylmalonsäure	675,0	0,1120

1) Journ. f. prakt. Chemie [2] XL, 357.
2) Daselbst LXV, 339.
3) Daselbst XLV, 475.
4) Zeitschr. physik. Chem. V, 385.
5) Daselbst VIII, 448.

	Wärmewerth Cal.	Elektr. Leitvermögen K
Antidimethylbernsteinsäure	674,5	0,0123
Aethylbernsteinsäure	672,2	0,0085
Unsym. Dimethylbernsteinsäure . .	671,7	0,0080
Paradimethylbernsteinsäure	671,0	0,0191
Methylglutarsäure	670,8	0,0054
Adipinsäure	668,9	0,00371
$C_7H_{12}O_4$		
Diaethylmalonsäure	832,9	0,7400
Pimelinsäure	828,9	0,00357
$C_8H_{14}O_4$		
Methylpropylmalonsäure	989,9	0,8926*)
Dimethyladipinsäure	986,6	0,00348
Korksäure	983,7	0,00311
$C_9H_{16}O_4$		
Dipropylmalonsäure	1146,1	1,123*)
Azelainsäure	1141,3	0,00296
$C_{10}H_{18}O_4$		
Heptylmalonsäure	1302,7	0,09561*)
Sebacinsäure	1296,8	0,00234

Während für die drei Säuregruppen, alkylirte Malonsäuren, Bernsteinsäuren und normale Säuren das angegebene Verhalten ausnahmslos zutrifft, zeigt die der Bernsteinsäuregruppe der Reihe $C_6H_{10}O_2$ angehörende Paradimethylbernsteinsäure in Bezug auf ihr Leitvermögen ein abweichendes Verhalten. Diese Säure nimmt aber in dieser Beziehung eine Ausnahmestelluug ein, denn im Allgemeinen hat, nach Walden, die höher schmelzende Paramodification dieser geometrisch isomeren Säuren stets eine kleinere Affinitäts-Constante als die niedriger schmelzende Antisäure. Da die Parasäure thermisch der allgemeinen Regel entspricht, so wäre eine erneute Untersuchung des Leitvermögens beider Säuren erwünscht, um zu entscheiden, ob derselben wirklich eine Ausnahmestellung zukommt.

Unter allen von uns bislang untersuchten Säuren, und wir werden noch mehrfach Gelegenheit haben Belege dafür zu bringen hat sich noch keine gefunden, bei der nicht Wärmewerth und Leitvermögen in gleicher Richtung gehen. Da wo eine Ausnahme

von dieser Gesetzmässigkeit vorzuliegen schien, hat sich bei neuer Untersuchung stets ergeben, dass die diese scheinbare Ausnahme bedingende Zahl falsch war.

Dieses Verhalten, combinirt mit unseren früheren Beobachtungen (Abh. XXVIII[1]), drängt zu einem folgewichtigen Schlusse:

Die Gesammtenergie der organischen Verbindungen, welche wir durch Ermittelung des Wärmewerthes messen, setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der grössere Theil der vorhandenen Energie ist von der Zahl und der Eigenthümlichkeit der das Molekül zusammensetzenden Atome abhängig und dieser Theil bildet bei isomeren Verbindungen eine unveränderliche Grösse und erfährt in thermisch homologen Reihen einen constanten Zuwachs. Der kleinere Theil, welcher bei Isomeren eine veränderliche Grösse bildet, bedingt dagegen die ganzen Eigenschaften des Molekules. Derselbe äussert sich in der chemischen Energie, im Refractionsvermögen, im specifischen Gewichte, im Molekularvolum, im Schmelzpunkte, in dem mehr oder weniger labilen oder stabilen Zustande des ganzen Molekules.

Bildung der gesättigten Säuren aus den Kohlenwasserstoffen der Methanreihe.

Die Bildung der gesättigten Säuren aus den Grenz-Kohlenwasserstoffen erfolgt durch Ersatz eines oder mehrerer Atome Wasserstoff durch ebenso viele Carboxylgruppen, nach der allgemeinen Formel:

$$- H + COOH.$$

Nun ist bekannt, dass diese Reaction im Allgemeinen mit einer geringen, meist negativ verlaufenden Wärmetönung verbunden ist. Eine Ausnahme hiervon machen, soweit bis jetzt bekannt ist, nur die Polycarbonsäuren des Benzoles (Abh. XXIV[2]).

Wir haben bereits in Früherem versucht, einmal die Beziehungen der zweibasischen Säuren zu den Kohlenwasser-

1) Ber. kön. Ges. d. Wissenschaften 1892, 307. — Journ. prakt. Chem. [2] XLVI, 530.

2) Journ. prakt. Chem. [2] XLIII, 540.

stoffen (Abhdlg. XXI[1]) und ausserdem die der einbasischen zu den zweibasischen Säuren zu ermitteln (Abhdlg. XIX[2]). Damals fehlten uns aber noch die genaueren Bestimmungen, über welche wir jetzt verfügen, und namentlich hatten wir damals noch nicht die typische Verschiedenheit, welche sich zwischen den zweibasischen Säuren der normalen Reihe, der Bernsteinsäure- und der Malonsäure-Reihe herausgestellt haben, in Berücksichtigung gezogen. Bei den erheblichen Differenzen des Wärmewerthes dieser drei Reihen muss die Wärmetönung offenbar einen ganz anderen Werth annehmen, je nachdem es sich um die Bildung eines Gliedes der Malonsäurereihe oder der normalen Säuren handelt.

Als Ausgangspunkt für diese Untersuchung ist die Kenntniss des Wärmewerthes der festen Kohlenwasserstoffe erforderlich.

Von den Kohlenwasserstoffen der Methanreihe sind die ersten fünf Glieder von Thomsen im gasförmigen Zustande untersucht und es erwiesen sich dabei dieselben als thermisch homolog. Macht man nun die Annahme, dass die Schmelz- und Verdampfungswärme derselben, auf die Gewichtseinheit bezogen, sich der des Benzoles gleich verhalte, so kommt man für das feste Methan zu dem Werthe 209,8 Cal., einer Zahl, die mit einer von Thomsen auf ganz anderem Wege ermittelten völlig übereinstimmt, wie schon in Abhdlg. XXVI[3]) nachgewiesen worden ist. Ausserdem haben wir die Wärmewerthe der festen Kohlenwasserstoffe Hexadekan (Schmelzpunkt 18°) und Eikosan (von uns aus Rosenölstearopten abgeschieden, Schmelzpunkt 34,5 bis 35°) bestimmt und für ersteren 2558,6 Cal., für letzteren 3182,5 Cal. gefunden. Baut man nun vom festen Methan mit 209,8 Cal., unter Annahme des Werthes von 156,6 Cal. für je CH_2, auf, so haben die homologen Kohlenwasserstoffe im festen Zustande folgende Werthe:

		Berechnet Cal.	Gefunden Cal.	
Methan	$C\,H_4$	209,8	209,8	Thomsen
Aethan	C_2H_6	366,4	366,5	»
Propan	C_3H_8	523,0	523,4	»
Butan	C_4H_{10}	679,6	679,6	»
Pentan	C_5H_{12}	836,2	837,7	»

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 248.
2) Daselbst [2] XL, 223.
3) Daselbst [2] XLV, 348.

		Berechnet Cal.	Gefunden Cal.	
Hexan	$C_6 H_{14}$	992,8	988,7	STOHMANN u.
Heptan	$C_7 H_{16}$	1149,4		* KLEBER [1])
Octan	$C_8 H_{18}$	1306,0		
Nonan	$C_9 H_{20}$	1462,6		
Dekan	$C_{10} H_{22}$	1619,2		
Undekan	$C_{11} H_{24}$	1775,8		
Dodekan	$C_{12} H_{26}$	1932,4		
Tridekan	$C_{13} H_{28}$	2089,0		
Tetradekan . . .	$C_{14} H_{30}$	2245,6		
Pentadekan . .	$C_{15} H_{32}$	2402,2		
Hexadekan . . .	$C_{16} H_{34}$	2558,8	2558,6	STOHMANN u.
Heptadekan . .	$C_{17} H_{36}$	2715,4		KLEBER.
Octodekan . . .	$C_{18} H_{38}$	2872,0		
Nondekan . . .	$C_{19} H_{40}$	3028,6		
Eikosan	$C_{20} H_{42}$	3185,2	3182,5	» »
Heneikosan . . .	$C_{21} H_{44}$	3341,8		

Den berechneten sind die gefundenen Werthe gegenübergestellt, wobei für die Schmelz- und Verdampfungswärme obige Annahme gemacht ist. Da die gefundenen mit den berechneten Zahlen völlig übereinstimmen, so ist damit die Berechtigung zu dieser Annahme erwiesen. Damit ist auch der Beweis geliefert, dass die schon früher (Abhdlg. XXI [2]) von uns angenommenen Schmelz- und Verdampfungswärmen richtig seien. Diese betragen für das Gramm-Molekül:

Methan	2,1 Cal.
Aethan	3,9 »
Propan	5,8 »
Butan	7,6 »
Pentan	9,4 »

Und da ferner der für Hexadekan und für Eikosan berechnete Werth auch mit dem für die festen Kohlenwasserstoffe direct gefundenen Werthe stimmt, so ist damit erwiesen, dass die ganze Reihe der Kohlenwasserstoffe thermisch homolog ist, mit einem Werthe von 156,6 Cal. für je CH_2.

Hiernach können wir die berechneten Werthe der festen Kohlenwasserstoffe einerseits mit den gefundenen Werthen der

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLIII, 7. Schmelzwärme gleich der des Benzoles zu 29,089 cal. pro Grm. angenommen.

2) Journ. f. prakt. Chem. [2] XLII, 255.

einbasischen Säuren im festen Zustande und die Werthe der einbasischen Säuren mit denen der zweibasischen vergleichen.

		Cal.	Cal.
Methan	CH_4	209,8	
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	206,7	— 3,1
Malonsäure	$C_3H_4O_4$	207,3	+ 0,6
Aethan	C_2H_6	366,4	
Propionsäure	$C_3H_6O_2$	364,0	— 2,4
Methylmalonsäure	$C_4H_6O_4$	362,5	— 1,5
Propan	C_3H_8	523,0	
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	520,4	— 2,6
Aethylmalonsäure	$C_5H_8O_4$	517,9	— 2,5
Butan	C_4H_{10}	679,6	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 2,4
Methylaethylmalonsäure	$C_6H_{10}O_4$	676,0	— 1,2
Butan	C_4H_0	679,6	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 2,4
Isopropylmalonsäure	$C_6H_{10}O_4$	675,2	— 2,0
Butan	C_4H_{10}	679,6	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 2,4
Propylmalonsäure	$C_6H_{10}O_4$	675,0	— 2,2
Pentan	C_5H_{12}	836,2	
Diaethylessigsäure	$C_6H_{12}O_2$	832,3	— 3,9
Diaethylmalonsäure	$C_7H_{12}O_4$	832,9	+ 0,6
Hexan	C_6H_{14}	992,8	
Aethylpropylessigsäure	$C_7H_{14}O_2$	988,8	— 4,0
Aethylpropylmalonsäure	$C_8H_{14}O_4$	989,9	+ 1,1
Heptan	C_7H_{16}	1149,4	
Dipropylessigsäure	$C_8H_{16}O_2$	1145,0	— 4,4
Dipropylmalonsäure	$C_9H_{16}O_4$	1146,1	+ 1,1
Octan	C_8H_{18}	1306,0	
Heptylessigsäure	$C_9H_{18}O_2$	1302,3	— 3,7
Heptylmalonsäure	$C_{10}H_{18}O_4$	1302,7	+ 0,4
Nonan	C_9H_{20}	1462,6	
Caprinsäure	$C_{10}H_{20}O_2$	1458,3	— 4,3
Octylmalonsäure	$C_{11}H_{20}O_4$	1458,5	+ 0,2
Dekan	$C_{10}H_{22}$	1619,2	
Undecylsäure	$C_{11}H_{22}O_2$	1615,9	— 3,3
Undekan	$C_{11}H_{24}$	1775,8	
Laurinsäure	$C_{12}H_{24}O_2$	1771,8	— 4,0

		Cal.	Cal.
Tridekan	$C_{13}H_{28}$	2089,0	
Myristinsäure	$C_{14}H_{28}O_2$	2085,9	— 3,1
Pentadekan	$C_{15}H_{32}$	2402,2	
Palmitinsäure	$C_{16}H_{32}O_2$	2398,4	— 3,8
Heptadekan	$C_{17}H_{36}$	2715,4	
Stearinsäure	$C_{18}H_{36}O_2$	2711,8	— 3,6
Cetylmalonsäure	$C_{19}H_{36}O_4$	2707,7	— 4,1
Nondekan	$C_{19}H_{40}$	3028,6	
Arachinsäure	$C_{20}H_{40}O_2$	3025,8	— 2,8
Heneikosan	$C_{21}H_{44}$	3341,8	
Behensäure	$C_{22}H_{44}O_2$	3338,5	— 3,3

Die Bildung der einbasischen Säuren aus den Kohlenwasserstoffen erfolgt daher, ohne alle Ausnahme, unter einem Energieverluste, dessen Grösse innerhalb der Grenzen von 2,4 bis zu 4,4 Cal. schwankt.

Dagegen erfolgt der Uebergang der einbasischen Säuren zu den Malonsäuren in sechs Fällen unter Energieverlust (innerhalb der Grenzen von 0,4 bis 4,1 Cal.) und in ebenfalls sechs Fällen unter Energiezuwachs (innerhalb der Grenzen von 0,2 bis 1,1 Cal.). Berücksichtigt man aber, dass die grösste hier auftretende Differenz nur $\frac{4,1}{2707,7}$ oder 1,5 Promille des Gesammtwerthes ausmacht, so kommt man zu dem Resultate, dass der Uebergang der einbasischen Säuren zu den Säuren der Malonsäurereihe ohne nennenswerthe Wärmetönung erfolgt, oder dass die Reaction:

$$— H + COOH$$

in diesem Falle den thermischen Werth Null hat.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse bei den normalen zweibasischen Säuren. Es war dies zu erwarten, da früher gezeigt ist, dass hier die Wärmewerthe durchweg am geringsten von den drei Reihen der zweibasischen Säuren sind. Es sind ausserdem, wie oben bereits erörtert, in der Reihe der normalen Säuren zwei Gruppen zu unterscheiden, die erste mit geraden, die zweite mit ungeraden Zahlen der Kohlenstoffatome. Die Beziehungen der zum Vergleiche heranzuziehenden einbasischen Säuren zu den Kohlenwasserstoffen brauchen hier nicht wiederholt zu werden, da sie sich aus Vorstehendem ergeben.

Erste Gruppe.

Zweibasische Säuren mit geraden Kohlenstoffatomzahlen

		Cal.	Cal.
Ameisensäure	$C\ H_2\ O_2$	59,0	
Oxalsäure	$C_2\ H_2\ O_4$	60,2	+ 0,8
Propionsäure	$C_3\ H_6\ O_2$	364,0	
Bernsteinsäure	$C_4\ H_6\ O_4$	356,8	— 7,2
Valeriansäure	$C_5\ H_{10}\ O_2$	677,2	
Adipinsäure	$C_6\ H_{10}\ O_4$	668,9	— 8,3
Aethylpropylessigsäure . .	$C_7\ H_{14}\ O_2$	988,8	
Korksäure	$C_8\ H_{14}\ O_4$	983,7	— 5,1
Heptylessigsäure	$C_9\ H_{18}\ O_2$	1302,3	
Sebacinsäure	$C_{10}H_{18}\ O_4$	1296,8	— 5,5

Abgesehen von Oxalsäure und Ameisensäure, deren thermisches Verhalten bereits früher erörtert ist, zeigt sich hier eine sehr erhebliche negative Wärmetönung, insofern als beim Uebergange der einbasischen in die zweibasischen Säuren regelmässig ein Energieverlust erfolgt, dessen Grösse in den Grenzen von 5,1 bis 8,3 Cal. liegt.

Zweite Gruppe.

Zweibasische Säuren mit ungeraden Kohlenwasserstoffatomzahlen.

		Cal.	Cal.
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	206,7	
Malonsäure	$C_3H_4O_4$	207,3	+ 0,6
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	520,4	
Glutarsäure	$C_5H_8O_4$	515,0	— 5,4
Diaethylessigsäure	$C_6H_{12}O_2$	832,2	
Pimelinsäure	$C_7H_{12}O_4$	828,9	— 3,3
Dipropylessigsäure	$C_8H_{16}O_2$	1145,0	
Azelainsäure	$C_9H_{16}O_4$	1141,3	— 3,7

Ebensowenig wie die Oxalsäure der Bernsteinsäure, ist die Malonsäure der Glutarsäure thermisch homolog und ebenso wie diese Verschiedenheit dort bei dem Uebergange der einbasischen zur zweibasischen Säure sich geltend macht, so ist dies auch hier der Fall. Bei den weiteren Gliedern der Gruppe

haben wir bei dem Uebergange von den einbasischen zu den zweibasischen ebenfalls Energieverlust, dessen Grösse zwischen 3,3 und 5,4 Cal. schwankt, also geringer ist als bei der vorigen Gruppe.

Endlich in der Bernsteinsäurereihe zeigen sich folgende Verhältnisse.

		Cal.	Cal.
Propionsäure	$C_3H_6O_2$	364,0	— 7,2
Bernsteinsäure	$C_4H_6O_4$	356,8	
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	520,4	— 5,2
Methylbernsteinsäure	$C_5H_8O_4$	515,2	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 2,7
Antidimethylbernsteinsäure	$C_6H_{10}O_4$	674,5	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 5,0
Aethylbernsteinsäure	$C_6H_{10}O_4$	672,2	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 5,5
Unsymm. Dimethylbernsteinsäure	$C_6H_{10}O_4$	671,7	
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	677,2	— 6,2
Paradimethylbernsteinsäure	$C_6H_{10}O_4$	671,0	

Auch hier ist ein ganz regelmässiger Energieverlust zu constatiren, dessen Grösse innerhalb der Grenzen von 2,7 bis 7,2 Cal. wechselt.

Das über die Bildung der Säuren aus den zugehörigen Kohlenwasserstoffen Gesagte lässt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Der Reaction $-H + COOH$ entspricht keine unveränderliche Wärmetönung.

2. Bei der Bildung der festen einbasischen gesättigten Säuren aus den festen Grenzkohlenwasserstoffen findet ohne Ausnahme ein Energieverlust statt, der innerhalb der Grenzen von 2,4 bis 4,4 Cal. schwankt.

3. Bei dem Uebergange der festen einbasischen gesättigten Säuren zu den Malonsäuren ist die Wärmetönung gleich Null.

4. Bei dem Uebergange der Ameisensäure zur Oxalsäure, sowie bei dem Uebergange der Essigsäure zur Malonsäure, findet eine Zunahme im Energiegehalte im Betrage von 0,6 bis 0,8 Cal. statt.

5. Bei dem Uebergange der einbasischen festen Säuren zu den normalen zweibasischen Säuren findet, mit Ausnahme der

Oxalsäure und Malonsäure, regelmässiger Energieverlust statt. Derselbe beträgt bei der Gruppe mit geraden Kohlenstoffatomzahlen 5,1 bis 8,3 Cal., bei der Gruppe mit ungeraden Kohlenstoffatomzahlen 3,3 bis 5,4 Cal.

6. In der Bernsteinsäurereihe erfolgt der Uebergang von den einbasischen festen Säuren regelmässig mit Energieverlust im Betrage von 2,7 bis 7,2 Cal.

II. Sonstige Malonsäuren.

Allylmalonsäure $C_6H_8O_4$ . . . . . 144.

Die Allylmalonsäure wurde von uns auf gewöhnliche Weise durch Einwirkung von Allyljodid auf Natriummalonsäurester dargestellt. Die Rohsäure wurde durch mehrmalige Krystallisation aus Aceton gereinigt und bildete dann schöne prismatische Krystalle von 103° Schmelzpunkt.

Wir haben früher (Abhdlg. XXVIII[1]) den Vertretungswerth der Allylgruppe zu 429,6 Cal. ermittelt. Hiernach berechnet sich der Werth der Allylmalonsäure:

Malonsäure	207,3 Cal.
Allylgruppe	429,6 »
Allylmalonsäure	636,9 Cal.

Wie weit diese Berechnung zutrifft, ergiebt folgende Bestimmung des Wärmewerthes, zu der Präparate verschiedener Krystallisationen verwandt wurden.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	Correction f. HNO_3 cal.
1.	1,1514	19,0882	17,0418	2,0464	2500	5116,0	9,1	5,9
2.	1,0696	18,9073	17,0070	1,9003	2500	4750,8	9,1	5,9
3.	1,1784	19,2166	17,1203	2,0963	2500	5240,8	9,1	5,4
4.	1,1193	19,4452	17,4548	1,9904	2500	4976,0	9,1	5,3

1) Diese Berichte 1892 S. 330. — Journ. prakt. Chem. [2] XLVI, 537.

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. cal.	Mittel = 100
1.	5101,0	4430,2	637,9	99,97
2.	4735,8	4427,6	637,6	99,91
3.	5226,3	4435,0	638,6	100,09
4.	4961,6	4432,7	638,3	100,03
	Mittel 4431,4		638,1	für constantes Volum und constant. Druck
			201,9	Bildungswärme.

Wir haben daher Uebereinstimmung der Rechnung und des Befundes bis auf 1,2 Cal.

Unter Aufnahme von H_2 geht die Allylmalonsäure in Propylmalonsäure über:

Allylmalonsäure . . . . . 638,1 Cal.
Propylmalonsäure . . . . . 675,0 »

Durch die Lösung der Doppelbindung in der Allylgruppe, bewirkt durch die Aufnahme von 2 At. Wasserstoff, erfolgt daher ein Energiezuwachs von 36,9 Cal. (Vgl. auch Abhdlg. XXVIII.)

Benzylmalonsäure $C_{10}H_{10}O_4$ . . . . . 194.

Dargestellt nach Conrad. Mehrfach aus heissem Benzol umkrystallisirt. Schmelzpunkt der reinen Krystalle 117°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.	Correction für *Fe* cal.	f. HNO_3 cal.
1.	1,2917	17,1062	14,2084	2,8978	2500	7244,5	9,1	9,9
2.	1,0867	19,0852	16,6455	2,4397	2500	6099,3	9,1	9,0
3.	1,0447	16,9725	14,6257	2,3468	2500	5867,0	9,1	10,0
4.	1,0818	18,6752	16,2465	2,4287	2500	6071,8	9,1	9,1

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. cal.	Mittel = 100
1.	7225,5	5593,8	1085,2	99,96
2.	6081,2	5596,0	1085,6	100,00
3.	5847,9	5597,7	1085,9	100,03
4.	6053,6	5595,9	1085,6	100,00
	Mittel	5595,9	1085,6	für constant. Volum
			1085,9	» » Druck
			199,1	Bildungswärme.

C. Dreibasische Säuren.

Tricarballylsäure $C_6H_8O_6$ . . . . . 176.

Aus der Reihe der nicht substituirten, gesättigten, dreibasischen aliphatischen Säuren haben wir bislang nur die Tricarballylsäure untersucht.

Das dazu dienende Rohpräparat war von Kahlbaum bezogen. Dasselbe wurde durch Behandlung mit Aether, worin die Säure sehr schwer löslich ist, im Soxhlet'schen Extractionsapparate von den in Aether unlöslichen sauren Salzen befreit und dann noch mehrfach aus Wasser umkrystallisirt. Die reine Säure bildet grosse klare Prismen von 165° Schmelzpunkt.

Um die Verbrennungen zu sichern, wurde auf die Pastille der zu verbrennenden Substanz eine geringe Menge von Paraffin, dessen Wärmewerth nach früheren Ermittelungen 11213,4 Cal. pro Grm. betrug, gelegt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Grm.	Paraffin Grm.	ϑ_n Grad	ϑ_1 (corr.) Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a cal.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,1782	0,0349	16,5125	14,9665	1,5460	2500	3865,0
2.	1,6128	0,0083	15,9105	13,9722	1,9383	2500	4845,8
3.	1,3209	0,0096	17,2735	15,6754	1,5981	2500	3995,3

Correction		
für *Fe*	f. HNO_3	f. Paraffin
cal.	cal.	cal.
9,1	4,5	391,3
9,1	4,6	93,1
9,1	2,9	107,6

Wärmewerth

	der Substanz cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. cal.	Mittel = 100
1.	3459,7	2936,4	516,8	99,99
2.	4741,0	2939,6	517,4	100,10
3.	3875,7	2934,1	516,4	99,91
	Mittel 2936,7		516,9	für constant. Volum
			516,3	» » Druck
			323,7	Bildungswärme.

Bei dem stufenweisen Uebergange vom Propan bis zur dreibasischen Tricarballylsäure erfolgt folgende Wärmetönung:

Propan	C_3H_8	523,0 Cal.	
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	520,4 »	— 3,4 Cal.
Glutarsäure	$C_5H_8O_4$	515,0 »	— 5,4 »
Tricarballylsäure	$C_6H_8O_6$	516,3 »	+ 1,3 »

Die Citronensäure leitet sich von der Tricarballylsäure durch Ersatz eines Wasserstoffatomes durch eine Hydroxylgruppe ab.

Der Wärmewerth der Citronensäure $C_6H_8O_7$ ist nach Abhandlung XX[1]) 474,6 Cal. Wir haben demnach:

Tricarballylsäure	546,3 Cal.
Citronensäure	474,6 »

Die Reaction — H + OH entspricht daher hier einer Wärmetönung von — 42,7 Cal.

Eine ganze Reihe von analogen Processen findet sich in Abhandlung XXVI[2]).

Die Besprechung der ungesättigten Säuren wird in einer späteren Abhandlung erfolgen.

---

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], XL, 352.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2], XLV, 346.

SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1893.

Friedrich Engel, *Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe* (Zweite Mittheilung, *mit Beiträgen von* **E. Study**).

Das Folgende enthält den Schluss der Untersuchungen, die im Jahrgange 1892 dieser Berichte erschienen sind (S. 279—291).

§ 3.

Die continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades.

Wir haben gesehen, dass in der allgemeinen projectiven Gruppe jedes beliebigen Raumes jede endliche Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist. Wir wollen jetzt zeigen, dass genau derselbe Satz auch für die in der Ueberschrift bezeichnete Gruppe gilt. In Räumen von gerader Dimensionenzahl ist diese Gruppe bekanntlich überhaupt die grösste projective Gruppe, bei der die betreffende Mannigfaltigkeit invariant bleibt. In Räumen von ungerader Dimensionenzahl dagegen besteht die grösste projective Gruppe, bei der eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant bleibt, aus zwei getrennten continuirlichen Schaaren; die eine von diesen beiden ist eben die continuirliche projective Gruppe der Mannigfaltigkeit, sie ist in der ganzen Gruppe, die von diesen beiden Schaaren gebildet wird, als invariante Untergruppe enthalten.

Es versteht sich von selbst, dass wir beim Beweise unsers Satzes über die in der Ueberschrift bezeichnete Gruppe homogene Coordinaten benutzen. Wir machen das aber so, dass wir gleich einen etwas allgemeineren Satz beweisen, von dem der Satz über die Gruppe der Mannigfaltigkeit zweiten Grades ein besondrer Fall ist. Es ist der folgende:

Satz 3. *Verschwindet die Determinante der quadratischen Form:*

$$\sum_{i\nu}^{1\ldots n} \gamma_{i\nu} x_i x_\nu \tag{22}$$

nicht und ist G die grösste continuirliche lineare homogene Gruppe, bei deren Transformationen die Form (22) *bis auf constante Factoren reproducirt wird, so ist jede endliche Transformation S der Gruppe G von einer infinitesimalen Transformation Xf dieser Gruppe erzeugt und zwar so, dass man die endlichen Gleichungen von S erhält, wenn man in den endlichen Gleichungen:*

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} X x_i + \frac{t^2}{1.2} X X x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf dem Parameter t den Werth 1 ertheilt. Dabei kann man die infinitesimale Transformation Xf immer so wählen, dass sich zwei ungleiche Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung niemals um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Ist dieser Satz bewiesen, so ist damit offenbar zugleich unser Satz über die continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_{n-1} bewiesen. Denn fasst man $x_1 \ldots x_n$ als homogene Coordinaten des R_{n-1} auf, so transformirt G die Punkte dieses Raumes genau so, wie die continuirliche projective Gruppe der Mannigfaltigkeit zweiten Grades, die durch die gleich Null gesetzte Form (22) dargestellt wird.

Für $n = 1$ liegt die Richtigkeit unsers Satzes 3 unmittelbar auf der Hand. Im Falle $n = 2$ denke man sich die Form (22) durch eine lineare homogene Transformation auf die Gestalt: $x_1 x_2$ gebracht. Die Gruppe G lautet dann offenbar:

$$x_1' = a_1 x_1, \quad x_2' = a_2 x_2$$

und es ist klar, dass jede ihrer Transformationen in dem Sinne von Satz 3 von einer infinitesimalen Transformation:

$$Xf = \alpha_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

erzeugt ist. Man braucht nämlich blos: $\alpha_1 = \lg a_1$ und: $\alpha_2 = \lg a_2$ zu setzen. Sollte insbesondere $a_2 = a_1$ sein, so hat man auch $\alpha_2 = \alpha_1$ zu wählen, damit die Wurzeln der zu Xf gehörigen charakteristischen Gleichung sich nicht blos um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Unser Satz gilt also im Falle: $n = 2$ sicher für die Form: $x_1 x_2$; aus Hülfssatz 2 (d. Ber. 1892, S. 289) ergiebt sich daher sofort, dass er im Falle $n = 2$ überhaupt für jede quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante richtig ist.

Wir wissen jetzt, dass unser Satz für $n = 1$ und $n = 2$ gilt. Um ihn allgemein zu beweisen, *nehmen wir an, dass er für jede quadratische Form* (22) *in n Veränderlichen richtig ist, und behaupten, dass er dann auch für jede quadratische Form in* $n + 2$ *Veränderlichen gilt.* Natürlich setzen wir dabei immer voraus, dass die Determinanten der betreffenden quadratischen Formen nicht verschwinden.

Ist in $n + 2$ Veränderlichen eine beliebige quadratische Form mit nicht verschwindender Determinante vorgelegt, so können wir die immer durch eine lineare homogene Transformation auf die Gestalt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1} x_{n+2} \tag{23}$$

bringen und brauchen daher nach Hülfssatz 2 unsre Behauptung nur für die besondere Form (23) zu beweisen. Aber auch da können wir noch eine wesentliche Vereinfachung erzielen.

Zu diesem Zwecke schalten wir wieder einen Hülfssatz ein:

Hülfssatz 3. *Lässt eine endliche oder infinitesimale projective Transformation des* R_n *eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant, so lässt sie stets auch mindestens einen Punkt der Mannigfaltigkeit in Ruhe.*

Für $n = 2$ bedarf dieser Hülfssatz wohl kaum eines Beweises. Dass er für $n > 2$ richtig ist, kann man beweisen, indem man zeigt, dass er für $n = m$ gilt, sobald er für $n = m - 1$ richtig ist. Hat man nämlich im R_m eine endliche oder infinitesimale projective Transformation S, bei der eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit F_2 vom zweiten Grade invariant bleibt,

so lässt S mindestens einen Punkt P in Ruhe. Liegt nun P nicht auf F_2 sondern ausserhalb, so bilden die von P aus an F_2 gezogenen Tangenten eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_{m-1}, es bleibt also, wenn unser Satz im R_{m-1} richtig ist, bei S mindestens eine dieser Tangenten in Ruhe und mit ihr zugleich der Punkt, in dem sie die F_2 berührt, mit andern Worten: ein Punkt auf F_2.

Wenden wir diesen Hülfssatz auf die Form (23) an, so ergiebt sich, dass jede lineare homogene Transformation, die (23) bis auf einen constanten Factor reproducirt, als projective Transformation des R_{n+1} aufgefasst mindestens einen Punkt P invariant lässt, dessen Coordinaten die Form (23) zum Verschwinden bringen. Bedenken wir schliesslich, dass bei der projectiven Gruppe des R_{n+1}, die die Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$(23') \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}x_{n+2} = 0$$

invariant lässt, jeder Punkt dieser Mannigfaltigkeit in jeden andern übergeht, so erkennen wir sofort, *dass jede lineare homogene Transformation, bei der die Form* (23) *bis auf einen constanten Factor reproducirt wird, durch eine lineare homogene Transformation von derselben Beschaffenheit auf eine solche Form gebracht werden kann, dass sie den Punkt:*

$$(24) \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$$

invariant lässt.

Ist nun $\mathfrak{G}$ die grösste continuirliche lineare homogene Gruppe, bei deren Transformationen die Form (23) bis auf constante Factoren reproducirt wird, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Für ungerades n ist nämlich $\mathfrak{G}$ überhaupt die grösste lineare homogene Gruppe von dieser Beschaffenheit. Für gerades n dagegen giebt es ausser der Gruppe $\mathfrak{G}$ noch andre lineare homogene Transformationen, die (23) bis auf constante Factoren reproduciren; alle diese Transformationen bilden aber zusammen eine von $\mathfrak{G}$ getrennte continuirliche Schaar und diese Schaar bildet mit $\mathfrak{G}$ vereinigt eine Gruppe, in der $\mathfrak{G}$ als invariante Untergruppe enthalten ist.

Hieraus folgt, dass $\mathfrak{G}$ unter allen Umständen bei allen Transformationen, die (23) bis auf constante Factoren reproduciren, invariant bleibt. Wollen wir daher beweisen, dass jede endliche Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ von einer infinitesimalen

Transformation von $\mathfrak{G}$ erzeugt ist, *so können wir uns nach dem oben Gesagten und nach dem Hülfssatze* 2 *mit dem Nachweise begnügen, dass jede Transformation von* $\mathfrak{G}$, *die den Punkt* (24) *invariant lässt, von einer infinitesimalen Transformation von* $\mathfrak{G}$ *erzeugt ist, die diesen Punkt invariant lässt.*

Es ist sehr leicht, alle linearen homogenen Transformationen anzugeben, die die Form (23) bis auf constante Factoren reproduciren und ausserdem den Punkt (24) in Ruhe lassen. Soll nämlich eine lineare homogene Transformation diese beiden Eigenschaften besitzen, so muss sie offenbar zugleich die Polarebene: $x_{n+1} = 0$ des Punktes (24) in Ruhe lassen, sie muss also jedenfalls die Form haben:

$$(25)\qquad \begin{cases} x_i' = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu} x_\nu + b_i x_{n+1} \\ x_{n+1}' = b_{n+1} x_{n+1} \\ x_{n+2}' = \sum_1^n{}_\nu c_\nu x_\nu + c_{n+1} x_{n+1} + c_{n+2} x_{n+2} \\ (i = 1 \ldots n) . \end{cases}$$

Ferner muss aus (25) eine Gleichung von der Form:

$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 + x_{n+1}' x_{n+2}' = \varrho\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1} x_{n+2})$$

folgen, es muss also die verkürzte Transformation:

$$(26)\qquad \bar{x}_i = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu} x_\nu \quad (i = 1 \ldots n)$$

so beschaffen sein, dass sie die Form:

$$(27)\qquad x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

mit dem Factor $\frac{1}{\varrho}$ reproducirt, und ausserdem müssen $c_1 \ldots c_{n+1}$ den Gleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} b_{n+1} c_i = -2 \sum_1^n{}_\nu a_{\nu i} b_\nu \\ b_{n+1} c_{n+1} = -\sum_1^n{}_\nu b_\nu^2 \\ b_{n+1} c_{n+2} = \varrho \\ (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

genügen, durch die sie bei gegebenen a_{iv}, b_i, b_{n+1} vollständig bestimmt sind, denn b_{n+1} darf selbstverständlich nicht verschwinden. Demnach erhalten wir die allgemeinste lineare homogene Transformation, die die Form (23) bis auf einen constanten Factor reproducirt und ausserdem den Punkt (24) invariant lässt, folgendermassen: wir bestimmen in (25) die $a_{\nu i}$ so, dass (26) die allgemeinste lineare homogene Transformation wird, die die Form (27) bis auf einen constanten Factor reproducirt, sodann berechnen wir den zugehörigen Werth von ϱ und endlich drücken wir vermöge (28) die Coefficienten $c_1 \ldots c_{n+2}$ durch die $a_{\nu i}$, durch ϱ und durch $b_1 \ldots b_{n+1}$ aus, wo $b_1 \ldots b_{n+1}$ vollkommen willkürlich bleiben, nur dass b_{n+1} nicht verschwinden darf.

Unter den eben definirten Transformationen (25) müssen wir nun alle die aufsuchen, die der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehören. Auch das ist nicht schwer.

Ist nämlich n ungerade, so besteht $\mathfrak{G}$ aus allen linearen homogenen Transformationen, die (23) bis auf constante Factoren reproduciren, demnach sind dann die eben definirten Transformationen (25) alle in $\mathfrak{G}$ enthalten. Ueberdies ist zu bemerken, dass in diesem Falle die bewussten Transformationen (25) eine continuirliche Gruppe bilden, denn wegen der Beschaffenheit von n bilden ja alle Transformationen (26), die (27) bis auf constante Factoren reproduciren, eine continuirliche Gruppe.

Ist andrerseits n ungerade, so zerfallen die Transformationen (26), die (27) bis auf constante Factoren reproduciren, in zwei getrennte continuirliche Schaaren, von denen nur die eine eine continuirliche Gruppe bildet. Dementsprechend zerfallen dann auch die vorhin definirten Transformationen (25) in zwei getrennte continuirliche Schaaren, von denen nur die eine eine continuirliche Gruppe bildet. Da nun diese Schaaren offenbar nicht beide der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehören können, weil sonst $\mathfrak{G}$ aus allen linearen homogenen Transformationen bestände, die (23) bis auf constante Factoren reproduciren, so kann unter den beiden Schaaren, in die unsere Transformationen (25) zerfallen, nur die der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehören, die für sich allein eine continuirliche Gruppe bildet.

Wir können demnach die beiden Fälle: n ungerade und n gerade, zusammenfassen und sagen: Die Transformationen der

Gruppe $\mathfrak{G}$, die den Punkt (24) invariant lassen, bilden eine continuirliche Gruppe, die erhalten wird, wenn man in (25) die $a_{i\nu}$ so bestimmt, dass die verkürzte Transformation (26) die grösste continuirliche lineare homogene Gruppe G darstellt, die (27) bis auf constante Factoren reproducirt, und wenn man ausserdem die übrigen Coefficienten von (25) in der vorhin angegebenen Weise wählt.

Nunmehr machen wir, wie schon oben angekündigt, die Voraussetzung, dass unser Satz 3 für quadratische Formen mit n Veränderlichen bewiesen ist. Ist dann (26) eine ganz beliebige Transformation der eben erwähnten Gruppe G, so sind wir sicher, dass es eine G angehörige infinitesimale Transformation:

$$\overline{X}f = \sum_{i\nu}^{1\ldots n} a_{i\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

giebt, von der die Transformation (26) in dem Sinne erzeugt ist, dass die Gleichungen:

$$\bar{x}_i = x_i + \frac{t}{1}\overline{X}x_i + \frac{t^2}{1.2}\overline{X}\overline{X}x_i + \cdots$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

für $t = 1$ in die Gleichungen (26) übergehen. Wir können ausserdem voraussetzen, dass sich unter den n Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_n$ der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$ keine zwei befinden, die ohne einander gleich zu sein, sich um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Unter den eben beschriebenen Umständen können wir nun aber den Hülfssatz 1 (d. Ber. 1892, S. 287) anwenden und finden daher, dass wir $\beta_1 \ldots \beta_{n+1}$ stets so bestimmen können, dass die Transformation:

$$(25') \qquad \begin{cases} x_i' = \sum_{1}^{n} a_{i\nu} x_\nu + b_i x_{n+1} \\ x_{n+1}' = b_{n+1} x_{n+1} \\ (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

in dem eben beschriebenen Sinne von der infinitesimalen Transformation:

$$Yf = \overline{X}f + \sum_{1}^{n+1} \beta_i x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugt ist. Dabei können $b_1 \dots b_{n+1}$ ganz beliebige Werthe haben, nur b_{n+1} muss $\neq 0$ sein; ausserdem ist $\beta_{n+1} = \lg b_{n+1}$ so zu wählen, dass β_{n+1}, wenn es keiner der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$ gleich ist, sich auch von keiner unter ihnen um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheidet.

Bedenken wir endlich, dass die Transformation (25') die Transformation (25) eindeutig bestimmt, so erkennen wir sofort, dass auch die infinitesimale Transformation Yf eindeutig eine gewisse infinitesimale Transformation:

$$Xf = Yf + \sum_{1}^{n+2} \gamma_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}}$$

bestimmt, die den Ausdruck (23) bis auf einen constanten Factor: $1 + \sigma\delta t$ reproducirt und die infolgedessen der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehört; es wird nämlich einfach:

$$(29) \qquad \begin{cases} \gamma_i = -2\beta_i, \quad \gamma_{n+1} = 0, \quad \beta_{n+1} + \gamma_{n+2} = \sigma \\ (i = 1 \dots n). \end{cases}$$

Zugleich liegt auf der Hand, dass die Transformation (25) von dieser infinitesimalen Transformation Xf genau in derselben Weise erzeugt wird, wie die Transformationen (25') und (26) von den infinitesimalen Transformationen Yf und $\overline{X}f$.

Hiermit ist bewiesen, dass unter der gemachten Voraussetzung jede endliche Transformation von $\mathfrak{G}$, die den Punkt (24) invariant lässt, von einer ebensolchen infinitesimalen Transformation von $\mathfrak{G}$ erzeugt ist, und damit sind wir zugleich sicher, dass überhaupt jede endliche Transformation von $\mathfrak{G}$ von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist. Gleichwohl sind wir noch nicht fertig, denn wir haben noch nicht bewiesen, dass aus der Richtigkeit unsers Satzes 3 für quadratische Formen mit n Veränderlichen seine Richtigkeit für Formen mit $n + 2$ Veränderlichen folgt. Wir müssen vielmehr zu diesem Zwecke noch zeigen, dass sich die infinitesimale Transformation Xf stets so wählen lässt, dass es unter den Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung keine solchen giebt, die sich, ohne einander gleich zu sein, um ganze Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden.

Die charakteristische Gleichung von Xf hat augenscheinlich die Wurzeln: $\omega_1 \dots \omega_n, \beta_{n+1}, \gamma_{n+2}$. Hier sind $\omega_1 \dots \omega_n$ nach S. 665 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$, es ist also:

$$\omega_1 + \cdots + \omega_n = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

Andrerseits ergiebt sich aus:

$$\overline{X}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \sigma(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

dass:

$$2\alpha_{11} = 2\alpha_{22} = \cdots = 2\alpha_{nn} = \sigma$$

ist; verbinden wir endlich hiermit die letzte der Gleichungen (29), so finden wir, dass

$$\omega_1 \cdots \omega_n, \ \beta_{n+1}, \ \gamma_{n+2}$$

in der Beziehung:

$$(30) \qquad 2(\omega_1 + \cdots + \omega_n) = n(\beta_{n+1} + \gamma_{n+2}) = n\sigma$$

stehen.

Eine Relation von ähnlicher Form besteht nun auch zwischen $\omega_1 \dots \omega_n$. Zunächst können wir nämlich die Form: $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ durch eine lineare homogene Transformation auf die Gestalt:

$$(31) \qquad x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}x_n$$

bringen, wobei natürlich auch $\overline{X}f$ eine neue Form Ξf erhält. Sodann können wir ähnlich wie auf S. 662 durch eine lineare homogene Transformation, die (31) bis auf einen constanten Factor reproducirt, erreichen, dass Ξf in eine infinitesimale Transformation $\overline{\Xi}f$ übergeht, die ebenfalls (31) bis auf einen constanten Factor reproducirt und die ausserdem den Punkt: $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ invariant lässt. Für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\overline{\Xi}f$ gilt dann natürlich eine ähnliche Gleichung wie für die Wurzeln von Xf und, da die charakteristischen Gleichungen der drei infinitesimalen Transformationen: $\overline{\Xi}f$, Ξf, $\overline{X}f$ alle drei dieselben Wurzeln haben, so ergiebt sich, dass man die Nummern von $\omega_1 \dots \omega_n$ stets so wählen kann, dass die Gleichung:

$$2(\omega_1 + \cdots + \omega_{n-2}) = (n-2)(\omega_{n-1} + \omega_n)$$

besteht.

Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, dass die Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$ bei geeigneter Wahl ihrer Nummern in den Beziehungen:

$$(32)\quad \begin{cases} 2(\omega_1 + \cdots + \omega_{n-2k}) = (n-2k)(\omega_{n-2k+1} + \omega_{n-2k+2}) \\ \left(0 < k < \frac{n}{2}\right) \end{cases}$$

stehen. Ist daher n ungerade, so folgen hieraus und aus (30) die Relationen:

$$(33)\quad 2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 + \omega_5 = \cdots = \omega_{n-1} + \omega_n = \beta_{n+1} + \gamma_{n+2} = \sigma,$$

ist aber n gerade, so erhält man:

$$(34)\quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \cdots = \omega_{n-1} + \omega_n = \beta_{n+1} + \gamma_{n+2} = \sigma.$$

Es versteht sich von selbst, dass diesen Relationen auch gewisse Relationen zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung der endlichen Transformation (25) entsprechen, denn die Wurzeln dieser letzteren Gleichung haben die Grössen: $\omega_1 \ldots \omega_n$, β_{n+1}, γ_{n+2} zu Logarithmen. Wir wollen uns jedoch dabei nicht aufhalten, sondern jetzt schnell den Beweis unsres Satzes 3 zu Ende führen.

Hierzu bleibt uns, wie wir oben sahen, nur noch zu zeigen, dass sich $\omega_1 \ldots \omega_n$, β_{n+1}, γ_{n+2} stets so wählen lassen, dass sich zwei verschiedene unter diesen Grössen niemals um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Nun sind nach unsrer Voraussetzung $\omega_1 \ldots \omega_n$ von vornherein so beschaffen, dass keine der Differenzen: $\omega_i - \omega_\nu$, die nicht verschwindet, ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ ist, es fragt sich daher nur noch, ob β_{n+1} und γ_{n+2} so wählbar sind, dass auch keine von Null verschiedene unter den Differenzen:

$$\omega_\nu - \beta_{n+1},\ \omega_\nu - \gamma_{n+2},\ \beta_{n+1} - \gamma_{n+2}\ (\nu = 1 \ldots n)$$

ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ wird.

Das ist nun in der That stets möglich. Zur Bestimmung von β_{n+1} und γ_{n+2} haben wir nämlich die Gleichungen:

$$\beta_{n+1} = \lg b_{n+1},\ \gamma_{n+2} = \lg c_{n+2}$$
$$\beta_{n+1} + \gamma_{n+2} = \sigma = \lg \varrho,$$

wo σ durch die Gleichungen (34) eindeutig bestimmt ist. Unter den unendlich vielen Werthen von β_{n+1} und γ_{n+2}, die hierdurch definirt sind, müssen daher solche ausgewählt werden, die unsere Forderungen erfüllen.

Wir unterscheiden zwischen den beiden Fällen: $c_{n+2} \neq b_{n+1}$ und: $c_{n+2} = b_{n+1}$.

Ist: $c_{n+2} \neq b_{n+1}$, so ist $\beta_{n+1} - \gamma_{n+2}$ sicher kein ganzes Vielfaches von $2\pi i$. Ist zugleich keiner unter den unendlich vielen Werthen von $\lg b_{n+1}$ einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$ gleich, so dürfen wir für β_{n+1} einen beliebigen Werth von $\lg b_{n+1}$ setzen, denn es wird dann auch keine der n Differenzen: $\omega_\nu - \beta_{n+1}$ einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ gleich und wegen (33) und (34) gilt von den Differenzen: $\omega_\nu - \gamma_{n+2}$ dasselbe. Ist dagegen einer der Werthe von $\lg b_{n+1}$ gleich einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$, etwa gleich ω_k, so wählen wir $\beta_{n+1} = \omega_k$ und aus (33) und (34) ergiebt sich dann, dass auch γ_{n+2} gleich einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$ wird, es ist daher klar, dass $\omega_1 \dots \omega_\nu$, β_{n+1}, γ_{n+2} unsere Forderungen erfüllen.

Ist: $c_{n+2} = b_{n+2}$, so setzen wir: $\beta_{n+1} = \gamma_{n+2} = \frac{1}{2}\sigma$. Für ungerade Werthe von n ergiebt sich dann aus (33), dass $\beta_{n+1} = \omega_1$ wird, es ist also alles in Ordnung. Für gerade Werthe von n dagegen ist entweder keiner der Werthe von $\lg b_{n+1}$ einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_n$ gleich und dann verhält sich alles wie vorhin, oder es ist einer der Werthe von $\lg b_{n+1}$ gleich einer der Wurzeln ω_ν. Wir können in diesem Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ω_1 einer der Werthe von $\lg b_{n+1}$ ist. Dann ergiebt sich: $\omega_1 = \beta_{n+1} + 2k\pi i$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist; aus der Gleichung:

$$\omega_1 + \omega_2 = \beta_{n+1} + \gamma_{n+2} = 2\beta_{n+1}$$

folgt aber nunmehr: $\omega_2 = \beta_{n+1} - 2k\pi i$, also: $\omega_1 - \omega_2 = 4k\pi i$, eine Gleichung, die unter den gemachten Voraussetzungen nur für $k = 0$ bestehen kann. Wir sehen somit, dass sich β_{n+1} und γ_{n+2} auch im Falle $c_{n+2} = b_{n+1}$ stets so wählen lassen, dass $\omega_1 \dots \omega_n$, β_{n+1}, γ_{n+2} unsre Forderungen erfüllen.

Hiermit ist unser Satz 3 vollständig bewiesen, denn es ist gezeigt, dass aus der Gültigkeit des Satzes bei quadratischen Formen mit n Veränderlichen seine Gültigkeit für quadratische Formen mit $n + 2$ Veränderlichen folgt. Da nun der Satz für $n = 1$ und $n = 2$ sicher richtig ist (vgl. S. 660 f.), so gilt er allgemein.

Erinnern wir uns des auf S. 660 Gesagten, so erkennen wir, dass hiermit zugleich der folgende Satz bewiesen ist:

Satz 4. *Jede endliche Transformation der continuirlichen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten*

$$(32)\quad \begin{cases} 2(\omega_1 + \cdots + \omega_{n-2k}) = (n-2k) & \text{malen} \\ \qquad\qquad (0 < k & \text{ojective} \end{cases}$$

stehen. Ist daher n ungerade,
Relationen:

(33) $2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 + \omega$ ... linearen Complexes.

ist aber n gerade, so erh ... ausgearteten linearen Com-

(34) $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 +$ ... ogenen Coordinaten der Punkte

Es versteht sich vo ... so wählen, dass der Complex durch
Relationen zwisch ... Differentialausdruck:
chung der endli
Wurzeln dies

$$\sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu)$$

$\beta_{n+1}, \gamma_{n+2}$ ... wird. Wir brauchen daher blos nachzuweisen, dass
aufhalten, ... ive Transformation des R_{2n-1}, die den so definirten
Ende füh ... Complex invariant lässt, von einer ebensolchen infini-
Hi ... projectiven Transformation erzeugt ist. Wie im vorigen
dass ... phen ziehen wir aber vor, zunächst einen etwas all-
zwe ... neren Satz zu beweisen, aus dem der Satz über die pro-
Vi ... ive Gruppe des linearen Complexes unmittelbar folgt. Dieser
... gemeinere Satz lautet so:

Satz 5. *Jede lineare homogene Transformation S in den $2n$ veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$, die den Ausdruck* (35) *bis auf einen constanten Factor reproducirt, ist von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation $\overline{X}f$ von derselben Beschaffenheit erzeugt und zwar derart, dass man die Gleichungen der Transformation S erhält, wenn man in den Gleichungen:*

$$(36)\quad \begin{cases} x_i = x_i + \dfrac{t}{1}\overline{X}x_i + \dfrac{t^2}{1.2}\overline{X}\overline{X}x_i + \cdots \\ y_i = y_i + \dfrac{t}{1}\overline{X}y_i + \dfrac{t^2}{1.2}\overline{X}\overline{X}y_i + \cdots \end{cases}$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

---

1) In den Fällen $n = 2, 3, 5$ ist dieser Satz übrigens auch eine unmittelbare Folge des entsprechenden Satzes über die allgemeine projective Gruppe; durch seinen Beweis des Satzes über die allgemeine projective Gruppe hatte daher STUDY diese Fälle bereits mit erledigt.

dem Parameter t den Werth 1 ertheilt.
weichen, dass unter den 2n Wur-
ng von $\overline{X}f$ keine zwei von ein-
ch um ein ganzes Vielfaches

offenbar zugleich ge-
ation des R_{2n-1}, die den

$$\sum_{1}^{n} (x_r dy_r - y_r dx_r) = 0$$

., von einer ebensolchen infinitesimalen projectiven
ation erzeugt ist.

Den Beweis des Satzes 5 führen wir wieder so, dass wir den Satz für den Ausdruck (35) mit $2n$ Veränderlichen als richtig annehmen und nun zeigen, dass er auch für den Ausdruck:

$$(38) \quad \sum_{1}^{n} (x_r dy_r - y_r dx_r) + (x_{n+1} dy_{n+1} - y_{n+1} dx_{n+1})$$

richtig ist. Damit ist dann der Satz allgemein bewiesen, denn für $n = 1$ ist er sicher richtig. Die allgemeinste lineare homogene Transformation in x_1, y_1, die den Ausdruck: $x_1 dy_1 - y_1 dx_1$ bis auf einen constanten Factor reproducirt, ist ja bekanntlich nichts andres, als die allgemeinste lineare homogene Transformation in den Veränderlichen x_1, y_1. Nach Satz 1 (d. Ber. 1892, S. 291) ist aber jede solche lineare homogene Transformation von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt und zwar genau im Sinne unsers Satzes 5.

Wir denken uns also eine beliebige endliche lineare homogene Transformation S gegeben, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt. Unter der Voraussetzung, dass unser Satz 5 für den Ausdruck (35) gilt, soll bewiesen werden, dass S von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt ist, die ebenfalls den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor invariant lässt und deren charakteristische Gleichung die in Satz 5 angegebene Eigenschaft besitzt.

Unsere Transformation S lässt als projective Transformation des R_{2n+1} aufgefasst mindestens einen Punkt P dieses Raumes stehen. Da nun bei der projectiven Gruppe eines nicht ausge-

Grades im Raume von n Dimensionen ist von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt[1]).

Wir wollen jetzt dieselbe Untersuchung für die projective Gruppe des linearen Complexes durchführen.

§ 4.

Die projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes.

Haben wir im R_{2n-1} einen nicht ausgearteten linearen Complex, so können wir die $2n$ homogenen Coordinaten der Punkte des R_{2n-1} bekanntlich stets so wählen, dass der Complex durch den gleich Null gesetzten Differentialausdruck:

$$\sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu) \tag{35}$$

dargestellt wird. Wir brauchen daher blos nachzuweisen, dass jede projective Transformation des R_{2n-1}, die den so definirten linearen Complex invariant lässt, von einer ebensolchen infinitesimalen projectiven Transformation erzeugt ist. Wie im vorigen Paragraphen ziehen wir aber vor, zunächst einen etwas allgemeineren Satz zu beweisen, aus dem der Satz über die projective Gruppe des linearen Complexes unmittelbar folgt. Dieser allgemeinere Satz lautet so:

Satz 5. *Jede lineare homogene Transformation S in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$, die den Ausdruck* (35) *bis auf einen constanten Factor reproducirt, ist von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation $\overline{X}f$ von derselben Beschaffenheit erzeugt und zwar derart, dass man die Gleichungen der Transformation S erhält, wenn man in den Gleichungen:*

$$\begin{cases} \bar{x}_i = x_i + \dfrac{t}{1}\overline{X}x_i + \dfrac{t^2}{1.2}\overline{X}\overline{X}x_i + \cdots \\ \bar{y}_i = y_i + \dfrac{t}{1}\overline{X}y_i + \dfrac{t^2}{1.2}\overline{X}\overline{X}y_i + \cdots \end{cases} \tag{36}$$

$$(i = 1 \dots n)$$

---

1) In den Fällen $n = 2, 3, 5$ ist dieser Satz übrigens auch eine unmittelbare Folge des entsprechenden Satzes über die allgemeine projective Gruppe; durch seinen Beweis des Satzes über die allgemeine projective Gruppe hatte daher STUDY diese Fälle bereits mit erledigt.

der eingliedrigen Gruppe $\overline{X}f$ dem Parameter t den Werth 1 ertheilt. Ausserdem kann man immer erreichen, dass unter den $2n$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$ keine zwei von einander verschiedenen vorkommen, die sich um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Ist dieser Satz bewiesen, so ist damit offenbar zugleich gezeigt, dass jede projective Transformation des R_{2n-1}, die den linearen Complex:

$$(37) \qquad \sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu) = 0$$

invariant lässt, von einer ebensolchen infinitesimalen projectiven Transformation erzeugt ist.

Den Beweis des Satzes 5 führen wir wieder so, dass wir den Satz für den Ausdruck (35) mit $2n$ Veränderlichen als richtig annehmen und nun zeigen, dass er auch für den Ausdruck:

$$(38) \qquad \sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu) + (x_{n+1}\, dy_{n+1} - y_{n+1}\, dx_{n+1})$$

richtig ist. Damit ist dann der Satz allgemein bewiesen, denn für $n = 1$ ist er sicher richtig. Die allgemeinste lineare homogene Transformation in x_1, y_1, die den Ausdruck: $x_1 dy_1 - y_1 dx_1$ bis auf einen constanten Factor reproducirt, ist ja bekanntlich nichts andres, als die allgemeinste lineare homogene Transformation in den Veränderlichen x_1, y_1. Nach Satz 1 (d. Ber. 1892, S. 291) ist aber jede solche lineare homogene Transformation von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt und zwar genau im Sinne unsers Satzes 5.

Wir denken uns also eine beliebige endliche lineare homogene Transformation S gegeben, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt. Unter der Voraussetzung, dass unser Satz 5 für den Ausdruck (35) gilt, soll bewiesen werden, dass S von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt ist, die ebenfalls den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor invariant lässt und deren charakteristische Gleichung die in Satz 5 angegebene Eigenschaft besitzt.

Unsere Transformation S lässt als projective Transformation des R_{2n+1} aufgefasst mindestens einen Punkt P dieses Raumes stehen. Da nun bei der projectiven Gruppe eines nicht ausge-

arteten linearen Complexes im R_{2n+1} jeder Punkt dieses Raumes in jeden andern übergeht, so ist klar, dass wir durch eine lineare, homogene Transformation, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt, erreichen können, dass P in den Punkt:

$$(39) \qquad x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = y_1 = \cdots = y_n = 0$$

übergeht. Wir dürfen daher annehmen, dass S den Punkt (39) invariant lässt und (vgl. Hülfssatz 2) brauchen nur zu beweisen, dass S unter dieser Voraussetzung von einer ebensolchen infinitesimalen Transformation erzeugt ist.

Lässt S den Punkt (39) invariant, so lässt es auch die Polarebene: $x_{n+1} = 0$ invariant, die diesem Punkte von dem durch (38) bestimmten linearen Complexe zugeordnet wird, es hat demnach die Form:

$$(40) \quad \begin{cases} x_i' = \sum_1^n{}_\nu \{a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu\} + k_i x_{n+1} \\ y_i' = \sum_1^n{}_\nu \{c_{i\nu} x_\nu + d_{i\nu} y_\nu\} + l_i x_{n+1} \\ x_{n+1}' = k_{n+1} x_{n+1} \\ y_{n+1}' = \sum_1^n{}_\nu \{c_\nu x_\nu + d_\nu y_\nu\} + c_{n+1} x_{n+1} + d_{n+1} y_{n+1} \\ (i = 1 \ldots n) . \end{cases}$$

Hier stellt augenscheinlich die verkürzte Transformation:

$$(41) \quad \begin{cases} \bar{x}_i = \sum_1^n{}_\nu \{a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu\} \\ \bar{y}_i = \sum_1^n{}_\nu \{c_{i\nu} x_\nu + d_{i\nu} y_\nu\} \\ (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

eine ganz beliebige lineare homogene Transformation dar, die den Ausdruck (35) bis auf einen constanten Factor reproducirt, es muss also vermöge (41) eine Relation von der Form:

$$\sum_1^n{}_\nu (\bar{x}_\nu d\bar{y}_\nu - \bar{y}_\nu d\bar{x}_\nu) = \varrho \sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu)$$

bestehen. Die übrigen Coefficienten der Transformation (40) müssen den Gleichungen:

$$(42)\qquad \begin{cases} k_{n+1}\, c_\nu = \sum_1^n{}_i (a_{i\nu} l_i - c_{i\nu} k_i) \\ k_{n+1}\, d_\nu = \sum_1^n{}_i (b_{i\nu} l_i - d_{i\nu} k_i) \\ k_{n+1}\, d_{n+1} = \varrho \\ (\nu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

genügen. Da nun k_{n+1} selbstverständlich nicht verschwinden darf, so sind $c_1 \ldots c_n$, $d_1 \ldots d_n$, d_{n+1} durch die übrigen Coefficienten vollständig bestimmt, während $k_1 \ldots k_n$, k_{n+1}, $l_1 \ldots l_n$ und c_{n+1} ganz willkürlich bleiben, nur dass eben k_{n+1} nicht null werden darf.

Eine ähnliche Gestalt wie die Transformation (40) hat augenscheinlich auch jede infinitesimale lineare homogene Transformation Xf, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt und die ausserdem den Punkt (39) invariant lässt. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\bar{X}f = \sum_{i\nu}^{1\ldots n}\left[(\alpha_{i\nu} x_\nu + \beta_{i\nu} y_\nu)\frac{\partial f}{\partial x_i} + (\gamma_{i\nu} x_\nu + \delta_{i\nu} y_\nu)\frac{\partial f}{\partial y_i}\right]$$

und:

$$Yf = \bar{X}f + \sum_i^{1\ldots n}\left(\varkappa_i x_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_i x_{n+1}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) + \varkappa_{n+1} x_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}},$$

so erhält Xf die Form:

$$Xf = Yf + \left(\sum_1^n{}_\nu (\gamma_\nu x_\nu + \delta_\nu y_\nu) + \gamma_{n+1} x_{n+1} + \delta_{n+1} y_{n+1}\right)\frac{\partial f}{\partial y_{n+1}}.$$

Sucht man die allgemeinste infinitesimale Transformation Xf von dieser Form, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt, so muss man zunächst $\bar{X}f$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass eine Gleichung von der Form:

$$(43)\quad \bar{X}\left(\sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu)\right) = \sigma \sum_1^n{}_\nu (x_\nu dy_\nu - y_\nu dx_\nu)$$

besteht und sodann muss man $\gamma_1 \dots \gamma_n$, $\delta_1 \dots \delta_n$, δ_{n+1} aus den Gleichungen:

$$(44) \qquad \begin{cases} \gamma_\nu = \lambda_\nu, \ \delta_\nu = -\varkappa_\nu, \ \delta_{n+1} + \varkappa_{n+1} = \sigma \\ (\nu = 1 \dots n) \end{cases}$$

bestimmen, während $\lambda_1 \dots \lambda_n$, $\varkappa_1 \dots \varkappa_n$, $\varkappa_{n+1}$, γ_{n+1} willkürlich bleiben.

Wir wollen gleich noch einige andre Eigenschaften der infinitesimalen Transformation Xf ableiten.

Sind: $\omega_1 \dots \omega_{2n}$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$, so sind offenbar: $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, $\varkappa_{n+1}$, δ_{n+1} die der charakteristischen Gleichung von Xf. Nun ist aber wegen der Form von $\overline{X}f$:

$$\omega_1 + \dots + \omega_{2n} = \sum_1^n{}^\nu (\alpha_{\nu\nu} + \beta_{\nu\nu}),$$

andrerseits folgt aus (43):

$$\alpha_{11} + \beta_{11} = \dots = \alpha_{nn} + \beta_{nn} = \sigma,$$

also ergiebt sich mit Berücksichtigung von (44):

$$(45) \qquad \omega_1 + \dots + \omega_{2n} = n\sigma = n(\varkappa_{n+1} + \delta_{n+1}).$$

Eine Gleichung von dieser Form besteht daher immer, wenn $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, $\varkappa_{n+1}$, δ_{n+1} die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer infinitesimalen Transformation Xf sind, die den Ausdruck (38) bis auf einen constanten Factor reproducirt. Wendet man dieses Ergebniss auf die infinitesimale Transformation $\overline{X}f$ an und wiederholt man dieses Verfahren genügend oft, so erkennt man ähnlich wie im vorigen Paragraphen, dass sich $\omega_1 \dots \omega_{2n}$ stets so nummeriren lassen, dass sie in Beziehungen von der Form:

$$(46) \qquad \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{2\varkappa} = \varkappa(\omega_{2\varkappa+1} + \omega_{2\varkappa+2}) \\ (\varkappa = 1, 2 \dots n) \end{cases}$$

stehen; wegen (45) erhält man daher einfach:

$$(47) \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \dots = \omega_{2n-1} + \omega_{2n} = \varkappa_{n+1} + \delta_{n+1} = \sigma,$$

Gleichungen, die uns nachher von grossem Nutzen sein werden.

Nunmehr setzen wir, wie oben angekündigt, voraus, dass unser Satz 5 für den Ausdruck (35) mit $2n$ Veränderlichen

richtig ist. Wir können daher annehmen, dass unsre verkürzte Transformation (41) im Sinne von Satz 5 von einer infinitesimalen Transformation $\overline{X}f$ erzeugt ist und dass sich unter den Wurzeln: $\omega_1 \dots \omega_{2n}$ der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$ keine zwei, ohne einander gleich zu sein, um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Unser Satz 5 wird dann allgemein bewiesen sein, wenn es uns gelingt nachzuweisen, dass die Transformation (40) stets im Sinne von Satz 5 von einer infinitesimalen Transformation Xf erzeugt ist, welche Werthe auch: $k_1 \dots k_n, k_{n+1}, l_1 \dots l_n, c_{n+1}$ haben mögen, und dass auch unter den Wurzeln: $\omega_1 \dots \omega_{2n}, \varkappa_{n+1}, \delta_{n+1}$ der charakteristischen Gleichung von Xf keine zwei von einander verschiedenen vorhanden sind, die sich um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, dass $k_{n+1} \neq 0$ ist.

Unter der gemachten Annahme sind für die Transformation:

$$(48)\qquad \begin{cases} x_i' &= \sum_1^n{}_\nu \{a_{i\nu} x_\nu + b_{i\nu} y_\nu\} + k_i x_{n+1} \\ y_i' &= \sum_1^n{}_\nu \{c_{i\nu} x_\nu + d_{i\nu} y_\nu\} + l_i x_{n+1} \\ x_{n+1}' &= \qquad\qquad\qquad k_{n+1} x_{n+1} \\ & \qquad (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

alle Bedingungen des Hülfssatzes 1 (d. Ber. 1892, S. 287) erfüllt, es ist daher sicher möglich $\varkappa_1 \dots \varkappa_n, \varkappa_{n+1}, \lambda_1 \dots \lambda_n$ so zu bestimmen, dass die Transformation (48) im Sinne von Satz 5 von der infinitesimalen Transformation:

$$Yf = \overline{X}f + \sum_1^n{}_i \left(\varkappa_i x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_i x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i}\right) + \varkappa_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}$$

erzeugt ist. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur $\varkappa_{n+1} = \lg k_{n+1}$ so zu bestimmen, dass keiner unter den von Null verschiedenen unter den $2n$ Ausdrücken: $\omega_\nu - \varkappa_{n+1}$ gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ wird.

Aus gewissen Gründen wollen wir aber gleich jetzt noch etwas näher bestimmen, wie $\varkappa_{n+1}$ gewählt werden soll.

Wie wir oben gesehen haben, lassen sich die Wurzeln

$\omega_1 \dots \omega_{2n}$ der charakteristischen Gleichung von $\overline{X}f$ stets so benennen, dass die Relationen:

$$(49) \qquad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \cdots = \omega_{2n+1} + \omega_{2n} = \sigma$$

bestehen, wo die Gleichung (43) den Werth von σ eindeutig bestimmt. Ist nun zunächst $k_{n+1} \neq d_{n+1}$, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder nämlich ist unter den unendlich vielen Werthen von $\lg k_{n+1}$ keiner gleich einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_{2n}$ oder es ist einer und wegen der gemachten Voraussetzungen auch nur einer der Werthe von $\lg k_{n+1}$ gleich einer der Wurzeln $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, etwa gleich ω_m. Im ersten Falle wählen wir $\varkappa_{n+1}$ gleich einem beliebigen der Werthe von $\lg k_{n+1}$, im zweiten wählen wir $\varkappa_{n+1} = \omega_m$. Es ist klar, dass bei dieser Wahl von $\varkappa_{n+1}$ keine von Null verschiedene unter den $2n$ Differenzen: $\omega_\nu - \varkappa_{n+1}$ gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ werden kann. Ist andererseits: $k_{n+1} = d_{n+1}$ und also nach (42) zugleich: $k_{n+1}^2 = \varrho$, so berücksichtigen wir, dass $\sigma = \lg \varrho$ ist, und wählen: $\varkappa_{n+1} = \frac{1}{2}\sigma$. Aus (49) geht dann hervor, dass auch jetzt keine von Null verschiedene unter den $2n$ Differenzen: $\omega_\nu - \varkappa_{n+1}$ gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ sein kann.

Demnach ist jetzt $\varkappa_{n+1}$ so gewählt, dass jedenfalls die Wurzeln: $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, $\varkappa_{n+1}$ der charakteristischen Gleichung von Yf unsre Forderung erfüllen.

Nach diesen Vorbereitungen denken wir uns $\gamma_1 \dots \gamma_n$, $\delta_1 \dots \delta_n$, δ_{n+1} aus den Gleichungen (44) berechnet und bilden die infinitesimale Transformation:

$$Xf = Yf + \left\{ \sum_1^n{}_\nu (\gamma_\nu x_\nu + \delta_\nu y_\nu) + \gamma_{n+1} x_{n+1} + \delta_{n+1} y_{n+1} \right\} \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}},$$

indem wir uns die Verfügung über γ_{n+1} noch vorbehalten. Nach S. 673 f. lässt dann Xf den Ausdruck (38) sicher bis auf einen constanten Factor invariant und zwar wird offenbar:

$$(50) \quad X\left(\sum_1^{n+1}{}_\nu (x_\nu\, dy_\nu - y_\nu\, dx_\nu) \right) = \sigma \cdot \sum_1^{n+1}{}_\nu (x_\nu\, dy_\nu - y_\nu\, dx_\nu) .$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von Xf werden: $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, $\varkappa_{n+1}$, δ_{n+1} und unter diesen giebt es in Folge der Wahl, die wir für $\varkappa_{n+1}$ getroffen haben, keine zwei, die ohne einander gleich zu sein, sich um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Da nämlich $\omega_1 \dots \omega_{2n}$, $\varkappa_{n+1}$, δ_{n+1} offenbar den

Gleichungen (47) genügen und da keine von Null verschiedene unter den Differenzen: $\omega_i - \omega_\nu$, $\omega_i - \varkappa_{n+1}$ gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ ist, so muss von den Differenzen $\omega_i - \delta_{n+1}$ dasselbe gelten. Da andrerseits $\varkappa_{n+1} = \lg k_{n+1}$, ferner $\sigma = \lg \varrho$ und $\varrho = k_{n+1} \cdot d_{n+1}$ ist, so kann $\varkappa_{n+1} - \delta_{n+1}$ nur dann gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ sein, wenn $k_{n+1} = d_{n+1}$ ist; in diesem Falle wird aber nach den vorhin getroffenen Festsetzungen: $\varkappa_{n+1} = \frac{1}{2}\sigma = \delta_{n+1}$, also $\varkappa_{n+1} - \delta_{n+1} = 0$.

Wir erinnern jetzt daran, dass die verkürzte Transformation (41) im Sinne des Satzes 5 von der infinitesimalen Transformation $\overline{Xf}$ erzeugt ist, dass also die Gleichungen (36) für $t = 1$ die Form (41) annehmen. Ferner erinnern wir daran, dass die Transformation (48) in demselben Sinne von der infinitesimalen Transformation Yf erzeugt ist. Endlich erinnern wir noch daran, dass nach S. 672 f. alle Coefficienten der Transformation (40) mit Ausnahme von c_{n+1} durch die Coefficienten von (48) vollständig bestimmt sind. Aus alledem geht hervor, dass die Gleichungen:

$$(51)\quad \left\{ \begin{array}{l} x_i' = x_i + \dfrac{t}{1} Xx_i + \cdots, \quad y_i' = y_i + \dfrac{t}{1} Yy_i + \cdots \\ \qquad\qquad (i = 1 \ldots n+1) \end{array} \right.$$

für $t = 1$ eine Form annehmen, die fast ganz mit den Gleichungen (40) übereinstimmt; für $t = 1$ stimmen nämlich alle Coefficienten von (51) mit denen von (40) überein bis auf den Coefficienten von x_{n+1} in der Gleichung für y_{n+1}'. Es fragt sich daher nur noch, ob es möglich ist, in Xf den Werth von γ_{n+1} so zu wählen, dass auch jener letzte Coefficient in (51) für $t = 1$ mit dem entsprechenden Coefficienten von (40) übereinstimmt, das heisst, gleich c_{n+1} wird.

Um zu zeigen, dass das möglich ist, denken wir uns die Gleichungen (51) durch Integration bestimmt:

$$(52)\quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i' & = \sum_1^n{}_\nu \{A_{i\nu} x_\nu + B_{i\nu} y_\nu\} + K_i x_{n+1} \\ y_i' & = \sum_1^n{}_\nu \{C_{i\nu} x_\nu + D_{i\nu} y_\nu\} + L_i x_{n+1} \\ x_{n+1}' & = \qquad\qquad K_{n+1} x_{n+1} \\ y_{n+1}' & = \sum_1^n{}_\nu \{C_\nu x_\nu + D_\nu y_\nu\} + C_{n+1} x_{n+1} + D_{n+1} y_{n+1} \\ & \qquad (i = 1 \ldots n). \end{array} \right.$$

Hier sind die Coefficienten gewisse Functionen von t, die alle mit Ausnahme von C_{n+1} schon durch die Coefficienten der infinitesimalen Transformation Yf bestimmt sind, denn die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Xf stehen natürlich zu den endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Yf genau in derselben Beziehung wie die Transformation (40) zu der Transformation (48). Demnach ist C_{n+1} der einzige Coefficient der Gleichungen (52), der von γ_{n+1} abhängt. Gelingt es uns daher γ_{n+1} so zu bestimmen, dass C_{n+1} für $t=1$ den Werth c_{n+1} annimmt, so fällt die Transformation (52) für $t=1$ mit der Transformation (40) zusammen und wir sind fertig.

Setzt man die aus (52) folgenden Werthe der x', y' in die Differentialgleichung:

$$(53)\quad \frac{dy'_{n+1}}{dt} = \sum_1^n{}_\nu (\gamma_\nu x'_\nu + \delta_\nu y'_\nu) + \gamma_{n+1} x'_{n+1} + \delta_{n+1} y'_{n+1}$$

ein, so muss man eine Identität bekommen. Vergleicht man daher die Coefficienten von x_{n+1} auf beiden Seiten, so erhält man für C_{n+1} die Differentialgleichung:

$$\frac{dC_{n+1}}{dt} = \sum_1^n{}_\nu (\gamma_\nu K_\nu + \delta_\nu L_\nu) + \gamma_{n+1} K_{n+1} + \delta_{n+1} C_{n+1},$$

wozu noch die Anfangsbedingung: $C_{n+1}=0$ für $t=0$ kommt. Durch Integration ergibt sich hieraus wegen:

$$K_{n+1} = e^{\varkappa_{n+1} t}$$

der Werth:

$$e^{-\delta_{n+1} t} C_{n+1} = \sum_1^n{}_\nu \int_0^t \{\gamma_\nu K_\nu + \delta_\nu L_\nu\} e^{-\delta_{n+1} t} dt +$$

$$+ \gamma_{n+1} \frac{e^{(\varkappa_{n+1} - \delta_{n+1}) t} - 1}{\varkappa_{n+1} - \delta_{n+1}}.$$

Demnach wird C_{n+1}, da $K_1 \dots K_n$, $L_1 \dots L_n$ von γ_{n+1} frei sind, eine lineare Function von γ_{n+1}; die Forderung: $C_{n+1} = c_{n+1}$ für $t=1$ lässt sich daher dann und nur dann durch geeignete Wahl von γ_{n+1} befriedigen, wenn der Coefficient von γ_{n+1} für $t=1$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Das ist nun in der That der Fall, denn wir haben $\varkappa_{n+1}$ und δ_{n+1} so ge-

wählt, dass die Differenz: $x_{n+1} - \delta_{n+1}$ nur dann gleich einem ganzen Vielfachen von $2\pi i$ wird, wenn sie verschwindet.

Damit ist bewiesen, dass die infinitesimale Transformation Xf unter den gemachten Voraussetzungen stets so gewählt werden kann, dass sie die Transformation (40) im Sinne des Satzes 5 erzeugt und dass auch die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichungen alle Forderungen dieses Satzes erfüllen. Der Satz 5 ist also nach S. 671 allgemein bewiesen und infolgedessen (vgl. S. 670) zugleich auch der

Satz 6. *Jede endliche projective Transformation des R_{2n-1}, die einen nicht ausgearteten linearen Complex dieses Raumes invariant lässt, ist von einer infinitesimalen projectiven Transformation des R_{2n-1} erzeugt, die diesen linearen Complex invariant lässt.*

§ 5.

Sätze von Study über die Erzeugung projectiver Gruppen.

Wie bereits erwähnt, hatte STUDY den Satz 2 (d. Ber. 1892, S. 291) schon bewiesen, bevor ich mich mit diesen Untersuchungen beschäftigte. Ich werde jetzt mit STUDYS Erlaubniss diesen seinen Beweis mittheilen. Ich thue das um so lieber, weil erstens der STUDYSche Beweis methodische Vorzüge vor dem meinigen besitzt und weil zweitens STUDY mit der allgemeinen projectiven Gruppe zugleich eine grosse Kategorie von andern projectiven Gruppen erledigt.

Jede lineare homogene Transformation in N Veränderlichen ist bekanntlich durch eine bilineare Form:

$$T = \sum_{i\nu}^{1\ldots N} a_{i\nu} x_i u_\nu$$

mit einer Reihe von Punkt- und einer Reihe von Ebenencoordinaten bestimmt. Ist ferner:

$$U = \sum_{\nu\mu}^{1\ldots N} b_{\nu\mu} x_\nu u_\mu$$

eine zweite solche bilineare Form, so stellt die bilineare Form:

$$\sum_{i\nu\mu}^{1\ldots N} a_{i\nu} b_{\nu\mu} x_i u_\mu \tag{54}$$

die lineare homogene Transformation dar, die entsteht, wenn man zuerst die Transformation T und dann die Transformation U ausführt. Wir bezeichnen daher nach dem Vorgange von FROBENIUS die Form (54) als das Product der Formen T und U, und schreiben dafür TU. Dabei ist es, nebenbei bemerkt, ganz gleichgültig, ob die betreffenden linearen homogenen Transformationen wirkliche Transformationen oder ob sie ausgeartet sind.

Bildet man die Potenzen T, T^2, ... der Form T und setzt man:

$$T^0 = \sum_1^N{}_\nu \, x_\nu u_\nu ,$$

so giebt es immer eine gewisse kleinste positive ganze Zahl $n \leqq N$ von solcher Beschaffenheit, dass T^0, T^1, ... T^{n-1} linear unabhängig von einander sind, während T^n sich in der Form:

$$T^n = A_1 T^{n-1} + \cdots + A_{n-1} T + A_n T^0 \tag{55}$$

darstellen lässt. Die algebraische Gleichung:

$$\lambda^n = A_1 \lambda^{n-1} + \cdots + A_{n-1} \lambda + A_n \tag{56}$$

nennen wir dann mit STUDY die *reducirte charakteristische Gleichung* der Form T.

STUDY hat nun folgenden Satz[1]) bewiesen.

Satz 1 von Study. *Ist T irgend eine bilineare Form mit zwei Reihen von je N Veränderlichen und sind $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ die von einander verschiedenen unter den Wurzeln ihrer reducirten charakteristischen Gleichung, ist endlich die Wurzel λ_k jedesmal gerade h_k-fach, so kann man immer und zwar nur auf eine Weise $2m$ bilineare Formen: $T_1 \ldots T_m$, $\Theta_1 \ldots \Theta_m$ so bestimmen, dass erstens:*

$$\left| \begin{array}{l} T^0 = \sum_1^m{}_k \, T_k \\ T \;\; = \sum_1^m{}_k \, (\lambda_k T_k + \Theta_k) \end{array} \right. \tag{57}$$

wird und dass zweitens die Formen: $T_1 \ldots T_m$, $\Theta_1 \ldots \Theta_m$ in den Beziehungen

---

1) In der Arbeit: Recurrirende Reihen und bilineare Formen, Wiener Monatshefte 1894, S. 23 ff., vgl. insbesondere S. 47 f.

$$(58)\qquad \begin{cases} T_i T_k = \varepsilon_{ik} T_i,\ \Theta_i \Theta_k = \varepsilon_{ik} \Theta_k \Theta_i,\ \Theta_i^{h_i} = 0 \\ T_i \Theta_k = \Theta_k T_i = \varepsilon_{ik} \Theta_i \\ (i, k = 1 \dots m) \end{cases}$$

stehen. Jede Potenz von T ist linear durch die Formen: T_k, Θ_k, $\Theta_k^2 \dots \Theta_k^{h_k - 1}$ $(k = 1 \dots m)$ ausdrückbar und umgekehrt sind die eben genannten Formen wiederum linear durch T^0, $T^1 \dots T^{n-1}$ ausdrückbar.

Wir wollen nun annehmen, dass die bilineare Form, von der in diesem Satze die Rede ist, eine nicht ausgeartete lineare homogene Transformation darstellt, und wollen auf dem von STUDY angegebenen Wege zeigen, dass diese Transformation von einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation erzeugt ist.

Zu diesem Zwecke bilden wir zunächst eine continuirliche lineare homogene Gruppe, die die Transformation T enthält und die aus lauter vertauschbaren Transformationen besteht, und sodann berechnen wir alle in dieser Gruppe enthaltenen infinitesimalen Transformationen, von denen T erzeugt ist.

Eine Gruppe von der angegebenen Eigenschaft ist die n-gliedrige, die aus den ∞^n linearen homogenen Transformationen:

$$(59)\qquad a_0 T^0 + a_1 T^1 + \dots + a_{n-1} T^{n-1}$$

besteht. Unter den gemachten Voraussetzungen sind das nämlich sicher ∞^n verschiedene Transformationen, zu denen insbesondere T gehört. Dass diese Transformationen paarweise vertauschbar sind, ist klar; dass sie eine Gruppe bilden, folgt daraus, dass die n^{te} und alle höheren Potenzen von T sich linear durch T^0, $T^1 \dots T^{n-1}$ ausdrücken lassen. Auch die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe (59) ist leicht angebbar, sie hat nämlich einfach die Form:

$$(60)\qquad T^0 + \{e_0 T^0 + e_1 T^1 + \dots + e_{n-1} T^{n-1}\}\, \delta t$$

und es kommt daher nur darauf an, $e_0, e_1 \dots e_{n-1}$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass T gerade von der infinitesimalen Transformation (60) erzeugt wird.

Nach dem STUDYschen Satze lässt sich die allgemeine infinitesimale Transformation (60) unsrer Gruppe auch in der Form:

$$T^0 + \sum_1^m{}_k \left[\alpha_k T_k + \sum_1^{h_k - 1}{}_\tau \beta_{k\tau} \Theta_k^\tau \right] \delta t \tag{60'}$$

darstellen, wo die α und β wieder willkürliche Parameter sind. Setzen wir hier die bilineare Form, die als Factor von δt auftritt, gleich S, so lauten die endlichen Transformationen der von (60') erzeugten eingliedrigen Gruppe so:

$$T^0 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{t^\nu}{\nu!} S^\nu. \tag{61}$$

Demnach müssen wir versuchen, die allgemeinsten Werthe der α und β zu finden, bei deren Einsetzung der Ausdruck (61) für $t = 1$ die Form T annimmt.

Vergleichen wir den Ausdruck (61), nachdem wir vorher $t = 1$ gesetzt haben, mit T und berücksichtigen wir die Gleichungen (57) und die Multiplicationsregeln (58), so ergiebt sich eine Gleichung, die sofort in die m folgenden zerfällt:

$$\lambda_k T_k + \Theta_k = T_k + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \left(\alpha_k T_k + \sum_1^{h_k - 1}{}_\tau \beta_{k\tau} \Theta_k^\tau \right)^\nu$$
$$(k = 1 \ldots m).$$

Die Factoren von T_k müssen auf beiden Seiten übereinstimmen, also wird $\lambda_k = e^{\alpha_k}$ und somit $\alpha_k = \lg \lambda_k$. Was übrig bleibt lässt sich wegen (58) auch so schreiben:

$$\Theta_k = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \left(\alpha_k + \sum_1^{h_k - 1}{}_\tau \beta_{k\tau} \Theta_k^\tau \right)^\nu - \sum_1^\infty{}_\nu \frac{\alpha_k^\nu}{\nu!}$$

oder auch so:

$$\Theta_k = e^{\alpha_k} \left\{ e^{\sum_1^{h_k - 1}{}_\tau \beta_{k\tau} \Theta_k^\tau} - 1 \right\},$$

demnach werden die $\beta_{k\tau}$ durch die Gleichung:

$$\sum_1^{h_k - 1}{}_\tau \beta_{k\tau} \Theta_k^\tau = \lg \left(1 + \frac{\Theta_k}{\lambda_k} \right)$$
$$= \frac{\Theta_k}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_k}{\lambda_k} \right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{h_k}}{h_k - 1} \left(\frac{\Theta_k}{\lambda_k} \right)^{h_k - 1}$$

bestimmt.

Die allgemeinste in der Gruppe (59) enthaltene infinitesimale Transformation, von der die Transformation T erzeugt ist, hat in Folge dessen die Form[1]):

$$(62) \qquad T^0 + \sum_1^m {}_k \left\{ \lg \lambda_k \cdot T_k + \sum_1^{h_k - 1} {}_\tau \frac{(-1)^{\tau+1}}{\tau} \cdot \left(\frac{\Theta_k}{\lambda_k}\right)^\tau \right\} \delta t ;$$

sie ist, wie man sieht, immer eine brauchbare infinitesimale Transformation, es müsste denn eine der Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_m$ verschwinden, was aber hier nicht eintreten kann, da T keine ausgeartete Transformation ist.

Durch das eben gewonnene Ergebniss ist nun Study in den Stand gesetzt, den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Satz 2 von Study. *Ist eine lineare homogene Gruppe in N Veränderlichen so beschaffen, dass sich die Coefficienten ihrer allgemeinen endlichen Transformation als lineare homogene Functionen der Parameter der Gruppe darstellen lassen, so ist jede endliche Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt.*

In der That, ist G eine solche Gruppe und ist T irgend eine nicht ausgeartete lineare homogene Transformation, die ihr angehört, so sind in G nicht blos die Transformationen: $T, T^2, T^3 \dots$ enthalten, sondern auch jede Transformation von der Form:

$$a_1 T + a_2 T^2 + \cdots .$$

Besteht nun die Identität:

$$T^n = A_1 T^{n-1} + \cdots + A_{n-1} T + A_n T^0 ,$$

wo n dieselbe Bedeutung hat wie auf S. 680, so kann A_n nicht verschwinden, weil T sonst ausgeartet wäre, folglich enthält G auch die Transformation T^0 und damit überhaupt jede Transformation der oben besprochenen Gruppe (59). Da wir aber bewiesen haben, dass jede endliche Transformation der Gruppe (59) von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist, so ist damit zugleich unser Satz bewiesen.

---

1) Study weist ausdrücklich darauf hin, dass die formale Uebereinstimmung des Coefficienten von δt mit der Reihe für $\lg(x + \lambda_k)$ nicht überraschen kann und dass sie sich durch eine Bemerkung erklärt, die er in seiner Abhandlung »über complexe Zahlen mit Transformationsgruppen« gemacht hat (s. d. Ber. 1889, S. 210 f.). Die Formel (V) dort liefert für: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = \lambda_k$ geradezu einen besonderen Fall der Reihe in (62).

Die Uebertragung dieses Satzes auf projective Gruppen des R_{N-1} liegt auf der Hand. Es ergiebt sich unter Anderm, dass die allgemeine projective Gruppe, die allgemeine lineare, die allgemeine lineare homogene sämmtlich die Eigenschaft haben, dass jede ihrer endlichen Transformationen von einer ihrer infinitesimalen Transformationen erzeugt ist. Dasselbe gilt überhaupt von jeder projectiven Gruppe des R_{N-1}, die keine krummen sondern nur ebene Mannigfaltigkeiten des R_{N-1} in Ruhe lässt und durch die bei ihr invarianten ebenen Mannigfaltigkeiten vollständig definirt ist.

§ 6.

Betrachtungen Studys über die specielle lineare homogene Gruppe der Ebene.

Zu den Untersuchungen, die ich in § 1—4 angestellt habe, bin ich, wie schon angedeutet (d. Ber. 1892, S. 279, Anm.), durch die Bemerkung veranlasst worden, dass nicht jede endliche Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist. STUDY, dem ich meine Bemerkung mittheilte, hat mir ein Manuscript zur Verfügung gestellt, in dem er sich eingehend mit diesem merkwürdigen Verhalten der genannten Gruppe beschäftigt und den inneren Grund dafür entwickelt. Dieses Manuscript liegt dem gegenwärtigen Paragraphen zu Grunde, der mithin auch als STUDYS Eigenthum zu betrachten ist.

Wir betrachten für einen Augenblick die allgemeine lineare homogene Gruppe der Ebene. Bei Benutzung homogener Coordinaten hat die allgemeine Transformation dieser Gruppe die Form:

$$(63) \qquad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 \\ x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}.$$

Statt der eben geschriebenen Gleichungen werden wir auch die abgekürzte Schreibweise benutzen, indem wir die allgemeine Transformation unserer Gruppe durch die gleich Null gesetzte bilineare Form:

$$(64) \qquad S = a_{00}x_0u_0 + \mathfrak{S}$$

darstellen, wo

$$\mathfrak{S} = a_{11}x_1u_1 + a_{21}x_1u_2 + a_{12}x_2u_1 + a_{22}x_2u_2$$

die Veränderlichen x_0, u_0 nicht mehr enthält.

Die Grösse a_{00} und die Determinante:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

der Form $\mathfrak{S}$ müssen von Null verschieden sein, wenn die Gleichungen (63) oder die äquivalente Gleichung: $S = 0$ eine nicht ausgeartete Transformation darstellen sollen.

Die Gruppe (63) enthält eine eingliedrige invariante Untergruppe G_1, deren Transformationen mit allen Transformationen (63) vertauschbar sind, nämlich die Gruppe der perspectiven Transformationen:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

die jeden Strahl des Punktes: $u_0 = 0$ und jeden Punkt der Geraden: $x_0 = 0$ in Ruhe lassen. Jede nicht in dieser Untergruppe enthaltene Transformation (63) lässt ein bestimmtes Strahlenpaar:

$$a_{21}x_1^2 + (a_{22} - a_{11})x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = 0$$

des Punktes: $u_0 = 0$ und ein gewisses Punktepaar:

$$-a_{12}u_1^2 + (a_{11} - a_{22})u_1u_2 + a_{21}x_2^2 = 0$$

der Geraden: $x_0 = 0$ in Ruhe, insbesondere aber einen Doppelstrahl und einen Doppelpunkt, wenn der Ausdruck:

$$(65) \qquad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta$$

den Werth Null hat. Wir erwähnen noch, dass die zuletzt genannten besondern Transformationen eine irreducible Mannigfaltigkeit bilden; die quadratische Form (65) ist ja als Summe von drei Quadraten darstellbar und kann daher nicht in zwei lineare Factoren zerlegt werden.

Ausser der besprochenen eingliedrigen Gruppe G_1 giebt es in der Gruppe (63) noch eine zweite continuirliche invariante Untergruppe G_3, eben die specielle lineare homogene Gruppe, die hier untersucht werden soll. Sie ist definirt durch die Gleichung:

$$(66) \qquad a_{00}^2 = \Delta;$$

in der That ist die Schaar von Transformationen, die durch diese Gleichung aus der Schaar (1) abgeschieden wird, irreducibel, denn die Form $\Delta - a_{00}^2$ ist als Summe von fünf Quadraten darstellbar.

Die Gruppe G_3 enthält ausser der identischen Transformation noch *eine* ausgezeichnete Transformation, nämlich die perspective Transformation:

$$-x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 = 0\ , \tag{67}$$

in der sie von der Gruppe G_4 durchdrungen wird. Es ist das beiläufig bemerkt die einzige *involutorische* Transformation der G_3. Will man die G_3 isomorph auf die allgemeine projective Gruppe der Geraden beziehen, so muss man der Transformation (67) die identische Transformation entsprechen lassen. Den ∞^2 involutorischen Transformationen, die es in der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden giebt, entsprechen dabei Transformationen von der Periode vier.

Die Transformationen unsrer G_3, die nur einen Strahl des Punktes $u_0 = 0$ und nur einen Punkt der Geraden: $x_0 = 0$ in Ruhe lassen, besitzen nun eine merkwürdige Eigenschaft: sie zerfallen nämlich, wie aus der Gleichung (65) unmittelbar hervorgeht, in zwei getrennte Schaaren, von denen die eine:

$$a_{11} + a_{22} - 2a_{00} = 0 \tag{68}$$

die identische Transformation enthält, während der andern:

$$a_{11} + a_{22} + 2a_{00} = 0 \tag{69}$$

die involutorisch-perspective Transformation (67) angehört.

Wir betrachten jetzt die in unsrer G_3 enthaltenen *infinitesimalen* Transformationen, ihre Bahncurven und die von ihnen erzeugten endlichen Transformationen.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$T^0 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 \tag{70}$$

und:

$$T = c_{11}x_1u_1 + c_{21}x_1u_2 + c_{12}x_2u_1 + c_{22}x_2u_2\ , \tag{71}$$

so können wir die allgemeine infinitesimale Transformation von G_3 durch die gleich Null gesetzte bilineare Form:

$$T^0 + (c_{00}x_0u_0 + T)\,\delta t$$

darstellen, wo die c_{ik} in der Beziehung: $c_{11} + c_{22} = 2c_{00}$ stehen und wo der Factor von δt das Liesche Symbol der betreffenden infinitesimalen Transformation ist. Da nun aber zwei solche infinitesimale Transformationen, deren Symbole sich blos um ein Vielfaches von: $x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2$ unterscheiden, in der Ebene beide dieselbe infinitesimale Transformation darstellen, so können wir c_{00} immer gleich Null setzen und erhalten somit für die allgemeine infinitesimale Transformation unsrer G_3 die einfachere Darstellung:

$$T^0 + T\,\delta t, \tag{72}$$

wo die c_{ik} der Bedingung:

$$c_{11} + c_{22} = 0 \tag{73}$$

genügen müssen.

Man sieht leicht, dass die Bahncurven der infinitesimalen Transformation (72) *Kegelschnitte* sind, die das fest bleibende Strahlenpaar des Punktes: $u_0 = 0$ in den zugehörigen Punkten der Geraden: $x_0 = 0$ berühren. In Punktcoordinaten werden diese Bahncurven dargestellt durch die Gleichung:

$$\lambda x_0^2 + \mu(c_{21} x_1^2 + (c_{22} - c_{11}) x_1 x_2 - c_{12} x_2^2) = 0 \tag{74}$$

und in Liniencoordinaten durch die Gleichung:

$$\lambda' u_0^2 + \mu'(-c_{12} u_1^2 + (c_{11} - c_{22}) u_1 u_2 + c_{21} x_2^2) = 0\,. \tag{75}$$

Beide Gleichungen stellen überdies dieselbe Curve dar, wenn man die Parameter $\lambda : \mu$ und $\lambda' : \mu'$ der Bedingung:

$$4\lambda\lambda' + \mu\mu'\{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21}\} = 0 \tag{76}$$

gemäss wählt.

Eine Ausnahme bilden *die* infinitesimalen Transformationen von G_3, deren Coefficienten die Bedingung:

$$(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} = 0$$

oder, was zufolge (73) dasselbe ist, die Bedingung:

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0 \tag{77}$$

erfüllen: Bei ihnen bleibt nur ein (doppeltzählender) Punkt der Geraden: $x_0 = 0$ in Ruhe, die Bahncurven (74) aber zerfallen in Paare gerader Linien, deren Durchschnittspunkte in jenem Punkte liegen und die von dem Punkte: $u_0 = 0$ und der Geraden: $x_0 = 0$ harmonisch getrennt werden.

Es ist leicht, die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe anzugeben, die von der infinitesimalen Transformation (72) erzeugt wird.

In dem allgemeinen Falle, das heisst, so lange die Gleichung (77) nicht besteht, werden die Coefficienten in den Transformationen der betreffenden eingliedrigen Gruppe durch die Gleichungen:

$$(78)\quad \begin{cases} a_{11} = \lambda + \mu c_{11}\,, & a_{12} = \mu c_{12} \\ a_{21} = \mu c_{21}\,, & a_{22} = \lambda + \mu c_{22} \\ a_{00}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 + \mu^2(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{cases}$$

bestimmt, die eingliedrige Gruppe selbst wird also durch die gleich Null gesetzte bilineare Form:

$$(79)\qquad a_{00}x_0u_0 + \lambda(x_1u_1 + x_2u_2) + \mu T$$

dargestellt.

In der That, fasst man λ und μ als homogene Parameter auf, so definiren die Gleichungen (78) eine einfach unendliche Schaar von Transformationen unsrer G_3. Jedem Werthsysteme: $\lambda : \mu$ entsprechen im Allgemeinen zwei Transformationen der Schaar, da aber die Gleichung (77) nicht erfüllt ist, so ist klar, dass die Schaar continuirlich ist. Aus den Relationen:

$$(80)\quad \begin{cases} T^2 = -(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})(x_1u_1 + x_2u_2) \\ (x_1u_1 + x_2u_2)T = T(x_1u_1 + x_2u_2) = T \end{cases}$$

ergiebt sich überdies, dass diese continuirliche Schaar eine eingliedrige Gruppe bildet, und dass die Art und Weise, in der sich die homogenen Parameter λ, μ der Gruppe zusammensetzen, durch die Gleichungen:

$$(81)\quad \begin{cases} \lambda'' = \lambda\lambda' - \mu\mu'(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \\ \mu'' = \lambda\mu' + \mu\lambda' \end{cases}$$

angegeben wird. Endlich erhält man aus (79) für: $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $a_{00} = \lambda$ die identische Transformation, für $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $a_{00} = -\lambda$ die involutorisch-perspective Transformation (67) und für: $\lambda = 1$, $\mu = \delta t$, $a_{00} = \lambda$ die infinitesimale Transformation (72). Unsre eingliedrige Gruppe ist also sicher von dieser infinitesimalen Transformation erzeugt.

Ganz anders verhält es sich, wenn die c_{ik} der Gleichung (77) genügen. Dann bilden zwar die Transformationen (79) immer noch eine Gruppe, aber diese Gruppe ist nicht mehr continuirlich, sondern sie zerfällt entsprechend den beiden Werthen: $+\lambda$ und $-\lambda$ von a_{00} in die beiden getrennten continuirlichen Schaaren:

$$\lambda(x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2) + \mu T \tag{82}$$

und:

$$\lambda(-x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2) + \mu T. \tag{82'}$$

Von diesen beiden Schaaren bildet blos die erste für sich genommen eine continuirliche eingliedrige Gruppe, die die identische Transformation enthält und von der infinitesimalen Transformation (72) erzeugt ist, die zweite dagegen bildet keine continuirliche Gruppe und enthält weder die identische noch eine infinitesimale Transformation, dagegen enthält sie die involutorisch-perspective Transformation (67).

Wir sehen hieraus, dass alle continuirlichen eingliedrigen Untergruppen unsrer G_3, die von infinitesimalen Transformationen der G_3 erzeugt sind, durch die Gleichungen (78) definirt sind, vorausgesetzt, dass man, sobald die Gleichung (77) besteht, dem a_{00} den Werth λ ertheilt.

Denken wir uns nunmehr irgend eine endliche Transformation (63) unsrer G_3 gegeben und versuchen wir festzustellen, welchen eingliedrigen, von infinitesimalen Transformationen erzeugten Untergruppen der G_3 sie angehört.

Aus (78) und (73) folgt augenscheinlich:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{00}^2 = -4\mu^2(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}). \tag{83}$$

Ist daher der Ausdruck:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{00}^2 \tag{84}$$

nicht gleich Null, so kann die gegebene Transformation (63) nur einer solchen eingliedrigen Gruppe angehören, deren infinitesimale Transformation die Gleichung (77) nicht erfüllt. Wir finden die betreffende infinitesimale Transformation, wenn wir $\mu = 1$ setzen und dann λ, c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{21} aus den Gleichungen (73) und (78) bestimmen, was offenbar nur auf eine Weise möglich ist. Demnach gehört jede Transformation (63) unsrer G_3, für die

der Ausdruck (84) nicht verschwindet, einer aber auch nur einer eingliedrigen Untergruppe der G_3 an, die von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt wird.

Ist der Ausdruck (84) null, so ist entweder:

$$a_{11} + a_{22} - 2a_{00} = 0 \tag{85}$$

oder:

$$a_{11} + a_{22} + 2a_{00} = 0 \tag{86}$$

und aus (83) ergiebt sich, dass in beiden Fällen entweder: $\mu = 0$ oder die Gleichung (77) erfüllt sein muss.

Sehen wir nun von der identischen Transformation:

$$a_{00} = a_{11} = a_{22}\,, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

ab, da die jeder von einer infinitesimalen Transformation erzeugten eingliedrigen Untergruppe angehört, so erkennen wir sofort, dass jede endliche Transformation (63), die der Gleichung (85) genügt, einer aber auch nur einer eingliedrigen Untergruppe der G_3 angehört. Wir finden die infinitesimale Transformation dieser eingliedrigen Gruppe wie vorhin, indem wir $\mu = 1$ setzen und die Gleichungen (73) und (78) nach λ, c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{21} auflösen.

Genügt dagegen die Transformation (63) der Gleichung (86) und ist sie nicht die involutorisch-perspective Transformation (67), ist also nicht:

$$-a_{00} = a_{11} = a_{22}\,, \quad a_{12} = a_{21} = 0\,,$$

so gehört sie gar keiner eingliedrigen Untergruppe der G_3 an, die von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt ist.

Die involutorisch-perspective Transformation (67) endlich gehört jeder eingliedrigen Untergruppe der G_3 an, deren infinitesimale Transformation die Bedingung (77) nicht erfüllt, dagegen gehört sie keiner eingliedrigen Untergruppe der G_3 an, deren infinitesimale Transformation der Bedingung (77) genügt.

Die hier geschilderten Verhältnisse werden noch deutlicher, wenn man die Vorstellungen der Mannigfaltigkeitslehre benutzt.

Deuten wir a_{00}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} als homogene Punktcoordinaten in einem ebenen R_4, so entsprechen den ∞^3 Transformationen unsrer G_3 die Punkte einer nicht ausgearteten, dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiten Grades M_3^2.

Insbesondere entsprechen der identischen Transformation und der perspectiven Transformation (67) zwei Punkte E und $\mathfrak{E}$ der M_3^2, deren Verbindungslinie keine Erzeugende der M_3^2 ist.

Die Gruppen (79) werden durch die ∞^2 Kegelschnitte von M_3^2 abgebildet, die sowohl E als $\mathfrak{E}$ enthalten. Diese Kegelschnitte überdecken die M_3^2 einfach, entsprechend dem Umstande, dass jede von der identischen Transformation und von der perspectiven Transformation (67) verschiedene Transformation nur in einer der Gruppen (79) enthalten ist. Im Allgemeinen stellt jeder unsrer Kegelschnitte eine eingliedrige Untergruppe der G_3 dar, die von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt ist. Aber es giebt unter unsern Kegelschnitten ∞^1 zerfallende, für die das nicht mehr gilt: sie erfüllen die beiden Kegel von Erzeugenden der M_3^2, die durch E und $\mathfrak{E}$ hindurchlaufen. Jede durch E gehende Erzeugende von M_3^2 ist das Bild einer eingliedrigen Untergruppe, die von einer infinitesimalen Transformation von G_3 erzeugt ist. Dagegen stellt eine durch $\mathfrak{E}$ gehende Erzeugende von M_3^2 für sich allein genommen keine Untergruppe von G_3 dar, sondern man erhält erst dann eine Untergruppe, wenn man noch die sie schneidende Erzeugende hinzunimmt, die durch E geht: beide zusammen stellen dann eine Gruppe dar, die aus zwei getrennten continuirlichen Schaaren besteht. Allerdings haben diese beiden Schaaren eine Transformation gemein, nämlich die, deren Bild der Schnittpunkt der betreffenden Erzeugenden ist, aber diese Transformation ist, wie man sich leicht überzeugt, ausgeartet.

Es ist nicht ohne Interesse, sich zu vergegenwärtigen, wie sich die besprochenen Vorkommnisse analytisch darstellen, wenn man statt der bisher benutzten Parameterdarstellung der eingliedrigen Untergruppen G_3 die Lie'schen kanonischen Parameter wählt. Ueberdies ist das auch schon an und für sich wünschenswerth, denn wir haben bisher eigentlich nur bewiesen, dass gewisse Transformationen der G_3 sicher nicht von infinitesimalen Transformationen der G_3 erzeugt sind; von den übrigen Transformationen der G_3 wissen wir aber blos, dass jede unter ihnen einer eingliedrigen Untergruppe angehört, die im gewöhnlichen Sinne von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt ist, wir wissen dagegen noch nicht, ob denn auch wirklich ohne Ausnahme alle Transformationen dieser eingliedrigen

Gruppe von der betreffenden infinitesimalen Transformation erzeugt sind.

Haben T^0 und T dieselbe Bedeutung wie auf S. 686 f. und ist wie damals: $c_{11} + c_{22} = 0$, so wird die kanonische Form unsrer G_3 durch die gleich Null gesetzte bilineare Form:

$$T^0 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} T^\nu$$

dargestellt. Bei Berücksichtigung der Relationen (80) findet man leicht, dass diese Form die Gestalt:

$$x_0 u_0 + (x_1 u_1 + x_2 u_2) \cos h + T \frac{\sin h}{h} \tag{87}$$

erhält, wo zur Abkürzung:

$$h = \sqrt{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}} \tag{88}$$

gesetzt ist. Vergleicht man den Ausdruck (87) mit der Form (64), so erkennt man, dass die kanonischen Parameter einer beliebigen Transformation (63) unsrer G_3 ausser der Relation: $c_{11} + c_{22} = 0$ nur noch die Gleichungen:

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{11}}{a_{00}} = \cos h + c_{11} \dfrac{\sin h}{h}, & \dfrac{a_{12}}{a_{00}} = c_{12} \dfrac{\sin h}{h} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{00}} = c_{21} \dfrac{\sin h}{h}, & \dfrac{a_{22}}{a_{00}} = \cos h + c_{22} \dfrac{\sin h}{h} \end{cases}$$

erfüllen müssen. Durch diese Gleichungen sind aber die c_{ik} auch im Allgemeinen vollständig bestimmt, denn man erhält aus ihnen:

$$(90)\quad \begin{cases} h = \arccos \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2 a_{00}} \\ \quad = \arcsin \dfrac{1}{2 a_{00}} \sqrt{(2 a_{00} - a_{11} - a_{22})(2 a_{00} + a_{11} + a_{22})} \end{cases}$$

und sodann:

$$(91)\quad \begin{cases} c_{11} = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2 a_{00}} \cdot \dfrac{h}{\sin h}, & c_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{00}} \cdot \dfrac{h}{\sin h} \\ c_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{00}} \cdot \dfrac{h}{\sin h}, & c_{22} = \dfrac{a_{22} - a_{11}}{2 a_{00}} \cdot \dfrac{h}{\sin h}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus, dass die kanonischen Parameter einer vorgelegten endlichen Transformation der G_3 zwar nur unendlich-

deutig bestimmt sind, dass sich aber diese Unbestimmtheit nicht auf die Verhältnisse der Parameter, also auch nicht auf die Parameter der erzeugenden infinitesimalen Transformation erstreckt.

Die rechten Seiten der Gleichungen (91) haben den gemeinsamen Factor:

$$\frac{h}{\sin h} = \frac{2a_{00} \arccos \frac{a_{11}+a_{22}}{2a_{00}}}{\sqrt{(2a_{00}-a_{11}-a_{22})(2a_{00}+a_{11}+a_{22})}}. \tag{92}$$

Da nun eine endliche Transformation unsrer G_3 nur dann wirklich von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt ist, wenn ihre kanonischen Parameter endlich sind, und da a_{00} nicht verschwinden kann, so müssen wir jetzt noch die Fälle untersuchen, in denen der Nenner des Ausdrucks (92) verschwindet.

Ist zunächst:

$$2a_{00} - a_{11} - a_{22} = 0, \tag{85}$$

so werden alle Werthe von (92) unendlich bis auf einen, der unter der Form: Null durch Null erscheint und den wahren Werth Eins besitzt. Ist andrerseits:

$$2a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0, \tag{86}$$

so werden alle Werthe des Ausdrucks (92) unendlich gross. Sieht man daher im ersten Falle von der identischen Transformation:

$$a_{11} = a_{22} = a_{00}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \tag{93}$$

ab und im zweiten von der perspectiven Transformation:

$$a_{11} = a_{22} = -a_{00}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \tag{94}$$

da für beide die kanonischen Parameter c_{ik} in der unbestimmten Form: Null durch Null erscheinen, so findet man Folgendes: Im Falle (85) giebt es für die betreffende Transformation der G_3 stets eine aber auch nur eine kanonische Parameterdarstellung mit endlichen Parametern. Im Falle (86) dagegen wird unter den kanonischen Parametern der betreffenden Transformation der G_3 mindestens einer unendlich, eine solche Transformation ist daher von gar keiner infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt.

Um nun auch die beiden soeben ausgeschlossenen Transformationen unsrer G_3 zu erledigen, kehren wir zu den Gleichungen (89) zurück.

Für die kanonischen Parameter der identischen Transformation erhalten wir die Gleichungen:

$$1 = \cos h + c_{11}\frac{\sin h}{h}, \quad 0 = c_{12}\frac{\sin h}{h}$$

$$0 = c_{21}\frac{\sin h}{h}, \quad 1 = \cos h + c_{22}\frac{\sin h}{h},$$

wozu noch: $c_{11} + c_{22} = 0$ kommt. Hieraus folgt $\cos h = 1$, $\sin h = 0$ und $h = 2k\pi$, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Ist insbesondere $k = 0$, so ergiebt sich offenbar: $c_{12} = c_{21} = c_{11} = c_{22} = 0$, ist dagegen $k \neq 0$, so ergiebt sich keine weitere Gleichung zwischen den c_{ik}. Sind daher die kanonischen Parameter der identischen Transformation nicht alle null, so sind sie nur an die Gleichungen:

$$(95) \qquad c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} = 4k^2\pi^2, \quad c_{11} + c_{22} = 0$$

gebunden, wo k eine beliebige von Null verschiedene ganze Zahl ist.

In entsprechender Weise findet man, dass kanonische Parameter der perspectiven Transformation (94) alle die aber auch nur die Werthsysteme der c_{ik} sind, die Gleichungen von der Form:

$$(96) \qquad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = (2k+1)^2\pi^2, \quad c_{11} + c_{22} = 0$$

genügen, unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden.

Hiermit sind die früheren Resultate sämmtlich wieder gefunden, aber auch zugleich vertieft, denn jetzt wissen wir, dass die von der perspectiven Transformation (93) verschiedenen Transformationen, die der Bedingung (86) genügen, die einzigen Transformationen der G_3 sind, die von keiner infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt sind. Jede andre Transformation der G_3 mit Ausnahme der Transformationen (93) und (94) ist von einer aber auch nur einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt, aber von dieser wird sie unendlich oft erzeugt, wiederum ausgenommen die von der identischen Transformation verschiedenen Transformationen, die der Bedingung (85) genügen.

§ 7.

Schlussbemerkungen.

Durch die im vorigen Paragraphen mitgetheilten Betrachtungen STUDYS ist so ziemlich alles erschöpft, was über die Er-

zeugung der endlichen Transformationen der speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene gesagt werden kann. Ich will daher nur noch mit ein paar Worten auseinandersetzen, welches Licht die entwickelten Eigenschaften auf die Begriffe: holoedrisch isomorph und gleichzusammengesetzt werfen.

Die specielle lineare homogene Gruppe G_3 der Ebene ist nach Lies Definition mit der allgemeinen projectiven Gruppe Γ_3 der Geraden *gleichzusammengesetzt* und daraus folgt, wie Lie bewiesen hat (s. Th. d. Trfgr. I, Kap. 21), dass beide Gruppen auch im Sinne der Substitutionentheorie holoedrisch isomorph sind, *sobald man sich auf die Transformationen in einer gewisse Umgebung der identischen Transformation beschränkt.* Dass man sich in dieser Weise beschränkt, wird ja bei allen Theorien des Abschnitts I vorausgesetzt und nur unter dieser Voraussetzung wird dort bewiesen, dass gleichzusammengesetzte Gruppen auch holoedrisch isomorph sind. *Betrachtet man dagegen die beiden G_3 und Γ_3 in ihrer ganzen Ausdehnung, so kann man nicht mehr sagen, dass sie holoedrisch isomorph sind im Sinne der Substitutionentheorie*, vielmehr muss man sagen, dass Γ_3 mit G_3 meroedrisch isomorph ist. Dass die beiden Gruppen nicht holoedrisch isomorph im strengsten Sinne des Wortes sein können, folgt aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, namentlich folgt es schon daraus, dass die Transformationen von Γ_3 einen ebenen R_3 bilden, die von G_3 dagegen eine Mannigfaltigkeit zweiten Grades in einem ebenen R_4.

Wenn man daher continuirliche Gruppen hat, deren analytische Darstellung so beschaffen ist, dass man sich nicht blos auf die Umgebung der identischen Transformation zu beschränken braucht, sondern vielmehr alle ihre Transformationen umfassen kann, *so muss man sorgfältig zwischen gleichzusammengesetzt und holoedrisch isomorph unterscheiden.*

Noch eins. Ist wie auf S. 687 T das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation unsrer G_3, so stellt die bilinea r Form:

$$T^0 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} T^\nu \tag{97}$$

gleich Null gesetzt die allgemeinste Transformation dar, die von einer infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt wird. Der Inbegriff aller dieser Transformationen bildet nun aber keine

Gruppe im strengsten Sinne des Worts, denn man kann, indem man zwei geeignete unter diesen Transformationen nach einander ausführt, sehr gut eine Transformation der G_3 erhalten, die von keiner infinitesimalen Transformation der G_3 erzeugt ist, die also nicht mehr zu der Schaar (97) gehört, so lange man sich auf endliche Werthe der c_{ik} beschränkt.

Diese Eigenschaft der Schaar (97) findet ihre Erklärung in der Beschaffenheit der kanonischen Parametergruppe, die zu der Zusammensetzung der G_3 gehört. Sind nämlich:

$$u_\nu' = \chi_\nu(u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3) \quad (\nu = 1, 2, 3) \tag{98}$$

die endlichen Gleichungen dieser kanonischen Parametergruppe, so kommt es vor, dass zu endlichen Werthen der u und v lauter unendliche Werthe der u' gehören. Sind daher U und V zwei Transformationen einer Gruppe, die (98) zur kanonischen Parametergruppe hat und sind die kanonischen Parameter von U und V beziehungsweise u und v, so liefert die kanonische Parametergruppe für UV nur eine Darstellung mit unendlichen kanonischen Parametern und es ist dann von vornherein nicht sicher, ob es für UV auch eine Darstellung mit endlichen kanonischen Parametern giebt. Bei unsrer G_3 haben wir einen solchen Fall, denn die G_3 enthält Transformationen U und V mit endlichen kanonischen Parametern, bei denen es zu UV keine Darstellung mit endlichen kanonischen Parametern giebt. Sind dagegen U und V zwei Transformationen der Gruppe Γ_3, so giebt es auch dann, wenn die kanonische Parametergruppe (98) für die u_ν' nur unendliche Werthe liefert, doch stets eine Darstellung von UV mit endlichen kanonischen Parametern, aber diese Darstellung wird nicht mehr durch die kanonische Parametergruppe geliefert.

Die »kritischen« Werthe der u und der v, für die etwas derartiges eintritt, sind natürlich immer solche, für die der gemeinsame Nenner in den infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe verschwindet (vgl. d. Ber. 1892, S. 43 ff.). Ich verspare mir nähere Auseinandersetzungen hierüber für eine andere Gelegenheit.

INHALT.

Seite

W. Ostwald, Ueber das Prinzip des ausgezeichneten Falles 599

F. Stohmann. Calorimetrische Untersuchungen. Dreissigste Abhandlung 604

Friedrich Engel, Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (Zweite Mittheilung, mit Beiträgen von E. STUDY) 659

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

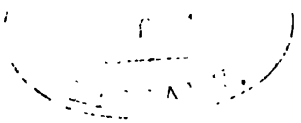
VIII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1894.

Einzelpreis: 1 Mark.



SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1893.

A. Mayer, *Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene.*

Von fundamentaler Wichtigkeit für die Theorie und Integration der Differentialgleichungen ist die Lehre von ihren *infinitesimalen Transformationen*. In den durch SCHEFFERS herausgegebenen Vorlesungen von LIE über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen erscheint dieselbe mehr oder weniger als ein Ausfluss der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen. Obgleich aber hierdurch von vielen wichtigen Eigenschaften der infinitesimalen Transformationen gewissermassen von vornherein der innere Grund aufgedeckt wird, so vermehrt diese Einordnung in ein anderes grosses Gebiet doch auch den Umfang der zum Verständniss nothwendigen Vorkenntnisse wieder ganz beträchtlich. Jedenfalls ist es daher zur Aufnahme der infinitesimalen Transformationen in eine allgemeine Vorlesung über Differentialgleichungen sehr wünschenswerth, wenigstens die Grundzüge ihrer Theorie unabhängig von derjenigen der Transformationsgruppen darstellen zu können. Diesem Wunsche, insoweit derselbe sich nur auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen erstreckt, sind die folgenden Untersuchungen entsprungen.

Jedes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$$

steht, wie bekannt, im engsten Zusammenhange mit einer linearen partiellen Differentialgleichung und zwar mit der Gleichung:

$$(2) \qquad Af \equiv X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 .$$

Schon in seinen classischen Dilucidationes (Werke Bd. IV p. 147 —255) hat Jacobi gezeigt, wie sich die allermeisten Eigenschaften des Systems (1) am Klarsten aus entsprechenden Eigenschaften der Gleichung (2) ergeben. Um mich im Folgenden kurz ausdrücken zu können, will ich jede Gleichung von der Form (2), also jede lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. O., welche die unbekannte Function selbst nicht enthält, eine *Charakteristik*, und im Besondern die Gleichung (2) *die Charakteristik des Systems* (1) nennen. Daraus, dass dies Wort in der Theorie der Differentialgleichungen auch schon in anderer Bedeutung gebraucht wird, kann kein Missverständniss entstehen, da es die folgenden rein analytischen Entwickelungen eben immer nur in dem festgesetzten Sinne benutzen.

Die infinitesimalen Transformationen eines gegebenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (1) lassen sich nun auf doppelte Weise definiren, einmal nämlich als wirkliche Transformationen, welche jede der Variabeln x nur unendlich wenig ändern und dabei das gegebene System wieder in sich selbst überführen, dann aber auch als solche lineare homogene Operationen:

$$(3) \qquad Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche aus jeder Lösung der äquivalenten Charakteristik (2) wiederum eine Lösung hervorgehen lassen.

Diese zweite Definition nehme ich zum Ausgangspunkt meiner Betrachtungen und zeige zunächst, wie sich bei der allgemeinen Frage nach solchen, jede Lösung einer gegebenen Charakteristik wieder in eine Lösung transformirenden Operationen, wenn dieselben ausserdem nur einmalige Differentiationen verwenden sollen, die infinitesimalen Transformationen der vorgelegten Charakteristik gewissermassen als die Elementaroperationen der verlangten Art herausstellen, wobei zugleich der übrigens evidente Zusammenhang zwischen den infinitesimalen Transformationen und den Lösungen einer Charakteristik zu Tage tritt. Jede infinitesimale Transformation der Charakteristik (2) bestimmt umgekehrt eine infinitesimale Transformation, welche das äquivalente System gewöhnlicher Differentialgleichungen (1) unverändert lässt.

Diese Sätze und Beziehungen gelten genau ebenso für jedes vollständige System von Charakteristiken und das entsprechende

unbeschränkt integrable System linearer totaler Differentialgleichungen, und daher habe ich dieselben, obgleich allerdings hierdurch eine für alles Folgende unnöthige Erweiterung des Untersuchungsgebietes herbeigeführt wird, in den beiden ersten Paragraphen auch gleich für diesen allgemeinen Fall abgeleitet.

In § 3 wird dann umgekehrt nach allen denjenigen Charakteristiken gefragt, welche eine gegebene infinitesimale Transformation Uf gestatten. Auch diese Frage lässt sich sehr einfach allgemein beantworten.

Dagegen kann man nicht verlangen, dass, bei vollständig gegebenem Uf, die gesuchten Charakteristiken überdies auch noch eine vorher bestimmte Form besitzen, also z. B. einer Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen zwei Variabeln unmittelbar entsprechen sollen, sondern muss dann den Coefficienten von Uf noch gewisse Freiheiten gestatten. Diese Frage nach allen den Differentialgleichungen n^{ter} O. zwischen y und x, welche eine, durch gegebene Daten bestimmte infinitesimale Transformation zulassen, wird in § 4 eingehend discutirt. Es zeigt sich, dass sie nur dann allgemein lösbar ist, wenn die gegebene infinitesimale Transformation von einer *infinitesimalen Berührungstransformation* erzeugt wurde, und damit stellt sich zugleich die speciellere, in § 5 behandelte Aufgabe, alle Differentialgleichungen n^{ter} O. zwischen y und x zu bestimmen, die eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation gestatten. Mit der Integration solcher Differentialgleichungen beschäftigt sich dann § 8 und sie wird im letzten § schliesslich auch noch an zwei vollständig durchgeführten Beispielen erläutert.

Zwei verschiedene und nicht ganz gleichwerthige Wege bieten sich zur Integration dar. Beiden liegen die wichtigen LIE'schen Multiplicatorsätze zu Grunde und der eine folgt zugleich unmittelbar aus der Anwendung eines allgemeinen Satzes von LIE, der überhaupt lehrt, welchen Nutzen man zur Auffindung aller Lösungen einer gegebenen Charakteristik aus der Kenntniss einer infinitesimalen Transformation derselben ziehen kann. Diese Sätze mussten daher in den §§ 6 und 7 eingeschaltet werden. Ueberhaupt fand ich mich genöthigt, meinen ursprünglichen Plan, nur das kurz auseinanderzusetzen, was in Ableitung oder Auffassung mir neu erschien, schliesslich doch aufzugeben, weil hierbei gar keine einheitliche und übersichtliche Darstellung zu Stande kommen wollte, und dies bewog mich, nun gerade um-

gekehrt den Gegenstand so zu behandeln, dass er auch ohne vorgängige Bekanntschaft mit den Lie'schen Theorieen verständlich werden könnte [1]).

§ 1.

Bestimmung aller derjenigen Operationen, welche jede Lösung eines gegebenen vollständigen Systems wiederum in eine Lösung überführen und hierzu nur einmalige Differentiationen verwenden.

Es sei:

$$(1) \qquad A_\varrho f \equiv \sum_1^n{}_h X_h^\varrho(x_1, \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_h} = 0\,,\ \varrho = 1,\ \ldots\ r,$$

ein gegebenes r-gliedriges vollständiges System. Wir fragen uns, *wann ist mit* $f = \varphi$ *stets zugleich auch:*

$$f = W\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \cdots\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) \equiv W\varphi$$

eine Lösung dieses Systems?

Zu dem Ende bemerke man, dass einerseits

$$A_\varrho(Wf) \equiv \sum_1^n{}_h X_h^\varrho\left\{\frac{\partial Wf}{\partial x_h} + \frac{\partial Wf}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial Wf}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_i}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_h}\right\}$$

$$\equiv \frac{\partial Wf}{\partial f}A_\varrho f + \sum_1^n{}_i \frac{\partial Wf}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_i}}\sum_1^\varrho{}_h X_h^\varrho\frac{\partial^2 f}{\partial x_h\,\partial x_i} + \sum_1^n{}_i X_i^\varrho\frac{\partial Wf}{\partial x_i}\,,$$

und andrerseits:

$$\frac{\partial A_\varrho f}{\partial x_i} \equiv \sum_1^n{}_h\left(\frac{\partial X_h^\varrho}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_h} + X_h^\varrho\frac{\partial^2 f}{\partial x_h\,\partial x_i}\right)$$

ist. Aus beiden Relationen folgt:

$$(2) \qquad A_\varrho(Wf) - \frac{\partial Wf}{\partial f}A_\varrho f - \sum_1^n{}_i \frac{\partial Wf}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_i}}\frac{\partial A_\varrho f}{\partial x_i}$$

$$\equiv \sum_1^n{}_i\left\{X_i^\varrho\frac{\partial Wf}{\partial x_i} - \frac{\partial Wf}{\partial\frac{\partial f}{\partial x_i}}\sum_1^n{}_h\frac{\partial X_h^\varrho}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_h}\right\},$$

[1]) Die beiden Werke »Theorie der Transformationsgruppen« und »Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen« citire ich im Folgenden kurz als *Trsfgr.* und *Inf. Trsf.*

wo die partiellen Differentialquotienten von Wf so zu nehmen sind, als ob $x_1, \ldots x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ unabhängige Variabele wären.

Damit also alle $A_\varrho(Wf) \equiv 0$ seien, so oft alle $A_\varrho f$ identisch verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass jede Lösung f des vollständigen Systems (1) gleichzeitig auch den r partiellen Differentialgleichungen 1. O. genüge:

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_i \left\{ X_i^\varrho \frac{\partial Wf}{\partial x_i} - \frac{\partial Wf}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}} \sum_1^n{}_h \frac{\partial X_h^\varrho}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h} \right\} = 0 .$$

Diese r Gleichungen müssen daher im Besondern durch jede vollständige Lösung f des Systems (1) erfüllt werden. Die vollständigen Lösungen genügen aber keinen anderen, von ihren willkürlichen Constanten freien partiellen Differentialgleichungen 1. O. zwischen $f, x_1, \ldots x_n$ ausser solchen, die eine blosse algebraische Folge der Gleichungen (1) sind. Als erste Antwort auf unsre Frage erhalten wir also den

Satz 1. *Für jede Operation Wf von der verlangten Beschaffenheit ist es nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig, dass die r Gleichungen (3) blosse algebraische Folgen der r gegebenen Gleichungen (1) seien.*

Das gegebene vollständige System (1) lässt sich nun stets nach r von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_h}$ auflösen; der Einfachheit halber nehme ich an, dass es die r ersten Unbekannten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ bestimme. Durch Auflösung nach diesen Unbekannten lässt sich das System dann immer auf die Form bringen:

$$(4) \qquad B_\varrho f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\varrho} + \sum_{r+1}^n{}_\lambda Y_\lambda^\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots r .$$

Für jede Lösung f des vollständigen Systems (4) aber wird Wf identisch mit demjenigen Ausdrucke:

$$\Omega f \equiv \Omega\left(x_1, \ldots x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

den man aus Wf erhält, wenn man für $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (4) einsetzt. Wir können daher auch gleich von vornherein Wf frei von diesen Differentialquotienten, d. h. von der Form annehmen:

$$(5) \qquad Wf \equiv W\left(x_1, \ldots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Legen wir aber diese Formen (4) und (5) des vollständigen Systems und der Operation Wf zu Grunde, so reduciren sich die Gleichungen (3) auf:

$$(6) \qquad \frac{\partial Wf}{\partial x_\varrho} + \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \left(Y_\lambda^\varrho \frac{\partial Wf}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial Wf}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}} \sum_{r+1}^{n}{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \right) = 0,$$

und diese Gleichungen, da sie $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ gar nicht enthalten, können unmöglich Folgen der Gleichungen (4) sein.

Damit also die Operation (5) aus jeder Lösung des vollständigen Systems (4) wiederum eine Lösung entstehen lasse, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (6) an sich identisch gelten für jede beliebige Function f von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Im Besondern müssen dieselben also durch die Function:

$$f = c + \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda c_\lambda (x_\lambda - a_\lambda),$$

in der die c und a willkürliche Constante bezeichnen, für jedes $x_1, \ldots x_r$ an der Stelle $x_{r+1} = a_{r+1}, \ldots, x_n = a_n$ erfüllt werden; an dieser Stelle erhalten aber $f, \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ die ganz willkürlichen Werthe $c, c_{r+1}, \ldots c_n$.

Setzen wir also jedes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \equiv p_\lambda$$

und $$W(x_1, \ldots x_n, f, p_{r+1}, \cdots p_n) \equiv V.$$

so müssen die r Gleichungen:

$$(7) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_\varrho} + \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \left(Y_\lambda^\varrho \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial V}{\partial p_\lambda} \sum_{r+1}^{n}{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda} p_\mu \right) = 0,$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots r,$$

identisch bestehen für alle beliebigen Werthe der unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n, f, p_{r+1}, \ldots p_n$, d. h. V muss eine gemeinsame Lösung der r Charakteristiken (7) sein, in denen f selbst nur als Constante auftritt. Damit haben wir den

Satz 2. *Mit $f = \varphi$ ist dann und nur dann immer auch:*

$$f = W\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{r+1}}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)$$

eine Lösung des vollständigen Systems (4), *wenn bei willkürlichem constanten c die Function:*

$$V = W(x, \ldots, x_n, c, p_{r+1}, \ldots p_n)$$

eine gemeinsame Lösung der r Charakteristiken (7) *ist.*

Besitzen daher diese r Charakteristiken m und nicht mehr von einander unabhängige gemeinsame Lösungen $V = V_1, V_2, \ldots, V_m$, so hat jede Operation (5) von der gewünschten Natur die Form:

$$Wf = F(f, V_1, V_2, \ldots, V_m),$$

wo F eine willkürliche Function und in den V_h jedes p_λ durch $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$ zu ersetzen ist.

Jede Lösung V des Systems (7) liefert aber das Integral $V =$ const. der $2n - 2r$ linearen totalen Differentialgleichungen:

$$(8) \qquad \left.\begin{aligned} dx_\lambda &= \sum_1^r{}_\varrho\, Y_\lambda^\varrho\, dx_\varrho, \\ dp_\lambda &= -\sum_1^r{}_\varrho\, dx_\varrho \sum_{r+1}^n{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda}\, p_\mu \end{aligned}\right\} \lambda = r+1, \ldots n$$

und umgekehrt.

Die Auffindung aller Operationen (5) von der geforderten Eigenschaft kommt daher zurück auf die vollständige Integration des Systems (8).

Diese aber lässt sich selbst wieder zurückführen auf die Auffindung aller Lösungen des gegebenen vollständigen Systems (4) oder die vollständige Integration des äquivalenten unbeschränkt integrabeln Systems:

$$(9) \qquad dx_\mu = \sum_1^r{}_\varrho\, Y_\mu^\varrho\, dx_\varrho, \quad \mu = r+1, \ldots n.$$

Ist nämlich f eine Lösung von (4), oder $f = \text{const.}$ ein Integral von (9), so hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varrho} + \sum_{r+1}^{n}{}_\mu Y_\mu^\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \equiv 0 ,$$

und daher durch partielle Differentiation dieser Identitäten nach x_λ auch:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\varrho \partial x_\lambda} + \sum_{r+1}^{n}{}_\mu Y_\mu^\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \equiv - \sum_{r+1}^{n}{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} .$$

Andrerseits genügen die Lösungen $x_{r+1}, \ldots x_n$ des Systems (9) den Gleichungen:

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\varrho} = Y_\mu^\varrho .$$

Für diese Lösungen wird daher:

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}}{\partial x_\varrho} = - \sum_{r+1}^{n}{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} .$$

Deutet man also die Substitution irgend eines Systems Lösungen:

$$x_\mu = [x_\mu]$$

der Gleichungen (9) durch Einschliessung in [ ] an, so genügen die Werthe

$$x_\lambda = [x_\lambda], \quad p_\lambda = \left[\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right],$$
$$\lambda = r+1, \ldots n ,$$

dientisch den Gleichungen:

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\varrho} = Y_\lambda^\varrho , \quad \frac{\partial p_\lambda}{\partial x_\varrho} = - \sum_{r+1}^{n}{}_\mu \frac{\partial Y_\mu^\varrho}{\partial x_\lambda} p_\mu$$

und bilden somit ein System Lösungen der $2n - 2r$ linearen totalen Differentialgleichungen (8).

Das unbeschränkt integrable System (9) besitzt aber $n - r$, in Bezug auf $x_{r+1}, \ldots, x_n$ von einander unabhängige Integrale:

$$(10) \qquad f_\mu (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_\mu , \quad \mu = r+1, \ldots, n ,$$

und aus diesen Integralen kann man mit Hülfe von $n - r$ neuen willkürlichen Constanten β_μ das allgemeinere Integral zusammensetzen:

$$f \equiv \sum_{r+1}^{n}{}^{\mu} \beta_\mu f_\mu = \text{const.}$$

Daraus erhellt unmittelbar, dass die $n - r$ Integrale (10) verbunden mit den $n - r$ Gleichungen:

$$p_\lambda = \sum_{r+1}^{n}{}^{\mu} \beta_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}, \qquad \lambda = r+1, \ldots n, \tag{11}$$

die vollständigen Integralgleichungen des Systems (8) darstellen (und dieses somit wiederum unbeschränkt integrabel, oder (7) wieder ein vollständiges System ist).

Das System (8) besitzt demnach $2n - 2r$ unabhängige Integrale, oder also das System (7) $2n - 2r$ unabhängige Lösungen, und man erhält diese Integrale, wenn man den $n - r$ Integralen (10) die Auflösungen der Gleichungen (11) nach den $n - r$ willkürlichen Constanten β_μ hinzufügt. Diese Auflösungen aber sind linear und homogen in den p. Nach dem Vorhergehenden hat man also den

Satz 3. *Zu jedem gegebenen vollständigen Systeme:*

$$A_\varrho f \equiv \sum_{1}^{n}{}^{h} X_h^\varrho \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r, \tag{1}$$

das sich nach den r ersten Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ auflösen lässt, gehören stets $n - r$ unabhängige Operationen von der Form:

$$W_\mu f \equiv \sum_{r+1}^{n}{}^{\lambda} \xi_\lambda^\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}, \qquad \mu = r+1, \ldots n, \tag{12}$$

die jede Lösung des Systems wieder in eine Lösung überführen.

Sind $f = f_{r+1}, \ldots, f_n$ unabhängige Lösungen des Systems (1), so bestimmen sich diese $n - r$ Operationen aus den $n - r$ linearen Gleichungen:

$$\sum_{r+1}^{n}{}^{\mu} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda} W_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}, \qquad \lambda = r+1, \ldots n, \tag{13}$$

und jede Operation:

$$Wf \equiv W\left(x_1, \ldots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

welche aus den Lösungen f des Systems (1) immer wieder Lösungen entstehen lässt, muss sich durch Substitution der Werthe von $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ *aus den Gleichungen (1) auf die Form bringen lassen:*

$$Wf \equiv F(f, f_{r+1}, \ldots, f_n, W_{r+1}f, \ldots, W_nf),$$

muss sich also hierdurch in eine blosse Function jener $n - r$ Operationen und der Functionen $f, f_{r+1}, \ldots, f_n$ verwandeln.

Lie nennt nun [1]) jede Operation von der Form:

$$(14) \qquad Uf \equiv \sum_1^n{}_h \xi_h(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

welche die Lösungen f des gegebenen vollständigen Systems (1) stets wieder in Lösungen überführt, eine *infinitesimale Transformation* dieses Systems, oder eine infinitesimale Transformation, welche dasselbe gestattet.

Nach dem letzten Satze hat jede von $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ freie infinitesimale Transformation:

$$(15) \qquad Vf \equiv \sum_{r+1}^n{}_\lambda \eta_\lambda(x_1, \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

des vollständigen Systems (1) nothwendig die Form:

$$(16) \qquad Vf \equiv \sum_{r+1}^n{}_\mu F_\mu(f_{r+1}, \ldots, f_n) W_\mu f,$$

und überhaupt muss jede infinitesimale Transformation (14) dieses Systems durch Substitution der Werthe von $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ aus (1) in einen Ausdruck von der Form (16) übergehen, ist also immer von der Form:

$$(17) \qquad Uf \equiv Vf + \sum_1^r{}_\varrho \nu_\varrho \Delta_\varrho f,$$

wo die ν_ϱ beliebige Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sein können.

Setzt man ferner:

$$(18) \qquad \sum' \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial f_{r+2}}{\partial x_{r+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \equiv \Delta,$$

[1]) Mathemat. Annalen XI, p. 495.

so geben die $n - r$ Gleichungen (13)

$$\Delta W_\mu f = \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

und hierdurch wird die Formel (16)

$$(19) \qquad Vf \equiv \frac{1}{\Delta} \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \sum_{r+1}^{n}{}_\mu F_\mu (f_{r+1}, \cdots f_n) \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}} .$$

In jeder infinitesimalen Transformation unsres vollständigen Systems von der Form (15) haben daher die Coefficienten η_λ Werthe von der Form:

$$\eta_\lambda = \frac{1}{\Delta} \sum_{r+1}^{n}{}_\mu F_\mu (f_{r+1}, \cdots f_n) \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}} .$$

Aus diesen Werthen folgt aber:

$$\sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \eta_\lambda \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\lambda} = F_\nu (f_{r+1}, \cdots f_n) , \quad \text{d. h.}^{1})$$

Satz 4. *Damit die Operation (14) eine infinitesimale Transformation des gegebenen, nach* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ *auflösbaren vollständigen Systems (1) sei, ist nothwendig und hinreichend, dass sie die Form (17) besitze, in welcher die Coefficienten* η_λ *des Ausdrucks*

$$Vf \equiv \sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

sich aus $n - r$ *linearen Gleichungen von der Form bestimmen:*

$$\sum_{r+1}^{n}{}_\lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda} \cdot \eta_\lambda = F_\mu , \quad \mu = r+1, \ldots n .$$

Hier bedeuten $f_{r+1}, \ldots f_n$ *wieder irgend* $n - r$ *unabhängige Lösungen des vollständigen Systems und* $F_{r+1}, \ldots, F_n$ *sind willkürliche Functionen dieser Lösungen.*

Dieser Satz ist indessen im Grunde genommen ganz selbstverständlich, denn wenn die Operation (14) jede Lösung unsres

1) Vgl. Trsfgr. I, p. 139.

vollständigen Systems wieder in eine Lösung überführt, so gilt dasselbe eo ipso auch von der Operation:

$$Vf = Uf - \sum_{1}^{n} \varrho \nu_\varrho A_\varrho f$$

(wo man Uf auch noch mit einem beliebigen von 0 verschiedenen constanten Factor multipliciren könnte). In dieser aber kann man die r Factoren ν_ϱ so wählen, dass $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ herausfallen und Vf damit die Form (15) erhält. Ueberdies ist jede Lösung des vollständigen Systems (1) eine blosse Function der $n - r$ Lösungen $f_{r+1}, \ldots f_n$. Soll daher mit f stets auch Vf eine Lösung dieses Systems sein, so müssen eben nothwendig $n - r$ Gleichungen von der Form bestehen:

$$Vf_\mu \equiv \sum_{r+1}^{n} \lambda \eta_\lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda} = F_\mu (f_{r+1}, \ldots, f_n).$$

Diese Gleichungen geben jedes $\eta_\lambda = 0$, wenn man alle $F_\mu = 0$ nimmt, und führen daher im Besondern auch auf die selbstverständlichen oder *trivialen* infinitesimalen Transformationen

$$Uf \equiv \sum_{1}^{r} \varrho \nu_\varrho A_\varrho f$$

unsres vollständigen Systems.

Der Ausdruck (2) endlich reducirt sich, wenn man darin Wf durch einen Ausdruck Uf von der Form (14) ersetzt, auf

$$A_\varrho(Uf) - U(A_\varrho f).$$

Aus Satz 1 folgt daher unmittelbar noch der wichtige Satz von LIE [1]:

Satz 5. *Die Operation* (14) *ist dann und nur dann eine infinitesimale Transformation des vollständigen Systems* (1), *wenn jedes:*

$$A_\varrho(Uf) - U(A_\varrho f) \equiv \sum_{1}^{r} \sigma \nu_\sigma^\varrho A_\sigma f$$

ist, wo die Factoren ν_σ^ϱ beliebige Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sein können.

---

1) Mathem. Annalen XI, p. 496.

Nach (2) ist zugleich:

$$A_\varrho(Uf) - U(A_\varrho f) \equiv \sum_1^n{}_h (A_\varrho \xi_h - U X_h^\varrho) \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

sodass die Forderung des letzten Satzes in die rn Bedingungen zerfällt:

$$A_\varrho \xi_h - U X_h^\varrho \equiv \sum_1^r{}_\sigma \nu_\sigma^\varrho X_h^\sigma .$$

§ 2.

Andere Definition der infinitesimalen Transformationen eines vollständigen Systems.

Ein r-gliedriges vollständiges System von der Form:

$$(1) \qquad B_\varrho f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\varrho} + \sum_{r+1}^n{}_\lambda Y_\lambda^\varrho (x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots r$$

ist äquivalent dem $(n - r)$-gliedrigen unbeschränkt integrablen Systeme:

$$(2) \qquad dx_\lambda = \sum_1^n{}_\varrho Y_\lambda^\varrho (x_1, \ldots, x_n)\, dx_\varrho , \qquad \lambda = r+1, \ldots n .$$

Damit ferner das gegebene vollständige System (1) die infinitesimale Transformation

$$(3) \qquad Uf \equiv \sum_1^n{}_i \xi_i (x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gestatte, muss nach dem letzten Satze jedes

$$B_\varrho (Uf) - U(B_\varrho f) \equiv \sum_1^r{}_\sigma \nu_\sigma^\varrho B_\sigma f$$

sein. Von den rn Bedingungen:

$$B_\varrho \xi_\sigma \equiv \nu_\sigma^\varrho , \qquad \sigma = 1, \ldots r ,$$

$$B_\varrho \xi_\lambda - U Y_\lambda^\varrho \equiv \sum_1^r{}_\sigma \nu_\sigma^\varrho Y_\lambda^\sigma , \qquad \lambda = r+1, \ldots n ,$$

in die sich diese Forderung auflöst, bestimmen aber die r^2 ersten nur die ν_σ^ϱ und durch dieselben werden die $r(n-r)$ letzten:

(4) $$B_\varrho \xi_\lambda - U Y_\lambda^\varrho \equiv \sum_1^r{}_\sigma Y_\lambda^\sigma B_\varrho \xi_\sigma ,$$

$$\varrho = 1, \ldots, r ; \quad \lambda = r+1 \ldots n .$$

Macht man andrerseits in dem unbeschränkt integrabeln Systeme:

(2') $$dx_\lambda' = \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho (x_1', \ldots, x_n')\, dx_\varrho' ,$$

das sich von (2) nur durch die Bezeichnung der Variabeln unterscheidet, die n Substitutionen:

(5) $$x_i' = x_i + \varepsilon \xi_i (x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots n ,$$

in denen ε eine unendlich kleine Zahl bezeichnet, und vernachlässigt alle höheren Potenzen von ε, nimmt also unter Benutzung des Zeichens (3)

$$f(x_1', \ldots, x_n') = f(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon U f ,$$

so geht das System (2') über in:

$$dx_\lambda + \varepsilon d\xi_\lambda = \sum_1^r{}_\varrho (Y_\lambda^\varrho + \varepsilon U Y_\lambda^\varrho)(dx_\varrho + \varepsilon d\xi_\varrho) ,$$

d. i., da schon ε^2 vernachlässigt werden soll, in:

$$dx_\lambda - \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho dx_\varrho + \varepsilon (d\xi_\lambda - \sum_1^r{}_\varrho (U Y_\lambda^\varrho \cdot dx_\varrho + Y_\lambda^\varrho d\xi_\varrho)) = 0 ,$$

wo alle Functionen mit den Argumenten $x_1, \ldots x_n$ zu bilden sind.

Damit also die *infinitesimale Transformation* (5) das System (2') nur wieder in das System (2), d. h. in sich selbst überführe, oder, wie wir der LIE'schen Ausdrucksweise entsprechend sagen wollen, *damit das System* (2) *die infinitesimale Transformation* (5) *gestatte*, ist nothwendig und hinreichend, dass den $n - r$ linearen Gleichungen:

$$0 = d\xi_\lambda - \sum_1^r{}_\varrho (U Y_\lambda^\varrho \cdot dx_\varrho + Y_\lambda^\varrho d\xi_\varrho)$$

$$\equiv \sum_1^r{}_\sigma \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\sigma} - U Y_\lambda^\sigma - \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\sigma} \right) dx_\sigma +$$

$$+ \sum_{r+1}^n{}_\mu \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\mu} - \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\mu} \right) dx_\mu$$

identisch genügt werde durch die $n - r$ Substitutionen:

$$dx_\mu = \sum_1^r{}_\sigma Y_\mu^\sigma dx_\sigma .$$

Das aber verlangt, dass jedes:

$$\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\sigma} - UY_\lambda^\sigma - \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\sigma} + \sum_{r+1}^n{}_\mu \left(\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\mu} - \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\mu} \right) Y_\mu^\sigma \equiv 0 ,$$

d. h. nach (1) und (3), dass jedes:

$$B_\sigma \xi_\lambda - UY_\lambda^\sigma \equiv \sum_1^r{}_\varrho Y_\lambda^\varrho B_\sigma \xi_\varrho$$

sei, und das sind eben wieder die Bedingungen (4). Demnach:

Satz 6. *Die Forderung, dass die Operation* (3) *eine infinitesimale Transformation des vollständigen Systems* (1) *sei, ist identisch mit der, dass das äquivalente unbeschränkt integrable System* (2) *die infinitesimale Transformation* (5) *gestatten soll.*

Damit ist eine neue Definition der infinitesimalen Transformationen eines vollständigen Systems gewonnen, die zugleich die Berechtigung dieser Benennung darthut.

Es ist aber wichtig zu bemerken, dass beide Definitionen sich nicht in jeder Hinsicht vollkommen decken, dass vielmehr die zweite allgemeiner oder dehnbarer ist als die erste. Denn einerseits behält dieselbe auch dann noch einen Sinn, wenn das System (2) weder unbeschränkt integrabel ist, noch überhaupt irgend ein Integral besitzt, und andrerseits lässt sie sich sofort übertragen auf beliebige endliche Gleichungen:

$$f_\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 , \quad \varrho = 1, 2, \ldots r,$$

wo sie darauf hinausläuft, dass diese Gleichungen die r Gleichungen:

$$Uf_\varrho = 0$$

nach sich ziehen müssen, wenn sie die infinitesimale Transformation (5) gestatten sollen.

Beiläufig kann man noch bemerken, dass die Bedingungen der unbeschränkten Integrabilität des Systems (2) selbst in einer engen Beziehung zu den trivialen infinitesimalen Transformationen dieses Systems, d. h. zu denjenigen infinitesimalen Transformationen (5) stehen, in welchen die $n - r$ Ausdrücke

$$(6) \qquad R_\mu \equiv \xi_\mu - \sum_1^r{}_\sigma \xi_\sigma Y_\mu^\sigma, \quad \mu = r+1, \ldots n,$$

identisch verschwinden und nach (1) und (2) daher:

$$Uf \equiv \sum_1^r{}_\sigma \xi_\sigma B_\sigma f$$

wird. Damit nämlich das System (3) unbeschränkt integrabel, oder (1) ein vollständiges System sei, müssen die $\frac{r(r-1)(n-r)}{2}$ Bedingungen bestehen:

$$(7) \qquad B_\sigma Y_\lambda^\varrho \equiv B_\varrho Y_\lambda^\sigma.$$

Führt man nun durch (6) die Grössen R_μ an Stelle der ξ_μ ein, so wird

$$B_\varrho \xi_\lambda \equiv B_\varrho R_\lambda + \sum_1^r{}_\sigma Y_\lambda^\sigma B_\varrho \xi_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \xi_\sigma B_\varrho Y_\lambda^\sigma,$$

$$Uf \equiv \sum_{r+1}^n{}_\mu R_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_1^r{}_\sigma \xi_\sigma B_\sigma f,$$

und die Bedingungen (4) erhalten somit die Gestalt:

$$B_\varrho R_\lambda - \sum_{r+1}^n{}_\mu R_\mu \frac{\partial Y_\lambda^\varrho}{\partial x_\mu} \equiv \sum_1^r{}_\sigma \xi_\sigma (B_\sigma Y_\lambda^\varrho - B_\varrho Y_\lambda^\sigma);$$

hieraus aber folgt sofort, da die μ Gleichungen $R_\mu = 0$ nur die ξ_μ als Functionen von $\xi_1, \ldots \xi_r$ bestimmen:

Das System (2) *ist unbeschränkt integrabel, so oft es jede infinitesimale Transformation* (5) *gestattet, für welche*

$$R_{r+1} \equiv R_{r+2} \equiv \cdots \equiv R_n \equiv 0$$

ist, d. h. aber eben, so oft es alle für dasselbe trivialen infinitesimalen Transformationen zulässt. —

Im Folgenden werden wir fast ausschliesslich nur eingliedrige vollständige Systeme, d. h. einzelne Charakteristiken zu betrachten haben, und werden wegen der Anwendungen auf die Differentialgleichungen n^{ter} O. zwischen zwei Variabeln diese Charakteristiken in der Form zu Grunde legen:

$$(8) \qquad Af \equiv \sum_0^n{}_i X_i(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

wo der Index 0 nur eingeführt ist, um die Formeln abkürzen zu können, sodass also $x_0 \equiv x$ und $X_0 \equiv X$ sein soll. Diesen ersten Coefficienten X setze ich immer als von Null verschieden voraus. An Stelle des unbeschränkt integrabeln Systems (2) tritt dann das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O.

$$(9) \qquad dx_k = \frac{X_k}{X} dx, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

oder: $$dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$$

und nach Satz 6 ist:

$$(10) \qquad Uf \equiv \sum_0^n{}_i \xi_i(x, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine infinitesimale Transformation der Charakteristik (8), so oft das äquivalente System gewöhnlicher Differentialgleichungen (9) die infinitesimale Transformation

$$(11) \qquad x_i' = x_i + \varepsilon \xi_i(x, x_1, \ldots x_n), \quad i = 0, 1, \ldots n$$

gestattet, und umgekehrt.

Mit der Operation (10) sind nun auch die $n+1$ Substitutionen (11) vollständig gegeben. Indem wir daher nach dem Vorgange von LIE den Ausdruck (10) als abgekürzte symbolische Bezeichnung für die infinitesimale Transformation (11) einführen können, werden wir auch geradezu sagen, *dass jede infinitesimale Transformation der Charakteristik* (8) *gleichzeitig auch eine infinitesimale Transformation des äquivalenten Systems* (9) *ist, und umgekehrt.*

Sind $f = f_1, f_2, \ldots f_n$ n unabhängige Lösungen der Charakteristik (8), oder also

$$f_1 = \alpha_1, \; f_2 = \alpha_2, \; \ldots, \; f_n = \alpha_n$$

n unabhängige Integrale des Systems (9), und setzt man:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \equiv \Delta,$$

so lehrt die Formel (19) von § 1 unmittelbar, dass im Besondern:

$$(12) \qquad Vf \equiv \frac{1}{\Delta} \sum_1^n{}_\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \sum_1^n{}_\mu F_\mu(f_1, \ldots, f_n) \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\lambda}}$$

die allgemeine Form aller von $\frac{\partial f}{\partial x}$ freien infinitesimalen Transformationen der Charakteristik (8) oder des Systems (9) ist.

Jede gegebene Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x:

$$(13) \qquad y_n = \omega(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}), \quad y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k}$$

endlich ist identisch mit den n Differentialgleichungen 1. O. zwischen $x, y, y_1, \ldots y_{n-1}$:

$$\begin{aligned} &dx : dy : \cdots : dy_{n-2} : dy_{n-1} \\ = \; &1 : y_1 : \cdots : y_{n-1} : \omega(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir können daher die obige abgekürzte Ausdrucksweise auch sofort übertragen auf die Differentialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei Variabeln und sagen:

Jede infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$$

der Charakteristik:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-2}} + \omega(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0$$

ist zugleich eine infinitesimale Transformation der äquivalenten Differentialgleichung n^{ter} O. (13) *und umgekehrt.*

§ 3.

Bestimmung aller Charakteristiken, die eine gegebene infinitesimale Transformation gestatten.

Damit die gegebene Operation:

$$(1) \qquad Uf \equiv \sum_0^n{}_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

eine infinitesimale Transformation der Charakteristik:

$$(2) \qquad Af \equiv \sum_0^n{}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

sei, ist nach Satz 5 nothwendig und hinreichend das Bestehen einer Identität von der Form:

$$A(Uf) - U(Af) \equiv \lambda Af.$$

Gilt aber diese Relation und setzt man:

$$Bf \equiv \mu Af,$$

sodass die Gleichung $Bf = 0$ nur eine andere Form der Charakteristik (2) wird, so erhält man:

$$B(Uf) - U(Bf) \equiv (\lambda\mu - U\mu)Af$$

und somit $\equiv 0$, sobald man μ aus der linearen partiellen Differentialgleichung bestimmt:

$$U\mu = \lambda\mu \quad \text{oder} \quad U(\lg\mu) = \lambda.$$

Die Aufgabe, alle Charakteristiken (2) zu finden, welche die gegebene infinitesimale Transformation (1) gestatten, kommt daher darauf zurück, alle diejenigen Charakteristiken

$$Bf \equiv \sum_0^n Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

zu finden, welche der Forderung genügen:

$$B(Uf) - U(Bf) \equiv 0, \tag{4}$$

und jede Charakteristik, welche (1) gestattet, ist in der Form:

$$Af \equiv \varrho Bf = 0 \tag{5}$$

enthalten, wo ϱ jede beliebige Function von $x, x_1, \ldots x_n$ sein kann.

Die Forderung (4) zerfällt nun in die $n+1$ simultanen partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$UY_k = B\xi_k \equiv \sum_0^n Y_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \tag{6}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n,$$

denen die $n+1$ Unbekannten $Y, Y_1, \ldots Y_n$ identisch genügen müssen.

Um aus ihnen diese Unbekannten zu bestimmen[1]), seien $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$ irgend n unabhängige Lösungen der Charakteristik

$$Uf = 0, \tag{7}$$

---

1) Die Möglichkeit dieser Bestimmung erhellt a priori daraus, dass das System (6) diejenige Form besitzt, welche JACOBI (vgl. z. B. Dilucidationes Nr. 20) zu integriren gelehrt hat.

die man erhält, wenn man die gegebene Operation $(1) = 0$ setzt, dagegen $f = f_0$ irgend eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Uf = 1 , \tag{8}$$

(in der rechter Hand statt 1 auch irgend eine andere, von 0 verschiedene Constante stehen könnte).

Die $n+1$ Functionen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sind dann stets unabhängig von einander und man kann daher durch die $n+1$ linearen Gleichungen:

$$Bf_\lambda \equiv \sum_0^n{}_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} Y_i = F_\lambda , \qquad \lambda = 0, 1, \ldots n \tag{9}$$

$F_0, F_1, \ldots, F_n$ an Stelle von $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ als neue Unbekannte einführen.

Nach (9) hat man:

$$UF_\lambda \equiv \sum_0^n{}_i Y_i U\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} + \sum_0^n{}_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} UY_k ,$$

und andrerseits ist für $\lambda = 0, 1, \ldots n$:

$$0 \equiv \frac{\partial Uf_\lambda}{\partial x_i} \equiv U\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} + \sum_0^n{}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} .$$

Aus beiden Identitäten aber folgt:

$$UF_\lambda \equiv \sum_0^n{}_k \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}\left(UY_k - \sum_0^n{}_i Y_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) .$$

Die Gleichungen (6) sagen daher nichts anderes aus, als dass alle UF_λ verschwinden, die Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$ selbst also Lösungen der Charakteristik (7) sein müssen, und man erhält somit die Coefficienten einer jeden Charakteristik (3), welche der Forderung (4) genügt, aus $n+1$ linearen Gleichungen von der Form (9), deren rechte Seiten willkürliche Functionen von f_1, $f_2, \ldots f_n$ sind.

Hiermit ist aber nach (5) zugleich auch unsere ursprüngliche Aufgabe gelöst und zwar können wir die Lösung so aussprechen:

Satz 7. *Damit die Charakteristik*

$$Af \equiv \sum_0^n{}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

die gegebene infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv \sum_0^n{}^{\lambda} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

gestatte, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Coefficienten $n+1$ *lineare Gleichungen von der Form befriedigen:*

$$Af_\lambda \equiv \sum_0^n{}^{i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} X_i = \varrho(x, x_1, \dots x_n) F_\lambda (f_1, f_2, \dots, f_n),$$
$$\lambda = 0, 1, \dots n,$$

in denen $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ *irgend* n *unabhängige Lösungen der Charakteristik* $Uf = 0$, f_0 *eine beliebige Lösung der Gleichung* $Uf = 1$, *und die Functionen* $\varrho, F_0, F_1, \dots, F_n$ *willkürlich sind.*

Die Bestimmung aller Charakteristiken, welche die gegebene infinitesimale Transformation Uf gestatten, verlangt hiernach (zur Bestimmung von $f_1, f_2, \dots f_n$) die vollständige Integration der n Differentialgleichungen 1. O.

$$dx : dx_1 : \dots : dx_n = \xi : \xi_1 : \dots : \xi_n$$

und hierauf noch (zur Bestimmung von f_0) die Ausführung einer Quadratur, und zugleich sieht man, dass jede dieser Charakteristiken sich in der Form darstellen lässt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x}, 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}, F_0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, F_n \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4.

Infinitesimale Transformationen der Differentialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei Variabeln.

Die Sätze 4 und 7 enthalten unmittelbar die allgemeine Lösung der beiden inversen Aufgaben, *alle infinitesimalen Transformationen einer gegebenen Charakteristik zu finden*, und *alle Charakteristiken zu bestimmen, die eine gegebene infinitesimale Transformation gestatten.* Beide Aufgaben werden dagegen im

Allgemeinen unmöglich, wenn man den gesuchten infinitesimalen Transformationen oder Charakteristiken überdies noch eine vorher bestimmte Form auferlegen will. So werden wir z. B. sehen, dass im Falle $n > 2$ durchaus nicht jede gegebene Charakteristik

$$\sum_0^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

infinitesimale Transformationen

$$\sum_0^n \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

gestattet, deren 3 erste Coefficienten ξ, ξ_1, ξ_2 blosse Functionen von x, x_1, x_2 wären, und dass ebenso im Allgemeinen für $n > 1$ keine Charakteristik von der Form:

$$(1) \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_{n-2} \frac{\partial f}{\partial y_{n-2}} + \omega(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

oder also keine Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x:

$$(2) \qquad y_n = \omega(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}); \quad y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k}$$

existirt, welche eine beliebig gegebene infinitesimale Transformation:

$$(3) \qquad Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$$

gestattete. Vielmehr darf man, um mögliche Aufgaben dieser neuen Art zu erhalten, nicht mehr von einer völlig fest gegebenen Charakteristik oder infinitesimalen Transformation ausgehen, sondern muss denselben s. z. s. noch einen gewissen Spielraum offen lassen. Dies soll im Folgenden näher untersucht werden für die wichtigste der hierher gehörigen Fragen, die Frage: *in wie weit kann man im Falle $n > 1$ die Coefficienten $\xi, \eta, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ willkürlich wählen, wenn es überhaupt Differentialgleichungen* (2) *geben soll, welche die infinitesimale Transformation* (3) *gestatten, und wie findet man dann alle diese Differentialgleichungen n^{ter} O.?*

Vorher aber erst ein Paar Worte über die umgekehrte Aufgabe, *alle infinitesimalen Transformationen der gegebenen Differentialgleichung n^{ter} O.* (2) *zu finden.*

Damit die Charakteristik (1) die infinitesimale Transformation (3) gestatte, ist nach Satz 5 nothwendig und hinreichend, dass

$$A(Uf) - U(Af) \equiv \lambda Af$$

sei. Von den $n+1$ Bedingungen, in welche diese Forderung zerfällt, bestimmt die erste nur den Factor λ, und durch Substitution seines Werthes in die übrigen erhält man die n identisch zu erfüllenden Bedingungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \eta_1 = A\eta - y_1 A\xi, \\ \eta_2 = A\eta_1 - y_2 A\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-1} = A\eta_{n-2} - y_{n-1} A\xi, \\ U\omega = A\eta_{n-1} - \omega A\xi. \end{cases}$$

Bei *gegebenem* ω bestimmen nun die $n-1$ ersten Gleichungen (4) der Reihe nach $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ eindeutig durch ξ und η, und zwar werden $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ Functionen resp. der 1., der 1. und 2., ..., der 1., 2., ... $(n-1)^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten von ξ und η, und die Substitution dieser Werthe in die letzte Gleichung (4) ergiebt somit eine partielle Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen ξ und η.

Jede infinitesimale Transformation einer gegebenen Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen zwei Variabeln ist demnach bereits vollständig bestimmt durch ihre beiden ersten Coefficienten, von denen aber selbst wieder nur einer willkürlich gewählt werden kann, worauf dann der andere aus einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} O. zu bestimmen ist.

Nun können wir, wie schon unmittelbar aus der directen Verification von Satz 4 einleuchtet, unbeschadet der Allgemeinheit $\xi \equiv 0$ annehmen. In der That, wenn die gegebene Charakteristik (1) die infinitesimale Transformation (3) gestattet, so gestattet sie ja stets auch die infinitesimale Transformation:

$$(5)\qquad Vf \equiv \xi Af - Uf$$

und diese ist eben frei von $\frac{\partial f}{\partial x}$, hat also die Form:

$$(6)\qquad Vf \equiv W\frac{\partial f}{\partial y} + W_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + W_{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}},$$

worin, was für Späteres wichtig ist, der erste Coefficient den Werth hat:

(7) $$W = \xi y_1 - \eta .$$

Wir brauchen daher von der gegebenen Differentialgleichung (2) nur alle infinitesimalen Transformationen von der Form (6) zu bestimmen. Für diese reduciren sich die Bedingungen (4) auf:

(8) $$W_1 = AW,\ W_2 = AW_1,\ \ldots,\ W_{n-1} = AW_{n-2},\ V\omega = AW_{n-1},$$

und indem wir aus den $n-1$ ersten dieser n Gleichungen successive $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ als Functionen von W und von seinen partiellen Differentialquotienten berechnen, erhalten wir durch Substitution ihrer Werthe in die letzte Gleichung *eine lineare partielle Differentialgleichung n^{ter} O. für W.*

Die augenblicklich betrachtete Aufgabe ist aber bereits vollständig gelöst durch den allgemeinen Satz 4. Jene partielle Differentialgleichung n^{ter} O. für W besitzt also die bemerkenswerthe Eigenschaft, *dass ihre allgemeine Integration sich auf die einer gewöhnlichen Differentialgleichung n^{ter} O. zurückführen lässt.* Und zwar drückt sich ihre allgemeine Lösung, wie man unmittelbar sieht, wenn man die Formel (12) von § 2 auf das der Gleichung (2) äquivalente System Differentialgleichungen 1. O. anwendet, durch die n Integrale

$$f_\mu(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) = \alpha_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots n$$

der Differentialgleichung n^{ter} O. (2) und ihre Functionaldeterminante:

$$\Delta \equiv \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial y_{n-1}}$$

einfach so aus:

(9) $$W = \frac{1}{\Delta} \sum_1^n{}_\mu F_\mu(f_1, \ldots, f_n) \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\mu}{\partial y}} . -$$

Kehren wir aber nunmehr zu unsrer eigentlichen Frage zurück, so liegt zunächst schon implicite im Vorhergehenden, *dass man nur zwei Coefficienten der infinitesimalen Transformation* (3) *willkürlich wählen kann, wenn überhaupt eine Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x existiren soll, welche* (3) *gestattet.*

In der That, wenn wir jetzt ξ, η *als gegeben und ω als unbekannt* betrachten, so bestimmen die $n-1$ ersten Gleichungen (4) nach einander $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ eindeutig als Func-

tionen der Unbekannten ω und ihrer partiellen Differentialquotienten, und durch Substitution ihrer Werthe in die letzte Gleichung (4) erhält man zur Bestimmung von ω selbst eine partielle Differentialgleichung.

Nun enthält die erste Gleichung (4) ω nur in dem Gliede:

$$\omega\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_{n-1}} - y_1\frac{\partial\xi}{\partial y_{n-1}}\right).$$

So oft daher die beiden gegebenen Functionen ξ, η nicht gerade der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y_{n-1}} \equiv y_1\frac{\partial\xi}{\partial y_{n-1}}, \tag{10}$$

tritt ω bereits in der ersten Gleichung (4) wirklich auf und die höchsten Differentialquotienten von ω, die in den Werthen von η_1, η_2, $\ldots$ η_{n-1} vorkommen, sind daher resp. die 0., 1., $\ldots$ $(n-2)^{\text{ten}}$. In diesem allgemeinen Falle wird daher die partielle Differentialgleichung für ω immer von der Ordnung $n-1$.

Die Bestimmung aller Differentialgleichungen n^{ter} O. (2), welche eine infinitesimale Transformation (3) gestatten, deren beide erste Coefficienten ξ, η gegebene, der Bedingung (10) *nicht* genügende Functionen von $x, y, y_1, \ldots y_{n-1}$ sind, erheischt also stets die Integration *einer partiellen Differentialgleichung* $(n-1)^{\text{ter}}$ *O.*[1]).

---

1) Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass wir immer $n > 1$ vorausgesetzt haben. Im Falle $n = 1$ dagegen, wenn es sich also um infinitesimale Transformationen

$$Uf \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{α}$$

einer Differentialgleichung 1. O.

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \tag{β}$$

handelt, reduciren sich die Bedingungen (4) auf die eine:

$$U\omega = A\eta - \omega A\xi, \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \omega\frac{\partial f}{\partial y},$$

und bei gegebenen ξ, η ergiebt sich also für ω stets *eine partielle Differentialgleichung 1. O.*

Betrachtet man umgekehrt ω als gegeben und führt Uf auf

$$Vf \equiv \xi Af - Uf \equiv W\frac{\partial f}{\partial y}$$

zurück, so wird hierin:

Im Falle $n = 2$ gilt dies überhaupt für jedes gegebene Functionenpaar ξ, η. Denn in diesem Falle hat man nur die beiden Bedingungen:

$$\eta_1 = A\eta - y_1 A\xi, \quad U\omega = A\eta_1 - \omega A\xi$$

zu erfüllen, und durch Substitutionen des Werthes von η_1 aus der ersten in die zweite ergiebt sich, gleichviel ob η_1 von ω abhängt oder nicht, stets eine partielle Differentialgleichung 1. O. für ω.

Ist dagegen $n > 2$, so erniedrigt sich die Ordnung der partiellen Differentialgleichung, welche ω bestimmt, immer, so oft man ein solches Functionenpaar ξ, η gewählt hat, *welches der Bedingung* (10) *genügt.*

Damit nämlich unsere Charakteristik (1) die gegebene infinitesimale Transformation (3) gestatte, ist nothwendig und hinreichend, dass sie die durch (5) definirte infinitesimale Transformation (6) zulasse, dass also die Bedingungen (8) erfüllt werden, und in diesen ist nach (7)

$$W \equiv \xi y_1 - \eta .$$

Wegen der Annahme $n > 2$ lässt sich daher die Forderung (10) so schreiben:

$$\frac{\partial W}{\partial y_{n-1}} \equiv 0$$

und verlangt mithin nur, dass W frei von y_{n-1} sei.

Setzen wir aber allgemein für W eine blosse Function von $x, y, y_1, \cdots y_{n-k}$, wo $k > 1$ sei, und beachten, dass die Operation Af die Unbekannte ω erst dann einführt, wenn y_{n-1} in der Function f vorkommt, so sehen wir aus den Bedingungen (8), dass erst W_k, $W_{k+1}, \cdots W_{n-1}$ von ω abhängig und zwar resp. Func-

---

$$W = \xi\omega - \eta ,$$

und nach der Formel (9) drückt sich daher in jeder infinitesimalen Transformation (α), welche die gegebene Differentialgleichung 1. O. (β) gestattet, die Differenz $\xi\omega - \eta$ durch das Integral

$$f_1(x, y) = \text{const.}$$

der Gleichung in der Form aus:

$$\xi\omega - \eta = \frac{F_1(f_1)}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} .$$

tionen von ω und seinen $0., 1., \ldots, (n-k-1)^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten werden, sodass aus der letzten Bedingung (8) *nur eine partielle Differentialgleichung* $(n-k)^{ter}$ *O. für* ω resultirt.

Nun sind die *partiellen Differentialgleichungen 1. O.* die einzigen, die wir stets zu integriren wissen, d. h. deren Lösung wir auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen können. Wollen wir also, dass unser Problem, alle Differentialgleichungen n^{ter} O. (2) zu finden, welche bei gegebenem ξ und η eine infinitesimale Transformation von der Form (3), oder bei gegebenem W eine solche von der Form (6) gestatten, *allgemein lösbar* werde, so dürfen wir für W nur eine Function von x, y, y_1 setzen, müssen also der allgemeinen Aufgabe die speciellere substituiren:

A. *Alle Charakteristiken* (1) *zu finden, welche eine infinitesimale Transformation von der Form* (6) *gestatten, in der* W *eine gegebene Function von* x, y, y_1 *allein ist.*

Das ist aber wohlbemerkt im Falle $n > 2$ eine wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit unsrer Betrachtungen. Denn wenn wir umgekehrt verlangen, dass die gegebene Differentialgleichung n^{ter} O. (2) eine infinitesimale Transformation (6) gestatten soll, in der W nur von x, y, y_1 abhängt, dass also bei gegebenem ω die Bedingungen (8) erfüllt werden sollen durch eine blosse Function W von x, y, y_1, so treten in der resultirenden partiellen Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen W und den unabhängigen Variabeln x, y, y_1, so oft $n > 2$ ist, noch die Parameter $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ auf, die W eben nicht enthalten soll, und die Aufgabe ist daher für jedes ω nur möglich im Falle $n = 2$, d. h., was unmittelbar die erste Behauptung dieses § begründet und überdies im folgenden § von selbst noch klarer hervortreten wird, im Allgemeinen gestattet eine Differentialgleichung zwischen y und x, deren Ordnung > 2 ist, keine infinitesimale Transformation (6), in der W eine blosse Function von x, y, y_1 wäre. Wenn wir also, um lösbare Probleme zu gewinnen, uns auf die speciellere Aufgabe A beschränken, so scheiden wir hierdurch für jedes $n > 2$ von vornherein gewisse Differentialgleichungen n^{ter} O. ganz von der Betrachtung aus.

Das Problem A lässt sich nun aber seinerseits wieder auf eine andere Form bringen, welche die Lösung wesentlich erleichtert.

Mit der infinitesimalen Transformation (6) müssen nämlich die gesuchten Charakteristiken (1) gleichzeitig auch die folgende:

$$Uf \equiv \frac{\partial W}{\partial y_1} Af - Vf$$

gestatten, und umgekehrt. Diese infinitesimale Transformation ist aber wieder von der ursprünglichen Form (3) und in ihr haben ξ und η die Werthe:

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial y_1}, \qquad \eta = y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} - W, \tag{11}$$

sind also mit W zugleich blosse Functionen von x, y, y_1, und zwar Functionen, zwischen denen identisch die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_1} = y_1 \frac{\partial \xi}{\partial y_1}. \tag{12}$$

Umgekehrt führt, so oft ξ und η blosse Functionen von x, y, y_1 sind, die dieser Bedingung genügen, die Annahme

$$W = \xi y_1 - \eta$$

ihrerseits wieder zu den Formeln (11). Wir können daher unser Problem A auch so fassen:

B. *Alle Charakteristiken* (1) *zu finden, welche eine solche infinitesimale Transformation von der Form* (3) *gestatten, in der* ξ *und* η *irgend zwei gegebene, der Bedingung* (12) *genügende Functionen von* x, y, y_1 *allein sind.*

Betrachten wir aber, wie in der Differentialgleichung n^{ter} O. (2), y als eine Function von x mit den Differentialquotienten:

$$y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k},$$

so sagt die Voraussetzung (12) nichts anderes aus, als dass *mit* ξ *und* η *auch*

$$\frac{d\eta}{dx} - y_1 \frac{d\xi}{dx}$$

eine blosse Function von x, y, y_1 *sein soll*, und dass im Falle $n = 2$ also:

$$A\eta - y_1 A\xi \equiv \frac{d\eta}{dx} - y_1 \frac{d\xi}{dx}$$

ist. Zugleich wird dann für eine jede von y_{n-1} freie Function f:

$$Af \equiv \frac{df}{dx}.$$

Bei dieser Auffassung der Variabeln $y, y_1, \ldots y_{n-1}$ ergeben sich daher aus (4) für das Problem B die n Bedingungen:

$$(13)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{d\eta}{dx} - y_1 \dfrac{d\xi}{dx} \\ \eta_2 = \dfrac{d\eta_1}{dx} - y_2 \dfrac{d\xi}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-1} = \dfrac{d\eta_{n-2}}{dx} - y_{n-1} \dfrac{d\xi}{dx} \\ U\omega = A\eta_{n-1} - \omega A\xi, \end{cases}$$

wo im Falle $n > 2$ in der letzten Gleichung natürlich $A\xi$ auch ersetzt werden kann durch $\dfrac{d\xi}{dx}$.

Im Problem B werden also alle Coefficienten der infinitesimalen Transformation (3) bereits ganz und gar, d. h. ganz unabhängig von der unbekannten Function ω, bestimmt durch die beiden ersten Coefficienten ξ und η, oder durch die eine willkürliche Function $W \equiv \xi y_1 - \eta$ von x, y, y_1, und weil η_1, das sich nach (11) und (13) durch W also ausdrückt:

$$(11')\qquad \eta_1 = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y_1 \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

ebenfalls nur von x, y, y_1 abhängt, so sagt LIE, dass, so oft eben ξ und η blosse, der Bedingung (12) genügende Functionen von x, y, y_1 sind und η_1 durch die erste Gleichung (13) definirt wird, die drei Gleichungen mit der unendlich kleinen Zahl ε:

$$(14)\quad x' = x + \varepsilon\xi, \qquad y' = y + \varepsilon\eta, \qquad y_1' = y_1 + \varepsilon\eta_1,$$

oder also, in der willkürlichen Function W von x, y, y_1 ausgedrückt, die drei Gleichungen:

$$(14')\qquad x' = x + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial y_1}, \qquad y' = y + \varepsilon\left(y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} - W\right),$$

$$y_1' = y_1 - \varepsilon\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y_1 \frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

eine infinitesimale Berührungsformation (der Ebene) von der charakteristischen Function $W \equiv \xi y_1 - \eta$ *bilden*, und nimmt als Symbol dieser infinitesimalen Berührungstransformation den Ausdruck:

$$(15) \quad U_1 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

$$\equiv \frac{\partial W}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} - W\right) \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} + y_1 \frac{\partial W}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot ^1)$$

Wenn wir hiernach unter der (für $n = 2$ an sich klaren) Forderung, *dass die Differentialgleichung* n^{ter} *O.* (2) *eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation* (15) *gestatten soll*, im Falle $n > 2$ verstehen, dass diese Gleichung oder ihre Charakteristik (1) diejenige infinitesimale Transformation (3) gestatten soll, welche durch die $n - 1$ ersten Formeln (13) aus der infinitesimalen Berührungstransformation entsteht oder von dieser erzeugt wird, so können wir das Problem B kurz bezeichnen als die Aufgabe:

C. *Alle Differentialgleichungen* n^{ter} *O. zwischen* y *und* x *zu finden, die eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation zulassen,*

und zugleich können wir die dem Problem A hinzugefügte Bemerkung jetzt einfacher so aussprechen:

Es ist nur eine Ausnahme, wenn eine Differentialgleichung zwischen y *und* x, *deren Ordnung* > 2 *ist, überhaupt eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet.*

Dagegen lässt jede Differentialgleichung 2. O. zwischen y und x unendlich viele infinitesimale Berührungsformationen zu. Denn sie gestattet ja stets infinitesimale Transformationen von der Form:

$$Vf \equiv W(x, y, y_1) \frac{\partial f}{\partial y} + W_1(x, y, y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

und da, wenn $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$ die beiden Integrale der gegebenen Differentialgleichung 2. O. sind, nach (9) in einer jeden solchen infinitesimalen Transformation der Coefficient W die Form besitzt:

---

1) Trsfgr. II, p. 253.

$$W = \frac{F_1(f_1, f_2)\frac{\partial f_2}{\partial y_1} - F_2(f_1, f_2)\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y_1} - \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y}},$$

so ist nach dem Vorhergehenden dies zugleich die allgemeine Form der charakteristischen Function einer jeden infinitesimalen Berührungsformation der gegebenen Differentialgleichung 2. O.

Der Forderung (12) wird im Besondern genügt, wenn man ξ und η als blosse Functionen von x und y, oder die charakteristische Function $W = \xi y_1 - \eta$ der infinitesimalen Berührungstransformation (14) *linear in Bezug auf* y_1 annimmt. Die beiden ersten Gleichungen (14) werden dann:

$$(16) \qquad x' = x + \varepsilon\xi(x, \eta), \qquad y' = y + \varepsilon\eta(x, y)$$

und definiren x', y' als blosse Functionen von x, y, und umgekehrt. Die infinitesimale Berührungstransformation kommt dann zurück auf die *infinitesimale Punkttransformation* (16), als deren Symbol wir nach LIE nehmen:

$$(17) \qquad U_0 f \equiv \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

und ganz analog wie vorhin werden wir sagen, *die Differentialgleichung* n^{ter} *O.* (2) *gestattet eine gegebene infinitesimale Punkttransformation* (17), so oft die diesem $U_0 f$ durch die $n - 1$ ersten Gleichungen (13) zugeordnete Operation (3) eine infinitesimale Transformation der Charakteristik (1) ist.

Ich hebe endlich noch hervor, *dass eine infinitesimale Berührungstransformation*

$$U_1 f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}$$

niemals eine triviale infinitesimale Transformation der Charakteristik (1) *(für* $n = 2$*) sein oder (für* $n > 2$*) erzeugen kann.*

In der That, die Operation (3) ist nur dann eine triviale infinitesimale Transformation der Charakteristik (1), wenn die n Relationen bestehen:

$$\eta \equiv y_1\xi, \ldots, \qquad \eta_{n-2} \equiv y_{n-1}\xi, \qquad \eta_{n-1} \equiv \omega\xi.$$

Stellt aber $U_1 f$ überhaupt eine infinitesimale Berührungstrans-

formation dar, so wird dieselbe durch die charakteristische Function $W \equiv \xi y_1 - \eta$ erzeugt, und es kann also schon die erste jener n Bedingungen unmöglich erfüllt sein.

§ 5.

Bestimmung aller Differentialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei Variabeln, die eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation gestatten.

Um nun zur Lösung unsres Problems B oder C überzugehen, muss ich zunächst den folgenden Hülfssatz vorausschicken:

Satz 8. *Eine lineare partielle Differentialgleichung 1. O.*

$$\text{(A)} \qquad \sum_1^n{}_k X_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_k} = Z(x_1, \ldots x_n, z),$$

in der die Unbekannte z selbst nur in Z, und auch hier nur rational auftritt, besitzt keine anderen Lösungen z, als solche, die sich durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{(B)} \qquad F(f_1, f_2, \ldots f_n) = 0$$

definiren lassen, wo $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängige Lösungen der Charakteristik:

$$\text{(C)} \qquad \sum_1^n{}_k X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bedeuten, und umgekehrt definirt (wie bekannt) jede Gleichung von der Form (B), *die wirklich z enthält, stets eine Lösung z der Gleichung* (A).

Nimmt man nämlich f frei von z an, so reducirt sich die Charakteristik (C) auf die

$$\sum_1^n{}_k X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

und besitzt daher $n-1$ von z freie Lösungen $f = f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, die, falls etwa $X_n \not\equiv 0$ ist, unabhängig von einander sind in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Durch die $n-1$ Gleichungen:

$$\text{(D)} \qquad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

kann man daher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ an Stelle von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ als neue unabhängige Variable einführen, und wenn man die

Substitution der Auflösungen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ dieser Gleichungen durch Einschliessung in [] andeutet und $[z] \equiv \zeta$, $[f] \equiv \varphi$ setzt, so reduciren sich hierdurch die Gleichungen (A) und (C) resp. auf:

$$(A') \qquad [X_n] \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} = [Z] \qquad \text{und}$$

$$(C') \qquad [X_n] \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + [Z] \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0 ,$$

worin $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ nur noch als Constanten eingehen. Die Gleichung (A') ist daher eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. zwischen ζ und x_n, die, weil sie ζ selbst ebenfalls nur in rationaler Weise enthält, bekanntlich keine singuläre Lösung ζ besitzen kann, von der also, wenn

$$\varphi = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \zeta)$$

die Lösung der Charakteristik (C') ist, jedwede Lösung ζ durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi(\alpha_1, \ldots. \alpha_{n-1}, x_n, \zeta) = \text{const.} = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

definirt wird. Eliminirt man daher rückwärts wieder $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ durch die zur Reduction benutzten Auflösungen der Gleichungen (D), so erhält man in:

$$f_n = \varphi(f_1, \ldots, f_{n-1}, x_n, \zeta)$$

die n^{te} Lösung der Charakteristik (C), und für *jede* Lösung z der Gleichung (A) eine Gleichung von der Form:

$$f_n = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) ,$$

w. e. z. b. w. — [1])

---

1) Genau ebenso zeigt man allgemein: Ein JACOBI'sches System simultaner partieller Differentialgleichungen 1. O.

$$\sum_1^n{}_k X_k(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_k} = Z_\varrho(x_1, \ldots x_n, z_1, \ldots z_r), \quad \varrho = 1, \ldots r,$$

welches die Unbekannten $z_1, \ldots z_r$ selbst nur rechter Hand und auch hier nur rational enthält, lässt niemals andere Systeme Lösungen $z_1, \ldots z_r$ zu als solche, welche r Gleichungen von der Form genügen:

$$F_\varrho(f_2, f_3, \ldots, f_{n+r}) = 0, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots r,$$

wo $f = f_2, f_3, \ldots f_{n+r}$ unabhängige Lösungen der Charakteristik bezeichnen:

$$\sum_1^n{}_k X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\varrho Z_\varrho \frac{\partial f}{\partial z_\varrho} = 0 . —$$

Dies festgesetzt, handelt es sich nun darum, alle Differentialgleichungen n^{ter} O.

$$(1) \qquad y_n = \omega(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}), \qquad y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k},$$

oder alle Charakteristiken:

$$(2) \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-2}} + \omega \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0$$

zu bestimmen, welche eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation:

$$(3) \qquad U_1 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

gestatten. ξ und η sind also solche beliebig gegebene Functionen von x, y, y_1, für welche, immer y als Function von x mit den Differentialquotienten:

$$y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k}$$

betrachtet,

$$\eta_1 \equiv \frac{d\eta}{dx} - y_1 \frac{d\xi}{dx}$$

wiederum nur von x, y, y_1 abhängt. Ueberdies kann, als charakteristische Function der infinitesimalen Berührungstransformation (3), der Ausdruck $W \equiv \xi y_1 - \eta$ nicht identisch Null sein, und wenn wir zunächst voraussetzen, dass diese Transformation sich nicht auf eine blosse Punkttransformation reducirt, dass also W nicht linear in y_1 sei, so ist auch sicher:

$$\xi \equiv \frac{\partial W}{\partial y_1} \not\equiv 0.$$

Dass aber die Gleichungen (1) und (2) die infinitesimale Berührungstransformation (3) zulassen sollten, hatten wir (im Falle $n > 2$) dahin definirt, dass die (früher durch Uf bezeichnete) Operation:

$$(4) \qquad U_{n-1} f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}},$$

deren weitere Coefficienten sich successive aus den Formeln bestimmen:

$$(5) \qquad \eta_i = \frac{d\eta_{i-1}}{dx} - y_i \frac{d\xi}{dx},$$

eine infinitesimale Transformation der Charakteristik (2) sein sollte, und hierzu war nothwendig und hinreichend, dass ω der linearen partiellen Differentialgleichung 1. O. genügt:

$$U_{n-1}\omega = A\eta_{n-1} - \omega A\xi \,. \tag{6}$$

Diese partielle Differentialgleichung hat aber eben die in Satz 8 vorausgesetzte Form (die Unbekannte ω selbst kommt nur auf der rechten Seite vor und diese ist in ω vom Grade 1 oder 2, jenachdem $n > 2$ oder $= 2$ ist). Sind daher $f = f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$ $n+1$ unabhängige Lösungen der Charakteristik:

$$U_{n-1}f + (A\eta_{n-1} - \omega A\xi)\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \,,$$

so ist es, damit unsere Differentialgleichung n^{ter} O. (1) die gegebene infinitesimale Berührungstransformation (3) gestatte, nothwendig und hinreichend, dass ω die Auflösung einer Gleichung von der Form sei:

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) = 0 \,.$$

Ersetzt man aber ω durch den n^{ten} Differentialquotienten y_n, so geht Af in $\dfrac{df}{dx}$, und damit, wenn man die Formeln (5) auch auf $i = n$ ausdehnt, die letzte Charakteristik über in:

$$U_n f \equiv U_{n-1}f + \eta_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \,. \tag{7}$$

Führen wir also y_n selbst an Stelle von ω als Unbekannte ein, d. h. schreiben wir unsre Differentialgleichung n^{ter} O. (1) in der unaufgelösten Form:

$$\varphi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n) = 0 \,,$$

so sehen wir:

Satz 9. *Damit eine Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x die gegebene infinitesimale Berührungsformation (3) gestatte, ist nothwendig und hinreichend, dass sie die Form habe:*

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) = 0 \,,$$

wo unter $f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$ irgend $n+1$ unabhängige Lösungen der Charakteristik (7) zwischen f und den $n+2$ unabhängigen Variabeln $x, y, y_1, \cdots, y_n$ zu verstehen sind.

Solche $n+1$ Lösungen lassen sich aber immer angeben.

so oft man irgend zwei unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_1 f = 0$ kennt.

Nach den Formeln (5) ist nämlich für $i > 0$ jedes η_i eine Function von $x, y, y_1, \ldots, y_i$ allein. Setzt man daher unter Zugrundelegung dieser Formeln allgemein:

$$(9) \qquad U_i f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

so stellt für jedes $k > 0$ die Gleichung

$$U_k f = 0$$

eine Charakteristik zwischen der Function f und den $k+2$ unabhängigen Variabeln $x, y, y_1, \ldots, y_k$ dar, und jede Lösung

$$f = \varphi(x, y, y_1, \ldots, y_k)$$

dieser Charakteristik genügt derselben eo ipso auch dann noch, wenn man y als eine Function von x mit den Differentialquotienten $y_1, y_2, \ldots$ betrachtet. In dieser Auffassung ist daher mit $U_k \varphi$ gleichzeitig auch sein vollständiger Differentialquotient:

$$\frac{d U_k \varphi}{dx} \equiv 0 .$$

Diese Identität — und sie würde auch noch gelten, wenn nur überhaupt $U_k \varphi \equiv$ const. wäre — stellt sich aber entwickelt also dar:

$$\frac{d\xi}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{d\eta}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$+ \sum_1^k \frac{d\eta_i}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \sum_1^k \eta_i \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \equiv 0 .$$

Zugleich ist:

$$\varphi_1 \equiv \frac{d\varphi}{dx} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sum_1^{k-1} y_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + y_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k},$$

also:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \equiv \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \equiv \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{k+1}} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y_k},$$

dagegen für $i = 1, 2, \ldots k$:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i-1}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} .$$

Unsere Identität lässt sich daher so schreiben:

$$\frac{d\xi}{dx}\left\{\varphi_1 - y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \sum_1^{k-1} y_{i+1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} - y_{k+1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{k+1}}\right\}$$

$$+\frac{d\eta}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \xi\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \sum_1^{k-1}\frac{d\eta_i}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} + \frac{d\eta_k}{dx}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{k+1}}$$

$$+\sum_i^k \eta_i\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_{i-1}}\right) \equiv 0\,,$$

oder geordnet nach den partiellen Differentialquotienten von φ_1 und φ:

$$\frac{d\xi}{dx}\varphi_1 + \xi\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \sum_1^k \eta_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} + \left(\frac{d\eta_k}{dx} - y_{k+1}\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{k+1}}$$

$$+\left(\frac{d\eta}{dx} - y_1\frac{d\xi}{dx} - \eta_1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sum_1^{k-1}\left(\frac{d\eta_i}{dx} - y_{i+1}\frac{d\xi}{dx} - \eta_{i+1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \equiv 0\,.$$

Nach (5) sind aber hierin die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten von φ einzeln $\equiv 0$, und nach (5) und (9) lässt sich daher die Identität einfach so schreiben:

$$\frac{d\xi}{dx}\varphi_1 + U_{k+1}\varphi_1 \equiv 0\,.$$

Ist demnach $f = \psi$ irgend eine zweite Lösung von $U_k f = 0$, so hat man auch für $\psi_1 \equiv \frac{d\psi}{dx}$:

$$\frac{d\xi}{dx}\psi_1 + U_{k+1}\psi_1 \equiv 0\,.$$

Aus beiden Identitäten aber folgt:

$$U_{k+1}\frac{\psi_1}{\varphi_1} \equiv \frac{\varphi_1 U_{k+1}\psi_1 - \psi_1 U_{k+1}\varphi_1}{\varphi_1^2} \equiv 0\,, \quad \text{d. h.}$$

Satz 10. *Sind für irgend ein $k > 0$ $f = \varphi, \psi$ irgend zwei Lösungen der Charakteristik $U_k f = 0$* (oder allgemeiner bez. Lösungen der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen $U_k f = a$ und $U_k f = b$, wo a und b beliebige Constanten), *so ist stets zugleich*

$$f = \frac{\psi_1}{\varphi_1} \equiv \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}} \equiv \frac{d\psi}{d\varphi}$$

eine Lösung der Charakteristik:

$$U_{k+1} f \equiv U_k f + \eta_{k+1} \frac{\partial f}{\partial y_{k+1}} = 0,$$

von der φ und ψ, da sie y_{k+1} gar nicht enthalten, selbst schon Lösungen sind.

Sind daher im Besonderen $f = u, v$ zwei Lösungen der Charakteristik

$$U_1 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,$$

so sind:

$$f = u,\ v,\ \frac{dv}{du}$$

drei Lösungen der Charakteristik $U_2 f = 0$, und zwar sind diese drei Lösungen unabhängig von einander, so oft u und v es sind, weil alsdann $\frac{dv}{du}$ nothwendig die Variable y_2 enthält, die in u und v gar nicht vorkommt[1]).

In der That, aus:

$$U_1 u \equiv \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} \equiv 0,$$

$$\frac{du}{dx} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + y_2 \frac{\partial u}{\partial y_1},$$

folgt:

$$\xi \frac{du}{dx} \equiv (\xi y_1 - \eta) \frac{\partial u}{\partial y} + (\xi y_2 - \eta_1) \frac{\partial u}{\partial y_1},$$

---

1) Hieraus erhellt unmittelbar, dass man u und v nicht willkürlich als unabhängige Functionen von x, y, y_1 wählen kann, wenn sie einer Charakteristik von der Form $U_1 f = 0$ genügen sollen. Bestimmen z. B. die beiden Gleichungen

$$x' = u, \quad y' = v; \quad \left(y_1 = \frac{dy}{dx}\right)$$

eine Berührungstransformation, so ist gerade umgekehrt stets $\frac{dv}{du}$ frei von y_2.

also ist:

$$\frac{dv}{du} \equiv \frac{(\xi y_1 - \eta)\frac{\partial v}{\partial y} + (\xi y_2 - \eta_1)\frac{\partial v}{\partial y_1}}{(\xi y_1 - \eta)\frac{\partial u}{\partial y} + (\xi y_2 - \eta_1)\frac{\partial u}{\partial y_1}} \equiv \frac{Q}{P}.$$

Sollte daher $\frac{dv}{du}$ frei von y_2 sein, so müsste die Relation bestehen:

$$P\frac{\partial Q}{\partial y_2} - Q\frac{\partial P}{\partial y_2} \equiv \xi(\xi y_1 - \eta)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \equiv 0,$$

d. h., da weder ξ noch $\xi y_1 - \eta \equiv 0$ sein kann,

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

und das ist unmöglich, da wegen $\xi \not\equiv 0$ zwei unabhängige Lösungen von $U_1 f = 0$ stets gerade in Bezug auf y und y_1 von einander unabhängig sind.

Nach Satz 10 liefern ferner die beiden Lösungen $f = u$, $\frac{dv}{du}$ von $U_2 f = 0$ die Lösung

$$f = \frac{\frac{d}{dx}\frac{dv}{du}}{\frac{du}{dx}} \equiv \frac{d^2v}{du^2}$$

von $U_3 f = 0$, und diese Lösung enthält sicher y_3, weil y_2, das in u fehlt, nothwendig in $\frac{dv}{du}$ auftritt, ist folglich unabhängig von den Lösungen $f = u, v, \frac{dv}{du}$, die $U_3 f = 0$ mit $U_2 f = 0$ gemein hat.

Genau so geht man weiter und erhält damit den allgemeinen:

Satz 11. *Sind $f = u$, v irgend zwei unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_1 f = 0$, so sind gleichzeitig*

$$f = u,\ v,\ \frac{dv}{du},\ \frac{d^2v}{du^2},\ \cdots \frac{d^{k-1}v}{du^{k-1}}$$

$k+1$ unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_k f = 0$.

Nach Satz 9 ist aber damit zugleich als Lösung unsres Problems der für jedes $n \geqq 2$ geltende Satz gewonnen:

Satz 12. *Jede Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x, die eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation*

$$U_1 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

gestattet, ist, wenn u und v irgend zwei unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_1 f = 0$ *bedeuten, in der Form:*

$$\frac{d^{n-1} v}{du^{n-1}} = \Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \cdots, \frac{d^{n-2} v}{du^{n-2}}\right)$$

enthalten.

Da die infinitesimale Berührungstransformation $U_1 f$ auf die infinitesimale Punkttransformation:

$$U_0 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \tag{10}$$

zurückkommt, so oft man ξ und η als blosse Functionen von x und y annimmt, so gilt im Allgemeinen dieser Satz auch für diejenigen Differentialgleichungen n^{ter} O. zwischen y und x, welche eine gegebene infinitesimale Punkttransformation (10) gestatten. Indessen wird nun einmal der Ausnahmefall $\xi \equiv 0$ möglich und andrerseits kann man die Aufsuchung der Lösungen $f = u$, v der durch (10) erzeugten Charakteristik $U_1 f = 0$ selbst auf eine einfachere Aufgabe zurückführen.

In dem besondern Falle nämlich, wo ξ und η blosse Functionen von x und y sind, ist unmittelbar klar, dass Satz 10 auch für $k = 0$ noch gilt. Sind daher $f = u$ und $f = w$ resp. Lösungen etwa der beiden Gleichungen:

$$U_0 f = 0 \quad \text{und} \quad U_0 f = 1,$$

was eo ipso u und w als unabhängige Functionen von x und y voraussetzt, so ist

$$f = \frac{\dfrac{dw}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} \equiv \frac{dw}{du}$$

eine Lösung der Charakteristik $U_1 f = 0$, der auch $f = u$, nicht aber $f = w$ genügt. Die beiden Lösungen u und $\frac{dw}{du}$ sind überdies sicher unabhängig von einander, weil in Folge der Unabhängigkeit von u und w selbst

$$\frac{dw}{du} \equiv \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + y_1 \frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y}}$$

nicht frei von y_1 sein kann. Wir können demnach jetzt im letzten Satze $v = \frac{dw}{du}$ nehmen und erhalten auf diese Weise sofort den

Satz 13. *Damit eine Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x die gegebene infinitesimale Punkttransformation*

$$U_0 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

gestatte, ist nothwendig und hinreichend, dass sie sich mit Hülfe je einer beliebigen Lösung u und w der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$U_0 u = 0 \quad \text{und} \quad U_0 w = 1$$

auf die Form

$$F\left(u, \frac{dw}{du}, \cdots, \frac{d^n w}{du^n}\right) = 0$$

bringen lasse[1],
ein Satz, der nun für jedes $n \geqq 1$ gilt, und im Falle $n = 1$ im Besondern auch die Differentialgleichung

$$\xi dy - \eta dx \equiv M du = 0,$$

für welche $U_0 f$ nur trivial ist, in der Gestalt

$$\frac{1}{\frac{dw}{du}} = 0$$

umfasst[2].

---

1) Vgl. Inf. Trsf. p. 887.

2) Im Satze 13, dessen letzte Gleichung sich natürlich auch so schreiben lässt:

$$\Phi\left(u, \frac{du}{dw}, \cdots, \frac{d^n u}{dw^n}\right) = 0,$$

kann man (im Gegensatz zu 12) auch u und w an Stelle von $U_0 f$ willkürlich wählen. Denn sind u, w irgend zwei gegebene, unabhängige Functionen von x, y, so bestimmen sich ξ und η eindeutig aus den beiden linearen Gleichungen $U_0 w = 1$, $U_0 u = 0$.

Satz 13 lässt sich ferner auch ganz direct und unabhängig vom Satze 8 also beweisen:

§ 6.

Infinitesimale Berührungstransformationen der Differentialgleichungen 1. O. zwischen zwei Variabeln. Die Lie'schen Multiplicatorsätze.

So lange man an unserer *ursprünglichen* Definition der infinitesimalen Transformationen einer gegebenen Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x als solcher Operationen festhält, welche jede Lösung der Charakteristik dieser Differentialgleichung wiederum in eine Lösung überführen, hat es offenbar

---

Nimmt man $\xi \equiv 1$, $\eta \equiv 0$, so wird nach (5) auch jedes $\eta_i \equiv 0$ und daher reducirt sich mit $U_0 f$ zugleich auch $U_{n-1} f$ auf $\frac{\partial f}{\partial x}$. Damit dann also (1) die infinitesimale Punkttransformation $U_0 f$ gestatte, ist nach (6) nur erforderlich, dass $\frac{\partial w}{\partial x} \equiv 0$, d. h. dass w frei von x sei.

Ist nun eine beliebige infinitesimale Punkttransformation (1 0) vorgelegt, so kann man an Stelle von x und y die Lösung $f = u$ der Gleichung $U_0 f = 0$ nebst irgend einer Lösung w der Gleichung $U_0 w = 1$ als neue Variable einführen. Hierdurch wird, wenn man w zur neuen unabhängigen Variabeln nimmt, die Gleichung (1) transformirt in eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d^n u}{dw^n} = \Omega\left(w, u, \frac{du}{dw}, \cdots, \frac{d^{n-1}u}{dw^{n-1}}\right) \tag{1'}$$

und zugleich geht $U_0 f$ über in $\frac{\partial f}{\partial w}$. Damit aber (1) $U_0 f$ gestatte, ist (vgl. § 7) nothwendig und hinreichend, dass die transformirte Gleichung (1') die transformirte infinitesimale Punkttransformation, also $\frac{\partial f}{\partial w}$ gestatte, und das verlangt nach dem Vorhergehenden eben nur, dass Ω frei von w sei.

Auf dieselbe Art erkennt man sofort, dass sich der Satz auch ausdehnen lässt auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung und dass im Besonderen der Satz gilt (vgl. Inf. Trsf. p. 298, sowie STAUDE, p. 514 dieses Bandes):

Jedes System von n Differentialgleichungen 2. O.

$$\frac{d^2 x_k}{dx^2} = X_k\left(x, x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dx}, \cdots, \frac{dx_n}{dx}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

welches eine gegebene infinitesimale Punkttransformation

$$U_0 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

gestattet, lässt sich mit Hülfe der n Lösungen $f = v_1, v_2, \ldots, v_n$ der Charakteristik $U_0 f = 0$ und einer Lösung w der Gleichung $U_0 w = 1$ stets auf die von w selbst freie Form bringen:

$$\frac{d^2 v_k}{dw^2} = \Omega_k\left(v_1, \ldots, v_n, \frac{dv_1}{dw}, \cdots, \frac{dv_n}{dw}\right). —$$

keinen Sinn, von infinitesimalen Berührungstransformationen einer Differentialgleichung 1. O., oder von infinitesimalen Punkttransformationen einer endlichen Gleichung zwischen y und x zu reden. Bei dieser Auffassung verbietet es sich daher von selbst zu fragen, wie sich Satz 12 für $n = 1$, oder Satz 13 für $n = 0$ gestaltet.

Geht man dagegen von der *zweiten*, in § 2 gewonnenen Definition aus, so kann man auch von infinitesimalen Transformationen sprechen, die von *endlichen* Gleichungen gestattet werden.

Im Besondern gestattet nach dieser zweiten Definition die endliche Gleichung

$$y = \omega(x)$$

eine gegebene infinitesimale Punkttransformation

$$x' = x + \varepsilon\xi(x, y), \qquad y' = y + \varepsilon\eta(x, y),$$

in der, um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, $\xi \not\equiv 0$ sei, so oft diese Transformation bis auf Grössen von der Ordnung ε genau die Gleichung $y' = \omega(x')$ nur wieder in die Gleichung $y = \omega(x)$ überführt, so oft also die Gleichung $\eta = \frac{d\omega}{dx}\xi$, oder:

$$\xi\frac{dy}{dx} = \eta \tag{1}$$

durch $y = \omega(x)$ identisch erfüllt wird[1]).

Ist nun $u = \text{const.}$ das Integral der Differentialgleichung 1. O. zwischen y und x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi}, \tag{2}$$

oder $f = u$ die Lösung der Charakteristik:

$$U_0 f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so besitzt allerdings, übereinstimmend mit Satz 13, die Gleichung $y = \omega(x)$ diese Eigenschaft, so oft sie für irgend ein constantes c der Gleichung

$$u = c \tag{3}$$

genügt, d. h. so oft sie die vollständige oder irgend eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (2) darstellt.

---

1) Vgl. Inf. Trsf. p. 70—72.

Aber nun hängen nicht mehr umgekehrt alle Gleichungen $y = \omega(x)$, welche die gegebene infinitesimale Punkttransformation $U_0 f$ gestatten, nothwendig mit dem Integrale (3) der Gleichung (2) in dieser Weise zusammen.

Denn einerseits wird die Gleichung (1) auch durch jede etwaige gemeinsame Wurzel $y = \omega(x)$ der beiden Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$ erfüllt — und man kann ja den Functionen ξ und η jeden beliebigen gemeinsamen Factor, z. B. auch den Factor $u - x$, beilegen und damit erreichen, dass jene gemeinsame Wurzel keine Gleichung von der Form (3) befriedigt — und ausserdem kann, sobald man nicht überdies verlangt, dass $\frac{\eta}{\xi}$, als Function von y betrachtet, den Charakter einer rationalen Function besitzen soll, die Differentialgleichung (2) recht wohl auch noch singuläre Lösungen zulassen.

Für die infinitesimale Punkttransformation:

$$U_0 f \equiv (y - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - x)\, y^{\frac{2}{3}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

z. B. wird die Gleichung (1) einmal erfüllt durch $y = x$, weiter durch die im Integrale

$$3y^{\frac{1}{3}} - x = c$$

enthaltenen vollständigen und particulären Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$$

und endlich durch die singuläre Lösung $y = 0$ dieser Gleichung. Hier existiren also neben der Gleichungenschaar (3) noch die beiden, ausserhalb derselben stehenden Einzelgleichungen $y = x$ und $y = 0$, welche die infinitesimale Punkttransformation unverändert lässt, und man sieht also, dass man im Falle $n = 0$ vom Satze 13 nur noch das Hinreichende, nicht aber mehr auch die Nothwendigkeit aufrecht erhalten kann.

Wir werden ferner bei Zugrundelegung unsrer zweiten Definition sagen dürfen, *die Differentialgleichung 1. O.*

$$y_1 = \omega(x, y); \qquad y_1 \equiv \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

gestattet eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation

(5) $\quad x' = x + \varepsilon\xi\,, \quad y' = y + \varepsilon\eta\,, \quad y_1' = y_1 + \varepsilon\eta_1\,,$

oder symbolisch

$$U_1 f \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}\,,$$

so oft sie, als eine endliche Gleichung zwischen den drei Variablen x, y, y_1 angesehen, diese infinitesimale Transformation gestattet.

Dies kommt darauf hinaus, dass die Gleichung

$$U_1(\omega - y_1) \equiv \xi\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial y} - \eta_1 = 0 \qquad \text{oder:}$$

(6) $$\xi\frac{\partial y_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial y_1}{\partial y} - \eta_1 = 0$$

durch den Werth (4) von y_1 identisch erfüllt werden muss, und das wieder verlangt, wenn man sich die Gleichung (4) durch Auflösung einer Gleichung $f(x, y, y_1) = 0$ nach y_1 entstanden denkt, dass die Gleichung $U_1 f = 0$ eine blosse Folge der Gleichung $f = 0$ sei, woraus sich unmittelbar das mit Satz 12 harmonirende Resultat ergiebt:

Satz 14. *Jede Differentialgleichung 1. O. von der Form:*

(7) $$F(u, v) = 0\,,$$

in der $f = u$, v irgend zwei unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_1 f = 0$ sind, gestattet sicher die gegebene infinitesimale Berührungstransformation (5).

Aber die Gleichung (6) ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen y_1 und x, y, die nicht mehr die in Satz 8 vorausgesetzte Form besitzt. Es erscheint mir daher sehr fraglich, ob umgekehrt jede Function y_1 von x und y, die ihr genügt, nothwendig eine Gleichung von der Form (7) befriedigen muss, doch habe ich bisher auch noch kein Beispiel gefunden, in welchem dies nicht der Fall wäre, und muss daher diese Frage offen lassen.

Führen wir die charakteristische Function

$$W(x, y, y_1) \equiv \xi y_1 - \eta$$

unsrer infinitesimalen Berührungstransformation (5) ein, so wird nach den Formeln (11) und (11′) von § 4:

(8) $$\xi \equiv \frac{\partial W}{\partial y_1}\,, \quad \eta \equiv y_1\frac{\partial W}{\partial y_1} - W\,, \quad \eta_1 \equiv -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y_1\frac{\partial W}{\partial y}\right).$$

Hieraus erhellt sofort, dass

$$U_1 W \equiv - W \frac{\partial W}{\partial y},$$

und daher die Gleichung $U_1 W = 0$ stets eine Folge der Gleichung $W = 0$ ist. Jede gegebene Differentialgleichung 1. O. (4) gestattet also im Besondern alle diejenigen infinitesimalen Berührungstransformationen (5), deren charakteristische Function W durch die Substitution (4) identisch verschwindet. Sehen wir aber ab von diesen *trivialen* infinitesimalen Berührungstransformationen der Gleichung (4), so lässt die Forderung, dass die Gleichung (6) durch $y_1 = \omega$ identisch erfüllt werden muss, eine wichtige Deutung zu.

Sie verlangt nämlich nach (8), dass zwischen der gegebenen Function $\omega(x,y)$ und der Function $W(x, y, \omega)$ identisch die Gleichung stattfinde:

$$(9) \quad \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) - W\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Da nun $W(x, y, \omega) \not\equiv 0$ sein soll, so kann man M als Function von x, y durch die Gleichung definiren:

$$M = \frac{1}{W(x, y, \omega)}.$$

Für diese Function aber wird:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right),$$

ihre Einführung verwandelt daher die Gleichung (9) in:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \omega\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \omega}{\partial y} \equiv \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M\omega}{\partial y} = 0,$$

und das ist nichts anderes als die partielle Differentialgleichung der Multiplicatoren der gegebenen Differentialgleichung (4). Also hat man den:

Satz 15. *Gestattet die gegebene Differentialgleichung 1. O.*

$$y_1 = \omega(xy), \qquad y_1 \equiv \frac{dy}{dx}$$

eine nicht triviale infinitesimale Berührungstransformation von der charakteristischen Function $W(x, y, y_1)$, so besitzt sie stets zugleich den Multiplicator

$$M = \frac{1}{W(x, y, \omega)} .$$

Und umgekehrt, wenn M ein Multiplicator der gegebenen Differentialgleichung ist, so ist jede Function $W(x, y, y_1)$, welche der Bedingung genügt:

$$W(x, y, \omega) = \frac{1}{M} ,$$

die charakteristische Function einer nicht trivialen infinitesimalen Berührungstransformation dieser Differentialgleichung[1]).

Nimmt man im Besondern ξ und η als blosse Functionen von x, y an und setzt:

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \omega \frac{\partial f}{\partial y} , \qquad U_0 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

so wird nach (6) und (8) $W = \xi y_1 - \eta$ die charakteristische Function einer infinitesimalen Berührungstransformation der Differentialgleichung 1. O. (4), so oft die Gleichung:

$$U_0 \omega = A\eta - \omega A\xi$$

identisch besteht. Dies aber sagt (vgl. die Anmerkung zu p. 721) nichts anderes aus, als dass die Differentialgleichung (4) die infinitesimale Punkttransformation $U_0 f$ gestattet. Schreiben wir daher noch $\frac{Y}{X}$ statt ω, so ergiebt sich aus Satz 15 zugleich noch der wichtige

Satz 16. *Jede nicht triviale infinitesimale Punkttransformation*

$$U_0 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

der Differentialgleichung 1. O. zwischen y und x:

$$X dy - Y dx = 0$$

liefert den Multiplicator

$$M = \frac{1}{X\eta - Y\xi}$$

dieser Differentialgleichung, und umgekehrt[2]).

---

1) LIE, Verhandlungen der Ges. d. Wiss. zu Christiania 1874, p. 254, und Math. Annalen XI, p. 554.

2) Ebenda p. 247 und p. 493, Inf. Trsf. p. 104, Satz 4. Der Satz folgt auch sofort aus der letzten Formel in der Anmerkung zu p. 721.

Die selbstverständliche Bemerkung endlich, dass eine Function $W(x, y, y_1)$ niemals identisch verschwinden kann für einen Werth $\omega(x, y, c)$ von y_1, der eine willkürliche, in W nicht vorkommende Constante c enthält, lässt aus den Sätzen 14 und 15 unmittelbar noch die Folgerung hervorgehen:

Satz 17. *Bezeichnet $U_1 f$ eine gegebene infinitesimale Berührungstransformation von der charakteristischen Function $W(x, y, y_1)$ und sind $f = u, v$ irgend zwei unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_1 f = 0$, so lässt sich jede Differentialgleichung 1. O. von der Form:*

$$F(u, v) = c\,, \qquad y_1 \equiv \frac{dy}{dx}\,,$$

in der c eine willkürliche, in W nicht vorkommende Constante bedeutet, immer durch Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$ und durch eine blosse Quadratur integriren, indem ihre Auflösung $\frac{dy}{dx} = \omega$ den Multiplicator besitzt:

$$M = \frac{1}{W(x, y, \omega)}\,.$$

§ 7.

Nutzen einer bekannten infinitesimalen Transformation zur Integration der betreffenden Charakteristik [1].

Von einer gegebenen Charakteristik:

$$(1) \qquad Af \equiv \sum_0^n{}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

kenne man irgend eine nicht triviale infinitesimale Transformation:

$$(2) \qquad Uf \equiv \sum_0^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Dann ist:

$$A(Uf) - U(Af) \equiv \lambda Af$$

und $Uf \not\equiv \varrho Af$. Die beiden Gleichungen

$$(3) \qquad Af = 0\,, \qquad Uf = 0$$

---

1) Vgl. Inf. Trsf. p. 434.

bilden daher ein zweigliedriges vollständiges System mit $n+1$ unabhängigen Variabeln und haben folglich $n-1$ unabhängige Lösungen $f = f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ gemein. Man kann diese Lösungen durch vollständige Integration eines gewissen Systems von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen finden.

Diese Integrationsmethode ist wohlbekannt, wir werden sie aber in allem Folgenden nirgends anwenden und brauchen uns also auch nicht weiter bei ihr aufzuhalten.

Gehen nun durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln $w, w_1, \ldots w_n$ an Stelle von $x, x_1, \ldots x_n$ respective f in F, Af in BF und Uf in VF über, so verwandelt diese Transformation gleichzeitig jede Lösung f der Charakteristik $Af = 0$ in eine Lösung F der transformirten Charakteristik $BF = 0$. Nach Voraussetzung ist aber mit f zugleich auch Uf eine Lösung von $Af = 0$, und diese Lösung geht durch die betrachtete Transformation in VF über. Mit F ist daher zugleich auch VF eine Lösung von $BF = 0$; überdies kann nicht $VF \equiv \varrho BF$ sein, weil sonst gegen die Voraussetzung auch $Uf \equiv \varrho Af$ sein müsste. Unsere infinitesimale Transformation der gegebenen Charakteristik (1) wird demnach durch jede Transformation der unabhängigen Variabeln übergeführt in eine wiederum nicht triviale infinitesimale Transformation der transformirten Charakteristik.

Bildet man nun mit den $n-1$ unabhängigen Lösungen $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ des vollständigen Systems (3) die $n-1$ Gleichungen:

$$(4) \qquad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

so bestimmen diese stets $n-1$ von den $n+1$ Variabeln $x, x_1, \ldots, x_n$, etwa $x_2, x_3, \ldots x_n$, als Functionen der beiden übrigen und der neuen Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Diese Transformation führt jede Function $f(x, x_1, \ldots x_n)$ in eine Function $F(x, x_1, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})$ über und reducirt Af und Uf bez. auf:

$$BF \equiv [Af] \equiv [X]\frac{\partial F}{\partial x} + [X_1]\frac{\partial F}{\partial x_1},$$

$$VF \equiv [Uf] \equiv [\xi]\frac{\partial F}{\partial x} + [\xi_1]\frac{\partial F}{\partial x_1},$$

wo die [ ] hervorheben soll, dass für $x_2, x_3, \ldots x_n$ die Auflösungen der Gleichungen (4) einzusetzen sind.

Nach dem Vorhergehenden ist nun VF eine nicht triviale

infinitesimale Transformation der Charakteristik $BF = 0$. Nach Satz 16 besitzt daher die gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. zwischen x_1 und x:

$$[X]dx_1 - [X_1]dx = 0\,,$$

deren Integral die Lösung der Charakteristik $BF = 0$ liefert, den Multiplicator

$$M = \frac{1}{[X\xi_1 - X_1\xi]}$$

und dieses Integral:

$$F(x, x_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \text{const.}$$

lässt sich also durch eine blosse Quadratur berechnen. Indem man aber aus demselben rückwärts α_1, α_2, $\ldots$ α_{n-1} mittelst der zur Reduction benutzten Auflösungen der Gleichungen (4) wieder eliminirt, erhält man in dem resultirenden Werthe f_n der linken Seite des Integrales die fehlende letzte Lösung $f = f_n$ der gegebenen Charakteristik (1). Demnach:

Satz 18. *Kennt man von einer gegebenen Charakteristik*

$$Af \equiv \sum_0^n{}_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

irgend eine nicht triviale infinitesimale Transformation:

$$Uf \equiv \sum_0^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,,$$

so kann man alle Lösungen dieser Charakteristik, oder alle Integrale des äquivalenten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$$

durch Aufsuchung aller Lösungen des zweigliedrigen vollständigen Systems

$$Af = 0\,, \qquad Uf = 0$$

und durch eine Quadratur finden.

§ 8.

Integration einer Differentialgleichung höherer Ordnung zwischen zwei Variabeln, wenn man eine infinitesimale Berührungstransformation derselben kennt.

Wir hatten (p. 714) die infinitesimalen Transformationen einer gegebenen Differentialgleichung n^{ter} O. zwischen y und x:

$$(1) \qquad y_n = \omega(x, y, y_1, \cdots y_{n-1}), \qquad y_k \equiv \frac{d^k y}{dx^k}$$

definirt als die infinitesimalen Transformationen ihrer Charakteristik:

$$(2) \qquad Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-2}} + \omega \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

So oft man daher von der Differentialgleichung (1) irgend eine nicht triviale infinitesimale Transformation:

$$(3) \qquad U_{n-1} f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + \eta_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$$

kennt, findet man nach dem letzten Satze die n Integrale dieser Gleichung durch Integration des vollständigen Systems

$$(4) \qquad Af = 0, \qquad U_{n-1} f = 0$$

und durch eine Quadratur.

Sei nun im Besonderen irgend eine *infinitesimale Berührungstransformation*:

$$(5) \qquad U_1 f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

bekannt, welche die gegebene Differentialgleichung n^{ter} O. (1) gestattet.

Im Falle $n = 2$ ist dann $U_1 f$ schon unmittelbar auch eine infinitesimale Transformation der Charakteristik (2). Im Falle $n > 2$ aber braucht man nur (p. 726) die weiteren Coefficienten der Operation (3) successive aus den Formeln zu berechnen:

$$(6) \qquad \eta_k = \frac{d\eta_{k-1}}{dx} - y_k \frac{d\xi}{dx},$$

(in denen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ als die $n-1$ ersten Differentialquotienten der Function y von x betrachtet werden), um in (3) eine infinitesimale Transformation der Charakteristik (2) zu ge-

winnen, und die so erhaltene infinitesimale Transformation dieser Charakteristik ist niemals trivial (p. 727). Man kann also weiterhin nun unmittelbar die *Methode des letzten* § anwenden.

Nach derselben wird man zunächst das vollständige System (4) zu integriren und hierdurch $n-1$ unabhängige Integrale

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ f_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

der gegebenen Differentialgleichung (1) zu gewinnen suchen. Ist dies gelungen, so braucht man nur noch aus den $n-1$ Integralen, die stets in Bezug auf $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ unabhängig von einander sind, y_1 durch x, y und die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ auszudrücken und diesen Werth von y_1 in die Gleichung

$$\frac{dy - y_1\,dx}{\xi y_1 - \eta} = 0$$

zu substituiren, deren linke Seite hierdurch ein vollständiges Differential wird. Die Integration der so erhaltenen Differentialgleichung 1. O. zwischen x und y liefert dann die fehlende, letzte Integralgleichung der Gleichung (1).

Nach Satz 12 kann man aber zur Integration der gegebenen Differentialgleichung n^{ter} O. (1) mit der bekannten infinitesimalen Berührungstransformation $U_1 f$ auch *folgenden andern Weg* einschlagen.

Zunächst sucht man durch Integration der beiden Differentialgleichungen 1. O.

$$dx : dy : dy_1 = \xi : \eta : \eta_1 \tag{7}$$

die beiden Lösungen

$$f = u(x, y, y_1),\quad v(x, y, y_1)$$

der Charakteristik $U_1 f = 0$. In einer wirklichen infinitesimalen Berührungstransformation kann niemals $\xi \equiv 0$ sein (p. 730). Diese beiden Lösungen sind daher jedenfalls in y und y_1 unabhängig von einander, und die $n+1$ Gleichungen:

$$u(x, y, y_1) = u,\qquad v(x, y, y_1) = v,$$

$$\frac{\dfrac{v}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} = v_1,\qquad \frac{\dfrac{dv_1}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} = v_2,\qquad \ldots,\qquad \frac{\dfrac{dv_{n-2}}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} = v_{n-1},$$

in denen wieder y als Function von x mit den Differentialquotienten $y_1, y_2, \ldots$ betrachtet wird, bestimmen folglich stets y, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Functionen von

$$x, u, v, v_1 \equiv \frac{dv}{du}, \ldots, v_{n-1} \equiv \frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}}.$$

Durch Substitution ihrer Auflösungen muss sich nach Satz 12 aber zugleich auch x aus der Gleichung (1) wegheben. Diese Gleichung reducirt sich hierdurch also auf eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ O. zwischen u und v allein, und wenn man durch vollständige Integration daraus

$$v = \psi(u, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \tag{8}$$

gefunden hat, so bleibt nur noch übrig, diejenige Differentialgleichung 1. O. zwischen y und x zu integriren, die man aus der letzten Gleichung durch Substitution der Werthe von u und v erhält. Für diese Differentialgleichung aber gilt der Satz 17; man braucht sie somit nur nach $y_1 \equiv \frac{dy}{dx}$ aufzulösen, um aus der charakteristischen Function W der gegebenen infinitesimalen Berührungstransformation (5) sofort einen Multiplicator der aufgelösten Gleichung zu erhalten, und kann diese also durch eine blosse Quadratur integriren.

Man sieht unmittelbar, dass man auf diesem Wege *zwei Integrationen* (nämlich die Integration der beiden Differentialgleichungen 1. O. (7)) *mehr* auszuführen hat, als bei der ersten Methode.

Wenn man aber, um diese Methoden an Beispielen zu erproben, die zu integrirende Differentialgleichung n^{ter} O. selbst erst aus einer gegebenen infinitesimalen Berührungstransformation $U_1 f$ abgeleitet hat, so laufen beide Methoden im Grunde in eine zusammen, und umgekehrt erscheint dann auf den ersten Anblick die zweite Methode einfacher und kürzer als die erste. Trotzdem wird dieselbe in der Regel doch schwierigere Rechnungen erfordern als jene.

Bei diesem Ausgehen von $U_1 f$ selbst gestalten sich nämlich unsere beiden Methoden also:

Nach Satz 12 erhält man alle Differentialgleichungen n^{ter} O. (1), welche die gegebene infinitesimale Berührungstransformation $U_1 f$ gestatten, indem man aus den beiden Lösungen $f = u(x, y, y_1)$, $v(x, y, y_1)$ der Charakteristik $U_1 f = 0$ die Ausdrücke berechnet

$$(9)\qquad v_1 = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}, \quad v_2 = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{\frac{du}{dx}}, \quad \ldots, \quad v_{n-2} = \frac{\frac{dv_{n-3}}{dx}}{\frac{du}{dx}},$$

mit denselben dann die Gleichung bildet:

$$(10)\qquad \frac{\frac{dv_{n-2}}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \varphi(u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}),$$

in der die Function φ willkürlich ist, und diese Gleichung schliesslich durch Auflösung nach y_n, welches nur linker Hand und auch hier nur linear auftritt, auf die Form (1) bringt.

Will man nun bei gegebenem φ irgend eine so erhaltene Differentialgleichung n^{ter} O. (1) integriren, so kommt dies nach der *zweiten Methode* einfach darauf zurück, die vollständige Lösung (8) derjenigen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ O. zwischen v und u zu finden, welche aus der Gleichung (10) entsteht, wenn man jedes

$$v_k = \frac{d^k v}{du^k}$$

setzt. Die aus dieser vollständigen Lösung entspringende letzte Differentialgleichung

$$(11)\quad v(x, y, y_1) = \psi(u(x, y, y_1), \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}), \quad y_1 \equiv \frac{dy}{dx}$$

integrirt sich dann durch Auflösung nach y_1 und durch eine blosse Quadratur.

Nach der *ersten Methode* dagegen muss man zunächst mit Hülfe der Formeln (6) aus $U_1 f$ die entsprechende infinitesimale Transformation $U_{n-1} f$ der Charakteristik (2) berechnen und sodann alle Lösungen des vollständigen Systems:

$$(12)\qquad Af = 0, \quad U_{n-1} f = 0$$

aufsuchen. Nach Satz 11 sind aber:

$$f = u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}$$

n unabhängige Lösungen der Charakteristik $U_{n-1} f = 0$ und die beiden Gleichungen:

$$(13)\qquad u(x, y, y_1) = u, \quad v(x, y, y_1) = v$$

bestimmen zusammen mit den $n-2$ Gleichungen (9) stets $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ durch:

$$x, u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}.$$

Ueberdies kann man, da die Werthe von $u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ den Differentialquotienten y_{n-1} nicht enthalten, die Gleichungen (9) auch so schreiben:

$$v_1 = \frac{Av}{Au}, \quad v_2 = \frac{Av_1}{Au}, \quad \ldots, \quad v_{n-2} = \frac{Av_{n-3}}{Au},$$

während die Gleichung (10) durch Substitution ihrer Auflösung $y_n = \omega$ in die Identität übergeht:

$$\frac{Av_{n-2}}{Au} \equiv \varphi(u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}).$$

Endlich hat man, wenn man F als eine Function von $x, u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ betrachtet:

$$AF \equiv Ax\frac{\partial F}{\partial x} + Au\frac{\partial F}{\partial u} + Av\frac{\partial F}{\partial v} + \cdots + Av_{n-2}\frac{\partial F}{\partial v_{n-2}},$$

$$U_{n-1}F \equiv Ux\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Wird daher durch die Gleichungen (13) und (9):

$$f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) = F(x, u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}),$$

so führen dieselben gleichzeitig Af und $U_{n-1}f$ über in:

$$(14)\begin{cases} Af = \dfrac{\partial F}{\partial x} + Au\left\{\dfrac{\partial F}{\partial u} + v_1\dfrac{\partial F}{\partial v} + \cdots + v_{n-2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{n-3}} + \varphi\dfrac{\partial F}{\partial v_{n-2}}\right\}, \\ U_{n-1}f = \xi\dfrac{\partial F}{\partial x}, \end{cases}$$

und reduciren hiermit das vollständige System (12) auf die eine Charakteristik:

$$BF \equiv \frac{\partial F}{\partial u} + v_1\frac{\partial F}{\partial v} + \cdots + v_{n-2}\frac{\partial F}{\partial v_{n-3}} + \varphi\frac{\partial F}{\partial v_{n-2}} = 0,$$

d. h. sie führen, wie von vornherein zu erwarten war, dieses vollständige System auf dieselbe Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ O. zwischen u und v zurück, welche die zweite Methode gleich zu allererst ergeben hatte.

Hat man durch vollständige Integration dieser Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ O. ihre $n-1$ Integrale:

(15) $$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ f_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

gefunden, so bestimmen diese Integrale nun stets $v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ durch x, u und die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, und nach (14) reducirt diese Transformation Af und $U_{n-1}f$ auf:

$$Af = \frac{\partial F}{\partial x} + [Au]\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad U_{n-1}f = [\xi]\frac{\partial F}{\partial x},$$

wo die [ ] hervorheben soll, dass, nachdem man Au und ξ mittelst der Gleichungen (13) und (9) in $x, u, v, v_1, \ldots v_{n-2}$ ausgedrückt hat, nunmehr $v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ durch die Integrale (15) zu eliminiren sind, oder also, wenn man in diesen Integralen für $v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ ihre Werthe in $x, y, y_1, \ldots y_{n-1}$ gesetzt hat, dass man $y, y_1, \ldots y_{n-1}$ mit Hülfe der Gleichungen (15) und der Gleichung $u(x, y, y_1) = u$ eliminiren muss.

Nach § 7 gestattet daher die Charakteristik

$$\frac{\partial F}{\partial x} + [Au]\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

aus der man die letzte, noch fehlende Lösung der gegebenen Charakteristik (2) findet, die infinitesimale Transformation $[\xi]\frac{\partial F}{\partial x}$, oder die ihr äquivalente gewöhnliche Differentialgleichung:

$$du - [Au]dx = 0$$

besitzt den Multiplicator

$$M = -\frac{1}{[\xi Au]}$$

(in welchem man natürlich auch das — Zeichen weglassen könnte). Man erhält somit die letzte Lösung der Charakteristik (2) durch Ausführung der Quadratur:

(16) $$\int\left(\frac{dx}{[\xi]} - \frac{du}{[\xi Au]}\right) = \alpha_n,$$

und wenn diese Quadratur ergeben hat:

(17) $$F(x, u, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \alpha_n,$$

so bilden nach Substitution der Werthe (13) und (9) von $u, v, v_1, \ldots, v_{n-2}$ die n Gleichungen (15) und (17) zusammen ein System vollständiger Integralgleichungen der betrachteten Differentialgleichung n^{ter} O. (1).

Man sieht, dass man bei dieser Anwendung der ersten Methode $U_{n-1}f$ selbst gar nicht zu berechnen braucht, und dass sich hierbei unsre beiden Methoden im Grunde nur in der letzten Quadratur unterscheiden. Es ist aber auch klar, dass diese Quadratur in der *zweiten* Methode im Allgemeinen weit schwieriger auszuführen sein wird, als in der *ersten*. Denn die letzte Gleichung (11), die man nach der zweiten Methode zu integriren hat, ist eine Differentialgleichung 1. O. zwischen y und x selbst; die Quadratur, welche zu ihrem Integrale führt, liefert demnach unmittelbar die vollständige, endliche Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung n^{ter} O., während diese endliche Integralgleichung in der ersten Methode erst durch Elimination von $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ aus den n Integralgleichungen (15) und (17) erhalten werden kann und daher in der Regel eine sehr complicirte Gestalt besitzen wird.

§ 8.

Durchführung der Rechnung an zwei einfachen Beispielen[1]).

Der charakteristischen Function $W = y_1^2$ gehört die infinitesimale Berührungstransformation zu:

$$U_1 f \equiv 2y_1 \frac{\partial f}{\partial x} + y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

Hier besitzt die Charakteristik $U_1 f = 0$ die beiden Lösungen:

$$u = y_1, \qquad v = xy_1 - 2y$$

und aus ihnen folgt:

$$v_1 \equiv \frac{dv}{du} = x - \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{dv_1}{du} = \frac{y_1 y_2}{y_2^2}.$$

Alle Differentialgleichungen 2. und 3. O. zwischen y und x, welche die infinitesimale Berührungstransformation (1) gestatten, sind demnach enthalten in den Formen:

$$\frac{dv}{dy_1} \equiv x - \frac{y_1}{y_2} = \varphi(y_1, v) \quad \text{und} \quad \frac{dv_1}{dy_1} \equiv \frac{y_1 y_2}{y_2^3} = \varphi(y_1, v, v_1)$$

oder:

---

1) Uebereinstimmend mit dem Früheren sind auch hier immer die Differentialquotienten der unbekannten Function y von x durch $y_1, y_2, \ldots$ bezeichnet worden.

(2) $y_2 = \dfrac{y_1}{x - \varphi(y_1, v)}$ und (3) $y_3 = \dfrac{y_2^2}{y_1}\varphi(y_1, v, v_1)$,

worin

(4) $$v \equiv xy_1 - 2y, \qquad v_1 \equiv x - \frac{y_1}{y_2}$$

ist und y_1 selbst die Rolle unseres früheren u spielt.

Die Integration einer jeden gegebenen Gleichung (2) oder (3) lässt sich also durch eine blosse Quadratur bewirken, so oft man die Differentialgleichung

(5) $\dfrac{dv}{dy_1} = \varphi(y_1, v)$, oder (6) $\dfrac{dv_1}{dy_1} \equiv \varphi(y_1, v, v_1)$; $v_1 \equiv \dfrac{dv}{dy_1}$

bereits vollständig integrirt hat.

Nehmen wir z. B.

$$\varphi(y_1, v) \equiv -\frac{v}{y_1},$$

legen uns also zur Integration die Differentialgleichung 2. O. vor:

(7) $$y_2 = \frac{y_1^2}{xy_1 + v} \equiv \frac{y_1^2}{2(xy_1 - y)},$$

so erhält die Gleichung (5) das Integral:

(8) $$y_1 v = a \equiv 3\alpha_1,$$

welches somit auch ein Integral der gegebenen Gleichung (7) ist.

Um nun das zweite Integral zu finden, also unsere erste Methode anzuwenden, ist nur zu beachten, dass $u = y_1$, $\xi = 2y_1$, und

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{y_1^2}{xy_1 + v}\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

die Charakteristik der Gleichung (7) ist, also nach (8):

$$Au = \frac{y_1^2}{xy_1 + v} = \frac{y_1^3}{xy_1^2 + 3\alpha_1}$$

wird. Die Gleichung (16) des vorigen § liefert daher sofort die folgende zweite Integralgleichung von (7)

$$\int\left(\frac{dx}{2y_1} - \frac{dy_1}{2y_1 Au}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dx}{y_1} - \frac{x\,dy_1}{y_1^2} - \frac{3\alpha_1\,dy_1}{y_1^4}\right) = \text{const.}$$

d. i.:

(9) $$\frac{x}{y_1} + \frac{\alpha_1}{y_1^3} = \alpha_2 \equiv \tfrac{2}{3}b.$$

Nach (8) und (9) sind:

$$y_1(xy_1 - 2y) = a, \qquad \frac{2xy_1 - y}{y_1^2} = b$$

die beiden Integrale der Gleichung (7) und ihre vollständige Lösung stellt sich, im Parameter y_1 ausgedrückt, also dar:

$$(10) \qquad x = a_2 y_1 - \frac{a_1}{y_1^2}, \qquad y = \frac{a_2}{2} y_1^2 - \frac{2a_1}{y_1}.$$

Um dagegen die vollständige endliche Integralgleichung der Gleichung (7) zu finden, haben wir nach der zweiten Methode die Gleichung (8) oder:

$$y_1(xy_1 - 2y) = a$$

nach y_1 aufzulösen. Das giebt:

$$y_1 = \frac{y + \sqrt{ax + y^2}}{x} \equiv \frac{a}{\sqrt{ax + y^2} - y}.$$

Wegen $W = y_1^2$ ist also:

$$\int\left(\frac{dy - y_1\,dx}{y_1^2}\right)$$

$$\equiv \frac{1}{a^2}\int\left((\sqrt{ax+y^2} - y)^2 dy - a(\sqrt{ax+y^2} - y)\,dx\right) = \text{const.}$$

diese endliche Integralgleichung. In der That ergiebt die Ausführung der Quadratur

$$(11) \qquad 3axy + 2y^3 - 2\sqrt{(ax + y^2)^3} = \text{const.},$$

welche Gleichung man auch durch Elimination von y_1 aus den Gleichungen (8) und (9) erhält. Diese Quadratur berechnet sich aber schon nicht mehr ganz so einfach, wie diejenige, auf welche die erste Methode führte. —

Ist weiter in (3)

$$\varphi(y_1, v, v_1) \equiv \frac{2v_1^2}{v},$$

handelt es sich also um die Integration der Differentialgleichung 3. O.

$$(12) \qquad y_3 = \frac{2y_2^3}{y_1}\frac{v_1^2}{v} \equiv \frac{2y_2}{y_1}\frac{(xy_2 - y_1)^2}{xy_1 - 2y},$$

so wird die Gleichung (6)

$$\frac{d^2v}{dy_1^2} = \frac{2}{v}\left(\frac{dv}{dy_1}\right)^2,$$

ergiebt also:

$$\frac{dv}{dy_1} \equiv v_1 = \frac{v^2}{\alpha_1}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\frac{1}{v}}{dy_1} + \frac{1}{\alpha_1} = 0$$

und damit weiter:

$$\frac{1}{v} + \frac{y_1}{\alpha_1} = \text{const.} \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

sodass sie die Integralgleichungen:

$$\frac{v^2}{v_1} = \alpha_1, \quad \frac{1}{v} + \frac{y_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{13}$$

und die vollständige Lösung

$$v = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - y_1} \tag{14}$$

erhält. Nun ist:

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{2y_2^2}{y_1}\frac{v_1^2}{v}\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

die Charakteristik der Gleichung (12) und daher $Au \equiv Ay_1 \equiv y_2$. Aus (4) und (13) ferner folgt:

$$y_2 = \frac{y_1}{x - v_1} = \frac{\alpha_1 y_1}{\alpha_1 x - v^2} = \frac{y_1(\alpha_2 - y_1)^2}{x(\alpha_2 - y_1)^2 - \alpha_1}.$$

Wegen $\xi = 2y_1$ fügt daher unsere erste Methode den beiden Gleichungen (13) als dritte Integralgleichung von (12) die Gleichung hinzu:

$$\int\left(\frac{dx}{2y_1} - \frac{dy_1}{2y_1y_2}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dx}{y_1} - \frac{x\,dy_1}{y_1^2} + \frac{\alpha_1\,dy_1}{y_1^2(\alpha_2 - y_1)^2}\right) = \text{const.}$$

oder:

$$\frac{x}{y_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\left(\frac{2y_1 - \alpha_2}{y_1(\alpha_2 - y_1)} + \frac{2}{\alpha_2}\log\frac{y_1}{y_1 - \alpha_2}\right) = \text{const.}$$

und damit sind in den beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} v \equiv xy_1 - 2y = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - y_1}, \\ \dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\dfrac{x}{y_1} + \dfrac{\alpha_2(2y_1 - \alpha_2)}{y_1(\alpha_2 - y_1)} + \log\left(\dfrac{y_1}{y_1 - \alpha_2}\right)^2 = \text{const.}, \end{cases} \tag{15}$$

da sie y_2 nicht enthalten, die vollständigen Integralgleichungen der Differentialgleichung (12) gewonnen.

Nach der zweiten Methode dagegen zieht man aus (14) oder

$$(xy_1 - 2y)(\alpha_2 - y_1) = \alpha_1$$

durch Auflösung:

$$y_1 = \frac{2y + \alpha_2 x + \sqrt{(2y - \alpha_2 x)^2 - 4\alpha_1 x}}{2x} \equiv \Theta$$

und würde nun durch Ausführung der Quadratur:

$$\int \left(\frac{dy}{\Theta^2} - \frac{dx}{\Theta}\right) = \text{const.}$$

direct die vollständige endliche Integralgleichung von (12) gewinnen. Da sich aber diese Integralgleichung auch durch Elimination von y_1 aus den beiden Gleichungen (15) ergeben muss, so sieht man von vornherein, dass diese Quadratur zwar noch ausführbar ist, dass ihre directe Ausführung aber doch jedenfalls schon eine recht unbequeme Rechnung erfordern wird.

F. Hausdorff, *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.* III. Vorgelegt von dem ordentl. Mitgl. Bruns.

Die folgende Arbeit behandelt den Einfluss der Abplattung auf die mittlere astronomische Refraction nach einer strengeren Methode, als dies bisher geschehen ist. Die Schwierigkeit in der Refractionstheorie besteht immer darin, explicite Ausdrücke zu erhalten, die bis in den Horizont hinunter gültig bleiben, während es verhältnissmässig leicht ist, Entwicklungen nach Potenzen von tang Zenithdistanz zu finden. Eine zweite Schwierigkeit besteht in der Unterscheidung erlaubter Vernachlässigungen von unerlaubten oder zweifelhaften; in der bisherigen Refractionstheorie wird, wohl hauptsächlich in Folge der Einführung ungeeigneter Variablen, schon vom ersten Schritte an vernachlässigt, sodass im Schlussresultat die Wirkung der beiseite geschafften Grössen kaum mehr reinlich abzuschätzen ist. Um beiden Schwierigkeiten zu entgehen, wurde ein Verfahren eingeschlagen, das nicht das kürzeste, aber das sicherste ist: die Aufgabe wurde als Problem der Störungsrechnung angesetzt, d. h. die Bewegung des Lichttheilchens nach Potenzen der Abplattung getrennt. Das Glied nullter Ordnung entspricht der Refraction im sphärisch geschichteten Medium, das Glied erster Ordnung, bei dem hier stehen geblieben wurde, liefert die »Störungen«. Im § 1 werden die Differentialgleichungen aufgestellt und in der herkömmlichen Weise, mit Benutzung der canonischen Form, integrirt; § 2 giebt die Störungsfunction und die expliciten Ausdrücke der gestörten Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten, aus denen im § 3 die Refraction in Zenithdistanz und

Azimuth gebildet wird. Im § 4 werden die gefundenen Ausdrücke nach Potenzen gewisser Refractionsconstanten entwickelt, zunächst für eine allgemeine Refractionsformel, sodann im § 5 für eine specielle; eine numerische Uebersicht charakterisirt den Verlauf der Hauptglieder dieser Entwicklung. Das Resultat ist im Wesentlichen negativ, d. h. bestätigt die bisher vorausgesetzte Unmerklichkeit des Einflusses der Abplattung für diejenigen Zenithdistanzen, in denen genaue Beobachtungen möglich sind. Anders liegt die Sache, wenn die Refraction nicht zum Zwecke der Reduction astronomischer Beobachtungen, sondern zur Ableitung mittlerer Lufttemperaturen gebraucht wird. Die Grundlage hierzu würden Refractionsbeobachtungen hauptsächlich in der Nähe des Horizontes zu bilden haben; hier aber steigt auch der Einfluss der Abplattung auf Grössen, die bei der dann geforderten Genauigkeit nicht mehr zu vernachlässigen sind. Unsere Untersuchungen kommen also hauptsächlich in Frage für die Refraction als Gegenstand der atmosphärischen Physik, während sie für die astronomische Refraction im engeren Sinne zeigen, dass gegen die bisherige Praxis von dieser Seite nichts einzuwenden ist.

1.

Wir gehen von den Grundgleichungen der Brechung

$$\frac{d}{ds}\left(\mu\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\partial\mu}{\partial x} \tag{1}$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\frac{\partial\mu}{\partial x}, \quad \mu dt = ds \tag{2}$$

aus, wo μ der Brechungsexponent und eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, ds das Bogenelement, t eine Hülfsvariable ist. [Da μ der reciproken Geschwindigkeit des Lichtes proportional ist, so bedeutet t, bis auf einen constanten Factor, die *lebendige Kraft* der Bewegung, während die *Zeit* durch das Integral

$$\int \mu ds$$

dargestellt wird. Die erste Variation dieses Integrales gleich Null gesetzt, liefert die Gleichungen (1) oder (2); in gewöhnlichen mechanischen Problemen ist es umgekehrt das Integral der

lebendigen Kraft, dessen erste Variation verschwindet, und die Zeit die Hülfsvariable, durch deren Einführung die Differentialgleichungen die Form (2) annehmen.]

Die Flächenschaar $\mu = \text{constans}$ weicht um Beträge von der Ordnung der Abplattung α von einer Schaar concentrischer Kugeln ab; wird die Atmosphäre im ruhenden Gleichgewichte gedacht, so fallen die Flächen constanter Dichtigkeit mit den Niveauflächen des Erdkörpers zusammen, μ ist also eine Function der Kräftefunction U. Eine brauchbare Annäherung für diese ist der Ausdruck

$$\frac{U}{M} = \frac{1}{r} + \frac{\alpha a^2}{6r^5}(x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{\alpha}{2a^3}(x^2 + y^2),$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

dessen Ableitung sich z. B. in BRUNS, Die Figur der Erde, § 3 findet. Hier bedeutet M die Erdmasse, a den Aequatorhalbmesser; der Schwerpunkt der Erde ist Coordinatenanfang, die Rotationsachse Z-Achse. Daraus folgt mit Vernachlässigung von α^2

$$(3) \qquad \frac{M^2}{U^2} = r^2 + \alpha a^2 \frac{z^2}{r^2}\left(1 + \frac{r^5}{a^5}\right) - \alpha a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{r^5}{a^5}\right) + \cdots$$

Die Gleichung für den Zusammenhang zwischen μ und U kann auch α enthalten. Entwickeln wir nach Potenzen dieser Grösse, so können wir schreiben

$$\mu = f\left(\frac{M}{U}\right) + \alpha f_1\left(\frac{M}{U}\right) + \cdots,$$

wo f, $f_1 \ldots$ willkürliche, von α freie Functionen ihres Argumentes bedeuten. Entwickeln wir zweitens auch $\frac{M}{U}$ nach Potenzen von α, so folgt aus (3), dass wir ansetzen können:

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{z^2}{r^2}\left(1 + \frac{r^5}{a^5}\right) + \chi(r),$$

χ eine beliebige Function von r,

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\frac{z_0^2}{r_0^2}\left(1 + \frac{r_0^5}{a^5}\right) + \chi(r_0),$$

wo der Index 0 sich auf den Beobachtungsort bezieht,

$$R^2 = r^2 + 2\alpha a^2(\psi - \psi_0),$$
$$\mu = f(R).$$

Die willkürliche Function f_1 ist hier durch χ ersetzt. Für $\alpha = 0$ (sphärische Schichtung) würde sich $\mu = f(r)$ ergeben; diese Function $f(r)$ kann innerhalb gewisser Grenzen sehr verschieden gewählt werden, wenn sie nur eine hinreichende Anzahl numerischer Parameter enthält, deren Werthe durch Anschluss an die Beobachtungen zu ermitteln sind.

Drittens lassen sich auch, immer unter Voraussetzung der Convergenz, die x, y, z nach Potenzen der Abplattung α entwickeln, die hier die Rolle einer störenden Masse spielt; wir beschränken uns durchgängig auf die erste Potenz von α, also die »Störungen erster Ordnung«. — Zur Abkürzung bezeichne S eine Summation über die 3 Achsen, also z. B.

$$Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Dann sei

$$x = \xi + \alpha\xi' + \cdots ,$$
$$S\xi^2 = \varrho^2 , \quad S\xi\xi' = \varrho\varrho' ,$$
$$R^2 = \varrho^2 + 2\alpha\varrho\varrho' + 2\alpha a^2(\psi - \psi_0) ,$$

wo für ψ nunmehr $\psi(\xi, \eta, \zeta)$, also

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{\varrho^2}\left(1 + \frac{\varrho^5}{a^5}\right) + \chi(\varrho) \tag{4}$$

zu setzen ist. Mit

$$\frac{df(\varrho)}{d\varrho} = f'(\varrho) = \varrho\varphi(\varrho) , \quad \frac{d\varphi(\varrho)}{d\varrho} = \varphi'(\varrho)$$

wird dann

$$R = \varrho + \frac{\alpha}{\varrho}[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)] ,$$

$$\mu = f(R) = f(\varrho) + \alpha\varphi(\varrho)[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)] ,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \varphi(R)\left(x + \alpha a^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$= \left\{\varphi(\varrho) + \alpha\frac{\varphi'(\varrho)}{\varrho}[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)]\right\}\left\{\xi + \alpha\left(\xi' + a^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\right\}$$

$$= \xi\varphi(\varrho) + \alpha\left\{\frac{\xi}{\varrho}\varphi'(\varrho)[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)] + \varphi(\varrho)\left(\xi' + a^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\right\}$$

$$\mu\frac{\partial\mu}{\partial x} = f\varphi\xi + \alpha\left\{\frac{\xi}{\varrho}(f\varphi' + \varphi f')[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)] + f\varphi\left(\xi' + a^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\right\}$$

$$= f\varphi\xi + \alpha\left\{f\varphi\xi' + \varrho\varrho'\frac{\partial(f\varphi)}{\partial\xi} + a^2\frac{\partial f\varphi(\psi - \psi_0)}{\partial\xi}\right\} .$$

Die Gleichungen (2) zerfallen also in die beiden Systeme

$$(5) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = f\varphi\xi\,,$$

$$(6) \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = f\varphi\xi' + \varrho\varrho'\frac{\partial(f\varphi)}{\partial\xi} + a^2\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \psi_0 a^2\frac{\partial f\varphi}{\partial\xi}\,,$$

$$Q = f\varphi\psi\,.$$

Das System (5) bestimmt die ungestörte Bewegung und ist vollständig integrirbar; wir nehmen an, ξ, η, ζ und die Differentialquotienten

$$u = \frac{d\xi}{dt}\,, \quad v = \frac{d\eta}{dt}\,, \quad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

seien als unabhängige Functionen von t und 6 Integrationsconstanten $a_1 \ldots a_6$ definirt durch Gleichungen, die andererseits auch $a_1 \ldots a_6$ als unabhängige Functionen von t und ξ, η, ζ, u, v, w ergeben. Diese Voraussetzung ist nur interimistisch zulässig, weil ds das Bogenelement bedeutet, also das particuläre Integral

$$S\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = f^2$$

besteht, wodurch sich die Anzahl der unabhängigen Integrationsconstanten auf 5 erniedrigt. Von diesem particulären Integral sehen wir also vorläufig ab, um im Folgenden die Sätze über canonische Systeme unmittelbar anwenden zu können.

Das zu (6) gehörige *verkürzte* System

$$(7) \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = f\varphi\xi' + \frac{\partial f\varphi}{\partial\xi}(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')$$

besitzt, wie aus (5) durch Differentiation nach einer der Integrationsconstanten a_λ folgt, die 6 particulären Lösungen

$$\xi' = \frac{\partial\xi}{\partial a_\lambda}\,, \quad \eta' = \frac{\partial\eta}{\partial a_\lambda}\,, \quad \zeta' = \frac{\partial\zeta}{\partial a_\lambda}\,,$$

also die allgemeine Lösung mit den 6 neuen Constanten $a_1' \ldots a_6'$

$$(8) \qquad \xi' = \sum_\lambda a_\lambda'\frac{\partial\xi}{\partial a_\lambda}\,.$$

Nach der Methode der Variation der Constanten führen wir die a_λ' als neue Unbekannte in das unverkürzte System (6) ein, das

zu ihrer Bestimmung drei Gleichungen liefert; drei weitere können wir beliebig wählen. Wir setzen in bekannter Weise

$$0 = \sum_\lambda \frac{da_\lambda'}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial a_\lambda}, \tag{9}$$

wonach aus (8)

$$u' = \frac{d\xi}{dt} = \sum_\lambda a_\lambda' \frac{\partial u}{\partial a_\lambda} \tag{8'}$$

folgt und (6) in das System

$$\sum_\lambda \frac{da_\lambda'}{dt} \frac{\partial u}{\partial a_\lambda} = a^2 \frac{\partial Q}{\partial \xi} - a^2 \psi_0 \frac{\partial f\varphi}{\partial \xi} \tag{10}$$

übergeht, das mit (9) zusammen die $\frac{da_\lambda'}{dt}$ bestimmt, die a_λ' also durch blosse Quadraturen zu berechnen gestattet. (Für ξ, η, ζ, u, v, w sind ihre Ausdrücke durch t und die a_λ einzusetzen.) Zur Vereinfachung dieser Rechnung dienen eben die Sätze über canonische Systeme, die wir hier unmittelbar anwenden können. Zunächst folgt mit

$$[a_\lambda, a_\mu] = S\left(\frac{\partial \xi}{\partial a_\lambda} \frac{\partial u}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \xi}{\partial a_\mu} \frac{\partial u}{\partial a_\lambda}\right)$$

aus (9) und (10)

$$\sum_\lambda \frac{da_\lambda'}{dt} [a_\mu, a_\lambda] = S\left(a^2 \frac{\partial Q}{\partial \xi} - a^2 \psi_0 \frac{\partial f\varphi}{\partial \xi}\right) \frac{\partial \xi}{\partial a_\mu}$$

$$= a^2 \frac{\partial Q}{\partial a_\mu} - a^2 \psi_0 \frac{\partial f\varphi}{\partial a_\mu}.$$

Nun lässt sich (5) auf die canonische Form

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \tag{11}$$

$$2H = Su^2 - f^2$$

bringen, die auf unendlich viele Weisen in canonischer Form integrirt werden kann. Als System canonischer Integrationsconstanten können wir z. B. die Anfangswerthe der Variablen für den Beobachtungsort ($t = t_0$) wählen, also

$$a_1 = \xi_0, \quad a_4 = b_1 = u_0,$$
$$a_2 = \eta_0, \quad a_5 = b_2 = v_0,$$
$$a_3 = \zeta_0, \quad a_6 = b_3 = w_0.$$

Dann verschwinden die LAGRANGE'schen Verbindungen $[a_\lambda, a_\mu]$ sämmtlich bis auf

$$[a_1, a_4] = [a_2, a_5] = [a_3, a_6] = 1 ;$$

schreibt man daher auch b_1', b_2', b_3' an Stelle von a_4', a_5', a_6', so wird

$$\frac{da_1'}{dt} = -a^2\left(\frac{\partial Q}{\partial b_1} - \psi_0 \frac{\partial f\varphi}{\partial b_1}\right),$$

$$\frac{db_1'}{\partial t} = +a^2\left(\frac{\partial Q}{\partial a_1} - \psi_0 \frac{\partial f\varphi}{\partial a_1}\right).$$

Wir nehmen nun an, dass die Störungen für $t = t_0$ verschwinden. Diese Voraussetzung ist wegen des particulären Integrales

$$S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \mu^2$$

nicht ohne Weiteres zulässig, wird es aber bei der hier gewählten Darstellung, da das Integral in die beiden folgenden Gleichungen

$$Su^2 = f^2$$

$$Suu' = f\varphi[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)]$$

zerfällt, deren letzte für $t = t_0$, $\xi' = \eta' = \cdots = w' = 0$ befriedigt wird.

Durch Integration erhalten wir also

$$(12)\qquad \begin{cases} a_1' = -a^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial b_1} - \psi_0 \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\right), \\ b_1' = \cdot\ a^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial a_1} - \psi_0 \dfrac{\partial p}{\partial a_1}\right), \\ P = \int_{t_0}^{t} Q\,dt, \quad p = \int_{t_0}^{t} f\varphi\,dt . \end{cases}$$

Die Integration ist so zu verstehen, dass unter dem Integralzeichen für ξ, η, ζ ihre Lösungen (Functionen von t, $a_1, \cdots a_6$) gesetzt werden. Denken wir uns nach erfolgter Integration für $a_1 \cdots a_6$ wieder ihre Ausdrücke als Functionen von t, ξ, η, ζ,

u, v, w eingeführt, so werden P und p Functionen derselben Grössen, und in diesem Sinne wird

$$\frac{\partial P}{\partial a_\lambda} = S\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a_\lambda}\right).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (12) erhält man, wiederum vermöge einer Eigenschaft der canonischen Integrationsconstanten, für die Coordinatenstörungen die Ausdrücke

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi' = -a^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial u} - \psi_0\dfrac{\partial p}{\partial u}\right), \\ u' = \quad a^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial \xi} - \psi_0\dfrac{\partial p}{\partial \xi}\right), \end{cases}$$

womit die Störungsrechnung auf die beiden Integrale P und p zurückgeführt ist.

2.

Um das System

$$(5)\qquad \frac{d^2\xi}{\partial t^2} = f\varphi\xi$$

in symmetrischer Form zu integriren, können wir ähnlich verfahren wie bei Lösung des Zweikörperproblems. Die zweite und dritte Gleichung von (5) geben verbunden

$$\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,$$

also erhalten wir die drei Flächenintegrale

$$(14)\qquad \begin{cases} \eta w - \zeta v = \alpha N, \\ \zeta u - \xi w = \beta N, \\ \xi v - \eta u = \gamma N, \end{cases}$$

worin α, β, γ, die als Richtungscosinus der Relation

$$S\alpha^2 = 1$$

unterliegen mögen, und N die Integrationsconstanten sind.

Ferner folgt aus (5)

$$Su\frac{du}{dt} = f\varphi S\xi\frac{d\xi}{dt},$$

also mit der Integrationsconstante H

$$Su^2 = f^2 + 2H \,. \tag{15}$$

Die Gleichungen (14) geben quadrirt und addirt

$$N^2 = S\xi^2 Su^2 - (S\xi u)^2 \tag{16}$$

oder

$$\varrho^2 \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \varrho^2(f^2 + 2H) - N^2 \,,$$

folglich

$$t - t_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\varrho\, d\varrho}{W} \,, \tag{17}$$

$$W = +\sqrt{\varrho^2(f^2 + 2H) - N^2} \,,$$

wenn wir mit t zugleich ϱ wachsen lassen.

Aus (14) folgt

$$S\alpha\xi = 0 \,,$$

der (ungestörte) Strahl liegt in einer Ebene, und α, β, γ sind die Richtungscosinus des Lothes zur Strahlebene, genommen nach derjenigen Seite, von der aus gesehen die Drehung des Radiusvectors ϱ (im Sinne der wachsenden t, also vom Beobachter nach dem Object hin) *positiv* erscheint, d. h. in demselben Sinne wie die Drehung der $+X$-Achse nach der $+Y$-Achse, gesehen von der $+Z$-Achse.

Die Radienvectoren ϱ_0 und ϱ mögen bei einer positiven Drehung um 90° in ihrer Ebene die Lagen σ_0 und σ annehmen; es seien

f_1, g_1, h_1 die Richtungscosinus von ϱ ,
f_2, g_2, h_2 » » » σ ,
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ » » » ϱ_0 ,
$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ » » » σ_0 .

Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= f_1\varrho \,, \\ Nf_2 &= N(\beta h_1 - \gamma g_1) = u\varrho - f_1 S\xi u \,, \\ \xi_0 &= \alpha_1\varrho_0 \,, \\ N\alpha_2 &= N(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1) = u_0\varrho_0 - \alpha_1 S\xi_0 u_0 \,. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Ist S der Winkel zwischen ϱ_0 und ϱ, so wird

$$(19) \qquad \begin{cases} f_1 = \alpha_1 \cos S + \alpha_2 \sin S, \\ f_2 = -\alpha_1 \sin S + \alpha_2 \cos S. \end{cases}$$

Aus der Gleichung für f_1 folgt

$$\frac{df_1}{dt} = f_2 \frac{dS}{dt} = \frac{u}{\varrho} - f_1 \frac{W}{\varrho^2} = \frac{Nf_2}{\varrho^2},$$

$$dS = \frac{Ndt}{\varrho^2} = \frac{Nd\varrho}{\varrho W},$$

$$(20) \qquad S = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{Nd\varrho}{\varrho W}.$$

Die Gleichungen (14)—(20) stellen die vollständige Lösung von (5) dar; die sechs Integrationsconstanten sind N, H, ϱ_0 und die drei unabhängigen Parameter des Achsensystems α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2.

Damit wird

$$P = \int_{t_0}^{t} f\varphi\psi dt = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}\left[\frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{\varrho^2}\left(1+\frac{\varrho^5}{a^5}\right)+\chi\right]$$

$$= \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}\left(1+\frac{\varrho^5}{a^5}\right)\left(\frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{4}+\frac{\gamma_1^2-\gamma_2^2}{4}\cos 2S+\frac{\gamma_1\gamma_2}{2}\sin 2S\right)+\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{f\varphi\chi}{W}\varrho d\varrho$$

$$= \frac{\gamma_1^2+\gamma_2^2}{4}P_0+\frac{\gamma_1^2-\gamma_2^2}{4}P_1+\frac{\gamma_1\gamma_2}{2}P_2+\int\frac{f\varphi\chi}{W}\varrho d\varrho = \Pi+\int\frac{f\varphi\chi}{W}\varrho d\varrho,$$

$$P_0 = \int\frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}\left(1+\frac{\varrho^5}{a^5}\right),$$

$$P_1 = \int\frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}\left(1+\frac{\varrho^5}{a^5}\right)\cos 2S,$$

$$P_2 = \int\frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}\left(1+\frac{\varrho^5}{a^5}\right)\sin 2S.$$

$$_p = \int f\varphi dt = \int\frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W}.$$

Ferner werde noch gesetzt:

$$(21)\qquad \begin{cases} P_3 = \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} P_1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} P_2 \quad , \\ P_4 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} P_1 \quad - \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} P_2 \, . \end{cases}$$

Um die partiellen Differentialquotienten von P und p nach ξ, η, ζ, u, v, w, genommen in dem oben definirten Sinne, zu erhalten, bilden wir die vollständigen ersten Variationen δP und δp, indem wir alle Grössen bis auf $t - t_0$ als variabel betrachten.

Da p unmittelbar Function von ϱ, ϱ_0, H, N ist, so wird

$$\delta p = \frac{f\varphi\varrho\delta\varrho}{W} - \frac{f_0\varphi_0\varrho_0\delta\varrho_0}{W_0} - \int \frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W^3}(\varrho^2\delta H - N\delta N)$$

$$= \frac{f\varphi\varrho\delta\varrho}{W} - \frac{f_0\varphi_0\varrho_0\delta\varrho_0}{W_0} - K'\delta H + K''N\delta N \, ,$$

$$K' = \int \frac{f\varphi\varrho^3 d\varrho}{W^3} \, , \quad K'' = \int \frac{f\varphi\varrho d\varrho}{W^3} \, .$$

Aus der Gleichung für S folgt ebenso

$$\delta S = \frac{N\delta\varrho}{\varrho W} - \frac{N\delta\varrho_0}{\varrho_0 W_0} + \int \frac{\varrho d\varrho}{W^3}[(f^2 + 2H)\delta N - N\delta H]$$

$$= \frac{N\delta\varrho}{\varrho W} + [\delta S] \, ,$$

sodass $[\delta S]$ die Variation von S bei constantem ϱ bezeichnet.

P hängt ebenfalls ab von ϱ, ϱ_0, H, N, ausserdem von γ_1 und γ_2. Die drei Grössen ϱ_0, H, N treten einerseits explicite, andererseits noch einmal in S auf, während das Vorkommen von ϱ in S bereits durch das erste Glied der nachfolgenden Formel berücksichtigt ist; aus diesem Grunde heisst es im vierten Glied unter dem Integralzeichen $[\delta S]$, nicht δS.

$$\delta P = \frac{Q\varrho\delta\varrho}{W} - \frac{Q_0\varrho_0\delta\varrho_0}{W_0} - \int \frac{Q\varrho d\varrho}{W^3}(\varrho^2\delta H - N\delta N) + \int 2\,[\delta S]\, dP_4$$

$$+ P_0\delta\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{4} + P_1\delta\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} + P_2\delta\frac{\gamma_1\gamma_2}{2} \, .$$

Nun ist

$$\gamma_1 = h_1 \cos S - h_2 \sin S ,$$

$$\gamma_2 = h_2 \cos S + h_1 \sin S ,$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma^2 .$$

$$\delta \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} = \cos 2S \, \delta \frac{h_1^2 - h_2^2}{4} - \sin 2S \, \delta \frac{h_1 h_2}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \delta S ,$$

$$\delta \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} = \sin 2S \, \delta \frac{h_1^2 - h_2^2}{4} + \cos 2S \, \delta \frac{h_1 h_2}{2} + \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{2} \delta S ,$$

$$h_2 \delta \frac{h_1^2 - h_2^2}{4} = h_2 \frac{\gamma \delta \gamma}{2} + h_1 h_2 \delta h_1 ,$$

$$- h_2 \delta \frac{h_1 h_2}{2} = h_1 \frac{\gamma \delta \gamma}{2} + \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \delta h_1 ,$$

$$h_2 \delta \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} = (h_2 \cos 2S + h_1 \sin 2S) \frac{\gamma \delta \gamma}{2} + \gamma_1 \gamma_2 (\delta h_1 - h_2 \delta S) ,$$

$$h_2 \delta \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} = (h_2 \sin 2S - h_1 \cos 2S) \frac{\gamma \delta \gamma}{2} - \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{2} (\delta h_1 - h_2 \delta S) ,$$

$$h_2 \delta \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} = \frac{2 \gamma \delta \gamma}{1 - \gamma^2} \left(h_1 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} - h_2 \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} \right) + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \cdot 2 (\delta h_1 - h_2 \delta S) ,$$

$$- h_2 \delta \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} = \frac{2 \gamma \delta \gamma}{1 - \gamma^2} \left(h_1 \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} + h_2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \right) + \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} \cdot 2 (\delta h_1 - h_2 \delta S) .$$

$$h_2 \left(P_1 \delta \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4} + P_2 \delta \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \right)$$

$$= \frac{2 \gamma \delta \gamma}{1 - \gamma^2} (h_1 P_1 - h_2 P_2) + 2 P_1 (\delta h_1 - h_2 \delta S) .$$

Danach wird mit

$$Q' = \int \frac{Q \varrho^3 d\varrho}{W^3} , \quad Q'' = \int \frac{Q \varrho d\varrho}{W^3}$$

$$\delta P = \frac{Q \varrho \delta \varrho}{W} - \frac{Q_0 \varrho_0 \delta \varrho_0}{W_0} - Q' \delta H + Q'' N \delta N - 2 \int P_1 d[\delta S]$$

$$- 2 P_1 \frac{N \delta \varrho}{\varrho W} - \frac{2 \gamma \delta \gamma}{1 - \gamma^2} \Pi + \frac{2 \gamma \delta \gamma}{1 - \gamma^2} \frac{h_1}{h_2} P_1 + 2 P_1 \frac{\delta h_1}{h_2} .$$

Drücken wir $\delta\gamma$ durch δN und $\delta(N\gamma)$, $\delta h_1 = \delta\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right)$ durch $\delta\zeta$ und $\delta\varrho$ aus und ordnen, so folgt

$$\begin{aligned}\delta P = &-\frac{Q_0\varrho_0\delta\varrho_0}{W_0}\\ &+\delta\varrho\left(\frac{Q\varrho}{W}-2P_1\frac{N}{\varrho W}-2P_1\frac{h_1}{\varrho h_2}\right)\\ &+\frac{2P_1\delta\zeta}{h_2\varrho}\\ &+\frac{2\gamma\delta(\gamma N)}{N(1-\gamma^2)}\left(\frac{h_1}{h_2}P_1-\Pi\right)\\ &+\delta H\left(-Q'+2N\int\frac{P_1\varrho\,d\varrho}{W^3}\right)\\ &+\delta N\left[NQ''-2\int\frac{P_1\varrho d\varrho}{W^3}(f^2+2H)-\frac{2\gamma^2}{N(1-\gamma^2)}\left(\frac{h_1}{h_2}P_1-\Pi\right)\right].\end{aligned}$$

Endlich wird

$$\delta P-\psi_0\delta p=[\zeta]\delta\zeta+[N\gamma]\delta(N\gamma)+[\varrho]\delta\varrho+[H]\delta H+[N]\delta N$$

$$[\zeta]=\frac{2P_1}{h_2\varrho},$$

$$[N\gamma]=\frac{2\gamma}{N(1-\gamma^2)}\left(\frac{h_1}{h_2}P_1-\Pi\right),$$

$$[\varrho]=\frac{f\varphi(\psi-\psi_0)\varrho}{W}-2P_1\frac{w}{h_2W},$$

$$[H]=-\int\frac{f\varphi(\psi-\psi_0)}{W^3}\varrho^2d\varrho+2N\int\frac{P_1\varrho\,d\varrho}{W^3},$$

$$[N]=N\int\frac{f\varphi(\psi-\psi_0)}{W^3}\varrho\,d\varrho-2\int\frac{P_1\varrho\,d\varrho}{W^3}(f^2+2H)-\gamma[N\gamma].$$

Da nun

$$\delta(N\gamma)=\xi\delta v+v\delta\xi-\eta\delta u-u\delta\eta,$$

$$\varrho\delta\varrho=S\xi\delta\xi,$$

$$\delta H=Su\delta u-f\varphi S\xi\delta\xi,$$

$$N\delta N=\varrho^2Su\delta u+(f^2+2H)S\xi\delta\xi-WS(u\delta\xi+\xi\delta u),$$

so lassen sich die Endausdrücke der Störungen unmittelbar hinschreiben:

$$a^{-2}\xi' = [N\gamma]\eta - [H]u + \frac{1}{N}[N](W\xi - u\varrho^2)$$

$$a^{-2}\eta' = -[N\gamma]\xi - [H]v + \frac{1}{N}[N](W\eta - v\varrho^2)$$

$$a^{-2}\zeta' = - [H]w + \frac{1}{N}[N](W\zeta - w\varrho^2)$$

$$a^{-2}u' = [N\gamma]v + [\varrho]\frac{\xi}{\varrho} - [H]f\varphi\xi + \frac{1}{N}[N](\xi(f^2+2H) - Wu)$$

$$a^{-2}v' = -[N\gamma]u + [\varrho]\frac{\eta}{\varrho} - [H]f\varphi\eta + \frac{1}{N}[N](\eta(f^2+2H) - Wv)$$

$$a^{-2}w' = [\zeta] + [\varrho]\frac{\zeta}{\varrho} - [H]f\varphi\zeta + \frac{1}{N}[N](\zeta(f^2+2H) - Ww).$$

Hierin ist nun noch, des particulären Integrales wegen, $H = 0$ zu setzen; das zweite particuläre Integral (der Störungen erster Ordnung)

$$Suu' = f\varphi(S\xi\xi' + a^2(\psi - \psi_0))$$

ist, wie man sich sofort überzeugt, identisch erfüllt.

3.

Es sind nunmehr die Ausdrücke für die Refraction in Azimuth und Zenithdistanz abzuleiten.

Wir legen die ZX-Ebene in den Meridian des Beobachtungsortes, sodass $\eta_0 = 0$. Die geocentrische Breite heisse β, die geographische also

$$\beta' = \beta + \alpha \sin 2\beta + \cdots$$

Die folgende Zusammenstellung giebt in der ersten Columne die in Betracht kommenden Richtungen, in der zweiten die Bezeichnung der Punkte, in welchen sie die Himmelskugel schneiden, in den drei letzten die Richtungscosinus gegen die Coordinatenachsen.

Radiusvector für $t = t_0$	R_0	$\frac{\xi_0}{\varrho_0} = \cos\beta$	$\frac{\eta_0}{\varrho_0} = 0$	$\frac{\zeta_0}{\varrho_0} = \sin\beta$
Lichtstrahl für $t = t_0$	L_0	$\frac{u_0}{f_0}$	$\frac{v_0}{f_0}$	$\frac{w_0}{f_0}$
Zenith des Beobachtungsortes	Z	$\cos\beta - \alpha \sin 2\beta \sin\beta$	0	$\sin\beta + \alpha \sin 2\beta \cos\beta$
Normale zur Strahlebene	N	α	β	γ
Ungestörter Radiusvector für $t = t$	R	$\frac{\xi}{\varrho}$	$\frac{\eta}{\varrho}$	$\frac{\zeta}{\varrho}$
Wirklicher Radiusvector für $t = t'$	R'	$\frac{\xi}{\varrho} + \alpha\left(\frac{\xi'}{\varrho} - \frac{\xi}{\varrho}\frac{\varrho'}{\varrho}\right)$	$\frac{\eta}{\varrho} + \alpha\left(\frac{\eta'}{\varrho} - \frac{\eta}{\varrho}\frac{\varrho'}{\varrho}\right)$	$\frac{\zeta}{\varrho} + \alpha\left(\frac{\zeta'}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\varrho'}{\varrho}\right)$
Ungestörter Lichtstrahl für $t = t$	L	$\frac{u}{f}$	$\frac{v}{f}$	$\frac{w}{f}$
Wirklicher Lichtstrahl für $t = t$	L'	$\frac{u}{f} + \alpha\left(\frac{u'}{f} - \frac{u}{f}\frac{f'}{f}\right)$	$\frac{v}{f} + \alpha\left(\frac{v'}{f} - \frac{v}{f}\frac{f'}{f}\right)$	$\frac{w}{f} + \alpha\left(\frac{w'}{f} - \frac{w}{f}\frac{f'}{f}\right)$

Zur Abkürzung ist hier $S\xi\xi' = \varrho\varrho'$, $Suu' = ff'$ gesetzt.

Ferner sei

$$R_0L_0 = \Theta_0\,, \qquad RL = \Theta\,, \qquad L_0L = R\,, \qquad R_0R = S\,,$$

also

$$\Theta_0 + R = \Theta + S\,.$$

Dann wird

$$\cos\Theta = S\frac{\xi}{\varrho}\frac{u}{f} = S\frac{f_1(Nf_2 + Wf_1)}{f\varrho} = \frac{W}{f\varrho}\,,$$

$$(22)\qquad \begin{cases} W = f\varrho\cos\Theta\,, & W_0 = f_0\varrho_0\cos\Theta_0\,, \\ N = f\varrho\sin\Theta\,, & N = f_0\varrho_0\sin\Theta_0\,. \end{cases}$$

$$(23)\qquad R = -\int\frac{N\varphi\varrho\,d\varrho}{fW} = -\int\frac{N\,d\log f}{W}\,.$$

R ist die ungestörte Refraction.

Setzen wir weiter

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_0}{f_0} = \cos\Theta_0\cos\beta + \sin\Theta_0\cos A\sin\beta\,, \\ \dfrac{v_0}{f_0} = \sin\Theta_0\sin A\,, \\ \dfrac{w_0}{f_0} = \cos\Theta_0\sin\beta - \sin\Theta_0\cos A\cos\beta\,; \end{cases}$$

und ebenso

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{u}{f} = \cos(\Theta_0+R)\cos\beta + \sin(\Theta_0+R)\cos A\sin\beta\,, \\ \dfrac{v}{f} = \sin(\Theta_0+R)\sin A\,, \\ \dfrac{w}{f} = \cos(\Theta_0+R)\sin\beta - \sin(\Theta_0+R)\cos A\cos\beta\,, \end{cases}$$

so bedeutet A den Winkel bei R_0 zwischen Meridian und Strahlebene, gezählt von Süden über Osten nach Norden. Aus dem Täfelchen der Richtungscosinus folgen dann für die Zenithdistanzen des Anfangs- und Endstrahles

$$\cos ZL_0 = \cos\Theta_0 - \alpha\sin 2\beta\sin\Theta_0\cos A\,,$$

$$\cos ZL' = \cos(\Theta_0+R) - \alpha\sin 2\beta\sin(\Theta_0+R)\cos A + \alpha S\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{u'}{f} - \alpha\frac{f'}{f}S\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{u}{f}\,,$$

$$ZL_0 = \Theta_0 + \alpha\sin 2\beta\cos A\,,$$

$$ZL' = \Theta_0 + R + \alpha\sin 2\beta\cos A - \alpha\operatorname{cosec}(\Theta_0+R)S\frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{u'}{f} + \alpha\operatorname{cotg}(\Theta_0+R)S\frac{u}{f}\frac{u'}{f}\,,$$

also die Refraction in Zenithdistanz

$$ZL' - ZL = R + \alpha R'\,,$$

$$R' = \operatorname{cotg}(\Theta_0+R)S\frac{uu'}{f^2} - \operatorname{cosec}(\Theta_0+R)S\frac{\xi_0 u'}{\varrho_0 f}\,.$$

Da nun

$$\frac{\xi_0}{\varrho_0} = f_1 \cos S - f_2 \sin S = \frac{1}{N}\left[f\xi \sin(\Theta_0 + R) - u\varrho \sin S\right],$$

so folgt nach einigen Umformungen

$$R' = \frac{W}{N} S \frac{uu'}{f^2} - S \frac{\xi u'}{N} .$$

Nun wird

$$\alpha^{-2} S u u' = w[\zeta] + \frac{[\varrho]}{\varrho} \dot{W} - [H] f\varphi W ,$$

$$\alpha^{-2} S \xi u' = \zeta[\zeta] + [N\gamma]\gamma N + [\varrho]\varrho - [H] f\varphi \varrho^2 + [N] N ,$$

also

$$\alpha^{-2} N R' = [\zeta]\left(\frac{wW}{f^2} - \zeta\right) - N([N] + \gamma[N\gamma] + \frac{N^2}{f^2}\left(f\varphi[H] - \frac{[\varrho]}{\varrho}\right).$$

Der Ausdruck $R + \alpha R'$ giebt die gestörte Refraction (in Zenithdistanz) für beliebiges ϱ; indessen ist R' noch nicht unmittelbar die Grösse, die wir brauchen. Um nämlich die eigentliche Refraction zu haben, müssen wir für ϱ (das zugleich die obere Grenze aller Integrationen ist) denjenigen Werth wählen, von dem an die lichtbrechende Kraft der Atmosphäre zu vernachlässigen ist, also die nächste oberhalb ϱ_0 gelegene Wurzel der Gleichung

$$\mu = f(\varrho) + \alpha\varphi(\varrho)[\varrho\varrho' + \alpha^2(\psi - \psi_0)] = 1 ,$$

wo rechterhand alles durch ϱ auszudrücken ist. Verstehen wir jetzt insbesondere unter ϱ die nächste oberhalb ϱ_0 gelegene Wurzel der Gleichung

$$f(\varrho) = 1 ,$$

so ist als Wurzel der vorhergehenden Gleichung und demnach als obere Grenze in unseren Formeln der Werth

$$\varrho - \alpha\left[\varrho' + \alpha^2 \frac{\psi - \psi_0}{\varrho}\right]$$

anzusetzen; die vollständige Refraction in Zenithdistanz, erstreckt bis zu diesem Werthe von ϱ, wird also

$$R + \alpha R' - \alpha \frac{dR}{d\varrho}\left(\varrho' + \alpha^2 \frac{\psi - \psi_0}{\varrho}\right) = R + \alpha\delta R ,$$

wo

$$\delta R = R' + \frac{N\varphi}{fW}(S\xi\xi' + a^2[\psi - \psi_0]) .$$

Wegen

$$a^{-2} S\xi\xi' = -W[H]$$

wird

$$a^{-2}\delta R = \frac{[\zeta]}{N}\left(\frac{wW}{f^2} - \zeta\right) - [N] - \gamma[N\gamma] - \frac{N}{f^2}\frac{[\varrho]}{\varrho} + \frac{N\varphi(\psi - \psi_0)}{fW}$$

$$= \frac{2P_4}{W} - [N] - \gamma[N\gamma] ,$$

$$(26)\quad a^{-2}\delta R = \frac{2P_4}{W} - N\int\frac{f\varphi(\psi - \psi_0)\varrho d\varrho}{W^3} + 2\int\frac{P_4\varrho f^2 d\varrho}{W^3} .$$

Die willkürliche Function χ tritt hier nur noch in dem Ausdrucke

$$(27)\qquad a^{-2}\delta R_0 = -N\int\frac{f\varphi(\chi - \chi_0)\varrho d\varrho}{W^3}$$

auf, der (wie man durch die Substitution $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ erkennt) die Refractionsänderung für einen Lichtstrahl der Aequatorebene bedeutet. Da in dieser der Brechungsexponent eine Function der Entfernung allein, nämlich

$$\mu = f(R) , \quad R^2 = r^2 + 2\alpha a^2\chi(r) - 2\alpha a^2\chi(r_0)$$

ist, so kann man die Formel (27) leicht direct aus dem Ausdruck für die Refraction ableiten. Als eigentliche Lösung unserer Aufgabe, den Einfluss der Abplattung auf die Refraction zu untersuchen, haben wir offenbar den von γ_1 und γ_2 abhängigen Theil von δR, also den Ausdruck $\delta R - \delta R_0$ zu betrachten, der nur von der willkürlichen Function f, nicht von χ abhängt. Denn $R + \alpha\delta R_0$ ist die Refraction für das oben angeführte Brechungsgesetz, das wir wieder in der Form

$$\mu = f(r) + \alpha f_1(r)$$

schreiben können; vertauschen wir nun $f + \alpha f_1$ mit f, so behält $\delta R - \delta R_0$ bis auf Glieder von der Ordnung α^2 den vorigen, von f_1 (oder χ) unabhängigen Werth. Als ungestörte Refraction functionirt hier also die Refraction in der Aequatorebene. Aus dem Gesagten folgt, dass wir unbeschadet der Allgemeinheit $\chi = 0$ zu setzen berechtigt sind.

Uebrigens ist leicht zu erkennen, dass δR durch Differen-

tiation eines einfacheren Ausdrucks nach Θ_0 gebildet werden kann. In der That wird

$$\int \frac{f\varphi(\psi-\psi_0)\varrho\, d\varrho}{W} = P - \psi_0 p\,,$$

$$\frac{\partial(P-\psi_0 p)}{\partial N} = \int \frac{Nf\varphi(\psi-\psi_0)\varrho d\varrho}{W^3} + \int 2 dP_4 \int \frac{f^2\varrho\, d\varrho}{W^3}$$

$$= \int \frac{Nf\varphi(\psi-\psi_0)\varrho d\varrho}{W^3} + 2P_4 \int \frac{f^2\varrho d\varrho}{W^3} - 2\int P_4 \frac{f^2\varrho d\varrho}{W^3}\,,$$

$$a^{-2}\delta R = \frac{2P_4}{W} + 2P_4 \int \frac{f^2\varrho\, d\varrho}{W^3} - \frac{\partial(P-\psi_0 p)}{\partial N}$$

oder wegen

$$W dW = f^2\varrho\, d\varrho + \varrho^2 f df\,,$$

$$a^{-2}\delta R = 2P_4\left(\frac{1}{W_0} - \int \frac{\varrho^2 f df}{W^3}\right) - \frac{\partial(P-\psi_0 p)}{\partial N}$$

$$= 2P_4\left(\frac{1}{W_0} + \frac{\partial R}{\partial N}\right) - \frac{\partial(P-\psi_0 p)}{\partial N}\,,$$

wofür wir mit $\chi = 0$

$$a^{-2}\delta R = 2P_4\left(\frac{1}{W_0} + \frac{\partial R}{\partial N}\right) - \frac{\partial(\Pi - \gamma_1^2 p)}{\partial N}$$

schreiben können; an Stelle der Differentiation nach

$$N = f_0 \varrho_0 \sin\Theta_0$$

kann die nach Θ_0 eingeführt werden.

Wir wollen die Refraction in Zenithdistanz noch etwas umformen. Bei der bisherigen Zerlegung $R + \alpha\delta R$ bedeutete R die Refraction unter Voraussetzung sphärischer Schichtung, gerechnet mit dem Argumente Θ_0, dem Winkel zwischen beobachtetem Lichtstrahl und dem Radiusvector des Beobachtungsortes. Führen wir an dessen Stelle jetzt die *Zenithdistanz*

$$\vartheta_0 = \Theta_0 + \alpha \sin 2\beta \cos A$$

ein und setzen fest, R sei die mit dem Argumente ϑ_0 gerechnete Refraction, so wird die vollständige Refraction in Zenithdistanz $= R + \alpha\delta R$, wo nunmehr aber

$$28) \qquad \delta R = -\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}\sin 2\beta \cos A$$

$$+ 2a^2 P_4\left(\frac{1}{W_0} + \frac{\partial R}{\partial N}\right) - a^2\frac{\partial(\Pi - \gamma_1^2 p)}{\partial N}\,.$$

In den mit α multiplicirten Gliedern ist dementsprechend überall ϑ_0 statt Θ_0 zu setzen.

Um die Refraction in Azimuth, oder den Winkel

$$\alpha\delta A = L_0 \hat{Z} L'$$

abzuleiten, fällen wir von L' ein Loth $L'L''$ auf den grössten Kreis der Strahlebene $R_0 L_0 R L L''$. Bezeichnen wir für den Moment die Abplattung mit α_0, so wird

$$L'L'' = \cos NL' = \alpha_0 \cdot S\frac{\alpha u'}{f},$$

$$L'\hat{L}_0 L'' = \frac{L'L''}{\sin L_0 L'} = \frac{\alpha_0 S\alpha u'}{f \sin R},$$

$$Z\hat{L}_0 R_0 = ZR_0 \frac{\sin Z\hat{R}_0 L_0}{\sin ZL_0} = \alpha_0 \sin 2\beta \cdot \frac{\sin A}{\sin \vartheta_0},$$

$$\pi - Z\hat{L}_0 L' = \alpha_0 \left(\frac{S\alpha u'}{f \sin R} + \frac{\sin A \sin 2\beta}{\sin \vartheta_0} \right).$$

$$\alpha_0 \delta A = \sin (\pi - Z\hat{L}_0 L') \cdot \frac{\sin L_0 L'}{\sin ZL'}$$

$$= \alpha_0 \left(\frac{S\alpha u'}{f \sin R} + \frac{\sin A \sin 2\beta}{\sin \vartheta_0} \right) \frac{\sin R}{\sin (\vartheta_0 + R)}.$$

Nun wird

$$a^{-2} S\frac{\alpha u'}{f} = \gamma \frac{[\zeta]}{f} + [N\gamma] \frac{\alpha v - \beta u}{f}$$

$$= \frac{2\gamma}{N(1-\gamma^2)} \left(P_4 \frac{w}{f} + \Pi \frac{\beta u - \alpha v}{f} \right).$$

Aus (24) und 25), denen wir der Uebersicht wegen das Täfelchen der Richtungscosinus

$$\alpha_1 = \cos\beta \quad , \quad \beta_1 = 0 \quad , \quad \gamma_1 = \sin\beta \quad ,$$
$$\alpha_2 = \cos A \sin\beta \quad , \quad \beta_2 = \sin A \, , \quad \gamma_2 = -\cos A \cos\beta \, ,$$
$$\alpha = -\sin A \sin\beta \, , \quad \beta = \cos A \, , \quad \gamma = \sin A \cos\beta$$

hinzufügen, folgt

$$\frac{w}{f} = \gamma_1 \cos(\Theta_0 + R) + \gamma_2 \sin(\Theta_0 + R),$$

$$\frac{\beta u - \alpha v}{f} = -\gamma_2 \cos(\Theta_0 + R) + \gamma_1 \sin(\Theta_0 + R),$$

also

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{2N}{\gamma a^2}\dfrac{S\alpha u'}{f} = \sin(\vartheta_0+R)(\gamma_1 P_0+\gamma_1 P_1+\gamma_2 P_2) \\ \qquad\qquad - \cos(\vartheta_0+R)(\gamma_2 P_0-\gamma_2 P_1+\gamma_1 P_2), \\ \sin\vartheta_0 \sin(\vartheta_0+R)\dfrac{\delta A}{\gamma} = \sin\vartheta_0 \dfrac{S\alpha u'}{f\gamma} + 2\gamma_1 \sin R . \end{cases}$$

In dem Ausdrucke für die Refraction in Azimuth tritt also die willkürliche Function χ nicht einmal formell auf; man könnte die Vermuthung wagen, dass, wenn wir allgemein bis zu den Gliedern p^{ter} Ordnung gehen und das Brechungsgesetz in der Form

$$\mu = f + \alpha f_1 + \frac{\alpha^2}{2} f_2 + \cdots + \frac{\alpha^p}{\Pi(p)} f_p$$

ansetzen, die Refraction in Zenithdistanz von $f, f_1, \cdots f_p$, die in Azimuth hingegen nur von $f, f_1, \cdots f_{p-1}$ abhängen würde.

Die Formeln (28) und (29) stellen die Lösung unserer Aufgabe dar. In unmittelbarer Nähe des Zeniths ist ihre Anwendbarkeit fraglich, da bei allen bisherigen Entwicklungen Θ_0 gegen α als Grösse nullter Ordnung betrachtet wurde, eine Grössenschätzung, die für sehr kleines oder gar verschwindendes Θ_0 ihren Sinn verliert. Die Zerlegung der Refraction nach Azimuth und Zenithdistanz verbietet sich dann schon wegen der Unsicherheit des ersteren; zur Vermeidung von Unbestimmtheiten sind an Stelle der Polarcoordinaten A und Θ_0 rechtwinklige Coordinaten, etwa die Abstände vom Meridian und dem dazu senkrecht durch R_0 gelegten grössten Kreise (Ostwest-Vertical, nur durch R_0 statt durch Z gehend) einzuführen. Bezeichnen wir diese mit p und q und vernachlässigen ihre Quadrate und Producte, so wird für einen beliebigen Punkt mit den Richtungscosinus λ, μ, ν

$$p = \mu ,$$
$$q = \lambda \sin\beta - \nu \cos\beta ,$$

also z. B. für L_0

$$p = \frac{v_0}{f_0} = \sin\Theta_0 \sin A ,$$

$$q = \frac{u_0}{f_0}\sin\beta - \frac{w_0}{f_0}\cos\beta = \sin\Theta_0 \cos A .$$

Die Refraction zerlegt sich dementsprechend in zwei Componenten senkrecht und parallel zum Meridian

$$\delta p = \frac{v}{f} - \frac{v_0}{f_0} + \alpha\left(\frac{v'}{f} - \frac{vf'}{f^2}\right),$$

$$\delta q = \sin\beta\left[\frac{u}{f} - \frac{u_0}{f_0} + \alpha\left(\frac{u'}{f} - \frac{uf'}{f^2}\right)\right] - \cos\beta\left[\frac{w}{f} - \frac{w_0}{f_0} + \alpha\left(\frac{w'}{f} - \frac{wf'}{f^2}\right)\right].$$

Hier ist jedoch wieder darauf Rücksicht zu nehmen, dass nicht ϱ [die nächste oberhalb ϱ_0 gelegene Wurzel der Gleichung $f(\varrho) = 0$], sondern

$$\varrho - \alpha\left[\varrho' + a^2\frac{\psi - \psi_0}{\varrho}\right]$$

die Grenze der Atmosphäre ist; damit tritt z. B. zu δp das Glied

$$-\alpha\frac{d\frac{v}{f}}{d\varrho}\left(\varrho' + a^2\frac{\psi-\psi_0}{\varrho}\right) = -\frac{\alpha\varphi}{f^2 W}(f^2\eta - vW)[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)]$$

hinzu, und die vollständige Refraction in Meridiandistanz wird

$$V = \frac{v}{f} - \frac{v_0}{f_0} + \alpha\left(\frac{v'}{f} - \frac{\varphi\eta}{W}[\varrho\varrho' + a^2(\psi - \psi_0)]\right),$$

die parallel zum Meridian

$$U\sin\beta - W\cos\beta,$$

wo die Bedeutung von U und W ersichtlich ist. Bei der weiteren Behandlung dieser Ausdrücke würde Θ_0 als kleine Grösse von derselben Ordnung wie α anzusehen sein. Wir gehen hierauf nicht näher ein, da die Refractionsstörung, wie die Discussion der Formeln (28) und (29) zeigen wird, in der Nähe des Zeniths jedenfalls zu klein ist, um sich durch die Beobachtungen zu verrathen.

4.

Es ist nun die analytische Entwicklung der auftretenden Integrale vorzunehmen, die wegen gewisser zulässiger Vereinfachungen sogar zur Rechnung der mechanischen Quadratur vorzuziehen sein würde; überdies handelt es sich auch darum, einen Ueberblick über die Form zu gewinnen.

Für f schreiben wir jetzt wieder μ, also

$$\varphi\varrho d\varrho = d\mu\ ;$$

als Integrationsvariable wählen wir die Grösse

$$\nu = f\varrho\ ,$$

die Integrationsgrenzen sind ν_0 und

$$\nu = \nu_0 \sec\varphi\ ,$$

ferner sei

$$u = 1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} = \sin\varphi^2\ .$$

Weiter ist

$$\nu\sin\vartheta = \nu_0\sin\vartheta_0 = N\ ,$$
$$\nu\cos\vartheta = W\ ,$$
$$S = \vartheta_0 + R - \vartheta\ ,\quad R = -\int\frac{N d\log\mu}{\nu\cos\vartheta}\ .$$

Die Kleinheit der Grössen R und

$$m = \log\mu_0 - \log\mu\ ,$$

die im Maximum resp. $= 35'$ und $= 0.0003$ werden, können wir benutzen, um rasch convergente Reihen nach Potenzen dieser Grössen zu erhalten[1]). Ersetzen wir noch den Aequatorhalbmesser a durch den davon nur um Glieder von der Ordnung α verschiedenen Radius ϱ_0 des Beobachtungsortes, so haben wir z. B. anzusetzen

$$P_0 = \int\frac{\mu d\mu}{\nu\cos\vartheta}\left(1 + \frac{\varrho^5}{\varrho_0^5}\right),$$

$$P_1 + iP_2 = \int\frac{\mu d\mu}{\nu\cos\vartheta}\left(1 + \frac{\varrho^5}{\varrho_0^5}\right)e^{2iS}\ .$$

Entwickeln wir e^{2iR} nach Potenzen von R und $\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^\delta = e^{\delta m}$ nach Potenzen von m, so tritt als allgemeines Glied das Integral

$$\int\frac{d\log\mu}{\nu\cos\vartheta}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\delta R^\varepsilon m^\zeta e^{2i\vartheta}\ ,$$

1) D. h. unter dem Integralzeichen darf eine Function von μ nach Potenzen von m, eine Function von R nach Potenzen von R entwickelt werden. Dagegen hört die Convergenz sofort auf, wenn etwa *alles*, z. B. auch eine Potenz von ν, nach Potenzen von m entwickelt wird, weil die Differentialquotienten von ν nach m mit wachsender Ordnung auch der Grösse nach ausserordentlich wachsen.

resp. ohne den Factor $e^{2i\vartheta}$ unter dem Integralzeichen, auf; ε und ζ ganze Zahlen $\geqq 0$. Für δ haben wir zunächst die beiden Werthe 0 und 5. Da weiter

$$\cos 2\vartheta = 1 - 2\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\sin\vartheta_0^2 ,$$

$$\sin 2\vartheta = 2\cos\vartheta\frac{\nu_0}{\nu}\sin\vartheta_0 ,$$

so ergeben sich die beiden Typen

$$\int dR\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\delta R^\varepsilon m^\zeta , \quad \delta = -2, 0, 3, 5 .$$

$$\int dm\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\delta R^\varepsilon m^\zeta , \quad \delta = -2, +3 ,$$

aus denen sich die Entwicklung der Integrale P_α zusammensetzt.

Wir legen nun dem Folgenden eine für viele andere typische, früher als Potenzenformel bezeichnete Gestalt des Refractionsausdruckes zu Grunde. Indem wir mit H', H''', $H^V \cdots$ eine endliche Anzahl disponibler Constanten bezeichnen, setzen wir an

$$dm = \frac{1}{2}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2 4^\alpha} H^{2\alpha+1} u^\alpha .$$

Π bedeutet die Gauss'sche Π-Function; zur Abkürzung wird für die Binomialcoefficienten das Zeichen

$$(\alpha)_\beta = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\beta)\Pi(\alpha-\beta)}$$

gebraucht werden. Die Summen erstrecken sich, wenn nichts hinzugefügt wird, auf ganze Werthe des Index $\geqq 0$.

Setzen wir

$$m_\delta = \int\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\delta dm ,$$

$$R_\delta = \int\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\delta dR ,$$

so folgt

$$(1-u)^{-\frac{\delta}{2}}\sum_{\alpha}(-1)^{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2 4^{\alpha}}H^{2\alpha+1}u^{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha\beta}\left(-\frac{\delta}{2}\right)_{\beta-\alpha}(-1)^{\beta}\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2 4^{\alpha}}H^{2\alpha+1}u^{\beta}$$

$$=\sum_{\beta}(-1)^{\beta}\frac{\Pi(2\beta+1)}{\Pi(\beta)^2 4\beta}H_{\delta}^{2\beta+1}u^{\beta},$$

$$(30)\qquad H_{\delta}^{2\beta+1}=\sum_{\alpha}\frac{\Pi(\beta)}{\Pi(\alpha)}\frac{\Pi(\alpha+\frac{1}{2})}{\Pi(\beta+\frac{1}{2})}\left(-\frac{\delta}{2}\right)_{\beta-\alpha}H^{2\alpha+1};$$

die $H_{\delta}^{2\beta+1}$ sind, wie die $H^{2\beta+1}$, Constanten. Für die ersten Indices erhält man

$$H'_{\delta}=H',$$

$$H'''_{\delta}=H'''-\frac{\delta}{3}H',$$

$$H^{V}_{\delta}=H^{V}-\frac{2}{5}\delta H'''+\frac{\delta}{3}\frac{\delta+2}{5}H'$$

u. s. w. Daraus folgt

$$(31)\begin{cases} dR_{\delta}=\frac{1}{2}(u+\operatorname{cotg}\vartheta_0^2)^{-\frac{1}{2}}du\sum_{\alpha}(-1)^{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2 4^{\alpha}}H_{\delta}^{2\alpha+1}u^{\alpha}, \\ dm_{\delta}=\frac{1}{2}du\sum_{\alpha}(-1)^{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2 4^{\alpha}}H_{\delta+1}^{2\alpha+1}u^{\alpha} \end{cases}$$

und durch Integration

$$(32)\begin{cases} R_{\delta}=\sum_{\alpha\beta}(\operatorname{cotg}\vartheta_0^2+u)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)_{\alpha}u^{\alpha}\operatorname{cotg}\vartheta_0^{2\beta}H_{\delta}^{2\alpha+2\beta+1} \\ \qquad -\sum_{\beta}\operatorname{cotg}\vartheta_0^{2\beta+1}H_{\delta}^{2\beta+1}, \\ m_{\delta}=\sum_{\alpha}(-1)^{\alpha}\frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)\Pi(\alpha+1)}2H_{\delta+1}^{2\alpha+1}\left(\frac{u}{4}\right)^{\alpha+1}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke

$$\int R^{\varepsilon}m^{\zeta}dR_{\delta},\qquad \int R^{\varepsilon}m^{\zeta}dm_{\delta}$$

sind daher ganze homogene Functionen $(\varepsilon+\zeta+1)^{\text{ten}}$ Grades in den $H^{2\alpha+1}$, mit Coefficienten, die Functionen von u und ϑ_0 werden. — Die Integrale Π und P_1, und damit auch δR und δA, lassen sich also als ganze Functionen der $H^{2\alpha+1}$, mit Coefficienten, die von φ und ϑ_0 abhängen, entwickeln. Zum Schluss setzen wir

$$H^{2\alpha+1}\sin\varphi^{2\alpha+1} = \tfrac{1}{4}^{\alpha} b_{2\alpha+1}\,, \tag{33}$$

$$\Pi(2\alpha+1)b_{2\alpha+1} = \sum_{\beta}(2\beta+1)\,a_{2\beta+1}\,\frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)}\,; \tag{34}$$

die $a_{2\beta+1}$, deren Anzahl gleich der der $H^{2\alpha+1}$, sind dann die Coefficienten der Entwicklung

$$\begin{cases} R = \sum_{\beta} a_{2\beta+1}\,\tau^{2\beta+1} = a_1\tau + a_3\tau^3 + a_5\tau^5 + \cdots, \\ \tau = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\,, \qquad \operatorname{tg}\psi = \sin\varphi\,\operatorname{tg}\vartheta_0\,. \end{cases} \tag{35}$$

Unsere Entwicklungen führen also auf die zur Rechnung geeignete Form

$$\sum_{\alpha} A_\alpha f_\alpha(\varphi, \vartheta_0)\,,$$

wo die A_α ganze homogene Functionen α^{ten} Grades der $a_{2\beta+1}$, f_α Functionen von φ und ϑ_0 bedeuten. Die numerischen Werthe der $a_{2\beta+1}$ und des Winkels φ werden durch Anschluss der Refractionsformel (35) an die Beobachtungen bestimmt; als unabhängige Variable functioniren also schliesslich nur noch ϑ_0 und das in γ_1 und γ_2 enthaltene Azimuth A.

Bei der wirklichen Ausführung der Rechnungen kann und muss man sich auf die Hauptglieder beschränken; das Vernachlässigte würde zu den Störungen zweiter Ordnung hinzukommen. Da m unter $\frac{1}{10}\alpha$, R unter 3α bleibt, so würde für rohe Rechnung das Glied erster Ordnung $A_1 f_1$ (wir nennen Glieder n^{ter} Ordnung diejenigen, die von der n^{ten} Dimension in Bezug auf die $a_{2\beta+1}$ sind) genügen. Es wäre indessen möglich (und ist in der That der Fall), dass in $A_1 f_1$ die numerisch beträchtlichsten Glieder einander zerstören, sodass der übrig bleibende Term das Glied zweiter Ordnung $A_2 f_2$ nicht erheblich überwiegt. Um sicher zu gehen, wollen wir also die Glieder erster

und zweiter Ordnung zusammennehmen; unter dem Integralzeichen ist dann noch die erste Potenz von R und m zu berücksichtigen. Als Typen treten auf

$$R_\delta\,,\quad \int R\,dR_\delta\,,\quad \int m\,dR_\delta\,,$$
$$m_\delta\,,\quad \int R\,dm_\delta\,,\quad \int m\,dm_\delta\,,$$

wofür wir zur Abkürzung schreiben wollen

$$R'_\delta = \int R\,dR_\delta\,,\quad R''_\delta = \int m\,dR_\delta\,,$$
$$m'_\delta = \int R\,dm_\delta\,,\quad m''_\delta = \int m\,dm_\delta\,.$$

Die accentuirten Grössen geben also die Glieder zweiter Ordnung. Der Index $\delta = 0$ mag weggelassen werden.

Es folgt

$$\begin{aligned} -NP_0\mu_0^{-2} &= \int \frac{\mu^2}{\mu_0^2}\,dR\left(1+\frac{\nu^5}{\nu_0^5}\cdot\frac{\mu_0^5}{\mu^5}\right)\\ &= R + R_5 - 2R'' + 3R''_5\,,\\ -Np\mu_0^{-2} &= R - 2R''\,. \end{aligned}$$

Für P_1 und P_2 setzen wir an

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos 2\vartheta_0\,P_5 + \sin 2\vartheta_0\,P_6\,,\\ P_2 &= \sin 2\vartheta_0\,P_5 - \cos 2\vartheta_0\,P_6\,, \end{aligned}$$

$$P_5 = \int dP_0\cos(2\vartheta - 2R)\,,\quad P_6 = \int dP_0\sin(2\vartheta - 2R)\,.$$

$$\begin{aligned} -NP_5\mu_0^{-2} &= \int dR\left(e^{-2m}+\frac{\nu^5}{\nu_0^5}e^{3m}\right)\left(1-2\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\sin\vartheta_0^2+4R\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\sin\vartheta_0^2\frac{dm}{dR}\right)\\ &= R + R_5 - 2\sin\vartheta_0^2(R_{-2}+R_3) + 4\sin\vartheta_0^2(m'_{-2}+m'_3)\\ &\quad + 3R''_5 - 2R'' - 2\sin\vartheta_0^2(3R''_3 - 2R''_{-2})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -NP_6\mu_0^{-2} &= \int dR\left(e^{-2m}+\frac{\nu^5}{\nu_0^5}e^{3m}\right)\left(2\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\sin\vartheta_0^2\frac{dm}{dR} - 2R + 4R\frac{\nu_0^2}{\nu^2}\sin\vartheta_0^2\right)\\ &= 2\sin\vartheta_0^2(m_{-2}+m_3) - 2(R'+R'_5)\\ &\quad + 4\sin\vartheta_0^2(R'_{-2}+R'_3) + 2\sin\vartheta_0^2(3m''_3 - 2m''_{-2})\,. \end{aligned}$$

Zur Erleichterung wollen wir die Formeln (28) und (29), worin links der Factor a^{-2} durch ϱ_0^{-2} zu ersetzen ist, noch etwas umformen, indem wir setzen

$$-\nu_0 P_\alpha \mu_0^{-2} = S_\alpha\,, \quad -\nu_0 p \mu_0^{-2} = s\,.$$

Trennen wir dann nach den Richtungscosinus, so erhalten wir das *Formelsystem* (36).

$$\begin{aligned}
s \sin\vartheta_0 &= R - 2R''\,,\\
S_0 \sin\vartheta_0 &= R + R_5 - 2R'' + 3R_5''\,.\\
S_1 &= \cos 2\vartheta_0\, S_5 + \sin 2\vartheta_0\, S_6\,,\\
S_2 &= \sin 2\vartheta_0\, S_5 - \cos 2\vartheta_0\, S_6\,,\\
(S_0 - S_5)\operatorname{cosec}\vartheta_0 &= 2(R_{-2} + R_3)\\
&\quad - 4(m'_{-2} + m'_3) + 2(3R_3'' - 2R''_{-2})\,,\\
S_6 \sin\vartheta_0 &= 2\sin\vartheta_0^2 (m_{-2} + m_3) - 2(R' + R'_5)\\
&\quad + 4\sin\vartheta_0^2 (R'_{-2} + R'_3) + 2\sin\vartheta_0^2 (3m_3'' - 2m''_{-2})\,.
\end{aligned}$$

$$\delta R = \frac{\gamma_1^2}{4} R_{11} + \frac{\gamma_2^2}{4} R_{22} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{2} R_{12}\,,$$

$$R_{11} = \frac{d(S_0 + S_1 - 4s)}{d\sin\vartheta_0} + 2S_2 \frac{d(R + \vartheta_0)}{d\sin\vartheta_0}\,,$$

$$R_{22} = \frac{d(S_0 - S_1)}{d\sin\vartheta_0} - 2S_2 \frac{d(R + \vartheta_0)}{d\sin\vartheta_0}\,,$$

$$R_{12} = \frac{dS_2}{d\sin\vartheta_0} - 2S_1 \frac{d(R + \vartheta_0)}{d\sin\vartheta_0} + 4\frac{dR}{d\vartheta_0}\,,$$

$$\delta A = \gamma\gamma_1 A_1 + \gamma\gamma_2 A_2\,,$$

$$\begin{aligned}
\sin\vartheta_0 \sin(\vartheta_0 + R) A_1 &= 2\sin R - \tfrac{1}{2}\sin(\vartheta_0 + R)(S_0 + S_1)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_0 + R) S_2\,,\\
\sin\vartheta_0 \sin(\vartheta_0 + R) A_2 &= -\tfrac{1}{2}\sin(\vartheta_0 + R) S_2\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\cos(\vartheta_0 + R)(S_0 - S_1)\,.
\end{aligned}$$

Oder auch

$$\begin{aligned}
R_{11} d\sin\vartheta_0 &= dS_0 - 4ds + \cos 2\vartheta_0 (dS_5 - 2S_6 dR)\\
&\quad + \sin 2\vartheta_0 (dS_6 + 2S_5 dR)\,,\\
(R_{11} + R_{22}) d\sin\vartheta_0 &= 2dS_0 - 4ds\,,\\
R_{12} d\sin\vartheta_0 &= 4\cos\vartheta_0 dR + \sin 2\vartheta_0 (dS_5 - 2S_6 dR)\\
&\quad - \cos 2\vartheta_0 (dS_6 + 2S_5 dR)\,.
\end{aligned}$$

$$A_1 \sin\vartheta_0 = 2R(1 - R\cot\vartheta_0)\operatorname{cosec}\vartheta_0 - \tfrac{1}{2}(S_0 + S_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}S_2(\cot\vartheta_0 - R\operatorname{cosec}\vartheta_0^2),$$
$$A_2 \sin\vartheta_0 = -\tfrac{1}{2}S_2 + \tfrac{1}{2}(S_0 - S_1)(\cot\vartheta_0 - R\operatorname{cosec}\vartheta_0^2).$$

Allgemeingültige, d. h. bis in die Nähe des Horizontes $\left(\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ brauchbare Ausdrücke für R_δ, R'_δ, R''_δ und m'_δ (m_δ und m''_δ sind Constanten) würde man durch Einführung der Variablen τ erhalten. Wir gehen, wegen der Complicirtheit der Rechnungen, hierauf nicht näher ein, sondern werden zu diesem Zwecke eine einfachere, dafür auch minder allgemeine Refractionsformel zu Grunde legen. Um wenigstens einen Begriff zu geben, wie sich die Rechnung im Falle der Potenzenformel gestalten würde, wollen wir 1) für mässige Zenithdistanzen (etwa bis $\vartheta_0 = 80^\circ$) die Entwicklung nach Potenzen von $\operatorname{tg}\vartheta_0$ ansetzen, 2) die Refractionsstörung im Horizont bilden.

Aus

$$R = \int \frac{\nu_0 \sin\vartheta_0 \, dm}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2 \sin\vartheta_0^2}}$$

folgt durch Entwicklung der Quadratwurzel

$$R_\delta = \sum_\alpha (-\tfrac{1}{2})_\alpha (-1)^\alpha \sin\vartheta_0^{2\alpha+1} m_{\delta-2\alpha-1},$$

also mit $(\varepsilon, \delta) = \int m_\varepsilon dm_\delta$:

$$m'_\delta = \sum_\alpha (-\tfrac{1}{2})_\alpha (-1)^\alpha \sin\vartheta_0^{2\alpha+1} (-2\alpha - 1, \delta),$$
$$R'_\delta = \sum_{\alpha\beta} (-\tfrac{1}{2})_\alpha (-\tfrac{1}{2})_\beta (-1)^{\alpha+\beta} \sin\vartheta_0^{2\alpha+2\beta+2} (-2\alpha-1, \delta-2\beta-1),$$
$$m''_\delta = (0, \delta),$$
$$R''_\delta = \sum_\alpha (-\tfrac{1}{2})_\alpha (-1)^\alpha \sin\vartheta_0^{2\alpha+1} (0, \delta - 2\alpha - 1).$$

Um sowohl für die Coefficienten m_δ und (ε, δ), als auch für die später auftretenden brauchbare Darstellungen zu erhalten, fügen wir der Formel (32) die analogen

$$(37)\quad \begin{cases} b_{-2\alpha-1} = \sum_{\beta} (2\beta+1) a_{2\beta+1} \dfrac{\Pi(2\alpha)(-1)^{\alpha-\beta}}{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\alpha+\beta+1)}, \\ B_{2\alpha} = \Pi(2\alpha) b_{2\alpha} = \sum_{\beta} (2\beta+1) a_{2\beta+1} \dfrac{\Pi(\beta+\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta-\alpha+\frac{1}{2})} \end{cases}$$

hinzu, die letztere auch für negative Werthe von α gültig (es verschwinden b_{-2}, b_{-4} u. s. w., während $B_{-2\alpha} \neq 0$). Zwischen den neu eingeführten Grössen und den $b_{2\alpha+1}$ bestehen die Relationen

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(\alpha)^2}{\Pi(2\alpha)} (-1)^{\alpha} b_{-2\alpha-1} = \sum_{\gamma} \dfrac{\Pi(2\gamma+1)}{\Pi(\gamma)^2} (-1)^{\gamma} \dfrac{b_{2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}, \\ \dfrac{\Pi(-\alpha-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})} B_{2\alpha} = \sum_{\gamma} \dfrac{\Pi(2\gamma+1)}{\Pi(\gamma)^2} (-1)^{\gamma} \dfrac{b_{2\gamma+1}}{-\alpha+\gamma+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Dies vorausgeschickt, erhält man aus den Formeln (30) bis (33) mit Unterdrückung einiger Zwischenrechnungen

$$(39)\quad m_{\delta} = \sum_{\alpha} \left(-\frac{\delta+1}{2}\right)_{\alpha} \frac{\Pi(\alpha)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})} b_{-2\alpha-1} \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\alpha+1},$$

$$(40)\quad -2\int m_{\varepsilon}\, dm_{\delta}$$

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{\delta+1}{2}\right)_{\beta-\gamma} \left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)_{\gamma} \frac{1}{\alpha+\gamma+1} \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\beta+2} b_{2\alpha+1} b_{-2\alpha-2\beta-3} \frac{\Pi(\alpha+\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha)} \frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})},$$

und damit

$$(34)\quad R_{\delta} = \sum_{\alpha\beta} \left(-\frac{\delta}{2}\right)_{\alpha-\beta} \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})} \frac{\Pi(\beta-\frac{1}{2})}{\Pi(\beta)} \operatorname{tg}\vartheta_0^{2\beta+1} b_{-2\alpha-1} \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\alpha+1},$$

insbesondere

$$R = \sum_{\alpha} \operatorname{tg}\vartheta_0^{2\alpha+1} b_{-2\alpha-1} \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\alpha+1}$$

$$= \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} Z^{\alpha} \operatorname{tg}\vartheta_0^{2\alpha+1},$$

woraus der Zusammenhang der $b_{-2\alpha-1}$ mit den Zenithconstanten Z, Z', Z'' ··· (ein Analogon zu der Relation (33) zwischen den $b_{2\alpha+1}$ und den Horizontalconstanten ungerader Ordnung H', H''', H^{V} ···) hervorgeht; ferner

$$-2m'_\delta=\sum_{\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{\delta+1}{2}\right)_{\beta-\gamma}(-\tfrac{1}{2})_\gamma(-1)^\gamma\operatorname{tg}\vartheta_0^{2\gamma+1}\frac{1}{\alpha+\gamma+1}\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\beta+2}b_{2\alpha+1}b_{-2\alpha-2\beta-3}\frac{\Pi(\alpha+\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha)}\frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})},$$

$$-2R'_\delta=\sum_{\alpha\beta\gamma}\left(-\frac{\delta}{2}\right)_{\beta-\gamma}\operatorname{tg}\vartheta_0^{2\gamma+2}\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\beta+2}b_{2\alpha+1}b_{-2\alpha-2\beta-3}\frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}\frac{\Pi(\alpha+\gamma+\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha+\gamma+1)},$$

$$-2R''=\sum_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\left(-\frac{\delta}{2}\right)_{\beta-\gamma-\varepsilon}(-\tfrac{1}{2})_\gamma\frac{1}{\alpha+\gamma+1}(-\tfrac{1}{2})_\varepsilon(-1)^\varepsilon\operatorname{tg}\vartheta_0^{2\varepsilon+1}\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\beta+2}b_{2\alpha+1}b_{-2\alpha-2\beta-3}\frac{\Pi(\alpha+\tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha)}\frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})}.$$

Damit ist alles beisammen, um die Entwicklungen auszuführen. Uebrigens sind in Bezug auf $\operatorname{tg}\vartheta_0$

ungerade: R_δ, R''_δ, m'_δ, S_6, S_2, R_{11}, R_{22}, A_1,

gerade: R'_δ, s, S_0, S_5, S_1, R_{12}, A_2.

Die ersten Glieder der Reihen sind folgende:

$$\begin{aligned}
R_{11}\operatorname{cotg}\vartheta_0 &= 4m_3-2m_2+4m_{-2}-6m_{-3}+12(0,3)-6(0,2)-8(0,-2)+12(0,-3)\\
&\quad+4(4,-1)-4(3,-1)+4(-1,-1)-4(-2,-1)+4(-1,3)+4(-1,-2),\\
(R_{11}+R_{22})\operatorname{cotg}\vartheta_0 &= 2m_2-2m_{-3}+6(0,2)+4(0,-3),\\
-R_{12} &= 2m_3-4m_{-1}+2m_{-2}+6(0,3)-4(0,-2)+2(4,-1)+2(-1,-1),\\
-A_1\sin\vartheta_0 &= m_3-2m_{-1}+m_{-2}-m_1(m_3-2m_{-1}+m_{-2})+3(0,3)-2(0,-2)\\
&\quad+(4,-1)+(-1,-1),\\
-A_2\cos\vartheta_0 &= m_3-m_2+m_{-2}-m_{-3}+3(0,3)-3(0,2)-2(0,-2)+2(0,-3)\\
&\quad+(4,-1)-2(3,-1)+(-1,-1)-2(-2,-1)+m_{-1}(m_2+m_{-3}),
\end{aligned}$$

wo rechts also statt der constanten Glieder Reihen mit steigenden Potenzen von $\operatorname{tg}\vartheta_0^2$ zu denken sind. Die m_δ und (ε, δ) sind oben nach Potenzen der kleinen Grösse $\sin\varphi$ entwickelt. Nimmt man, um den Betrag der Grössen erster und zweiter Ordnung abzuschätzen, von beiden nur die Hauptglieder, d. h. die von niedrigster Ordnung in Bezug auf $\sin\varphi$, so wird mit

$$(42) \qquad Z^\alpha = (-1)^\alpha b_{-2\alpha-1}\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\alpha+1}$$

$$(43) \qquad \left\{\begin{aligned} R_{11}\operatorname{cotg}\vartheta_0 &= 18Z' + 9Z^2 + \cdots, \\ R_{22}\operatorname{cotg}\vartheta_0 &= -8Z' - 4Z^2 + \cdots, \\ R_{12} \qquad\quad &= -6Z' - 3Z^2 + \cdots, \\ A_1\sin\vartheta_0 \quad &= -3Z' - \tfrac{3}{2}Z^2 + \cdots, \\ A_2\cos\vartheta_0 \quad &= -2Z' - \phantom{\tfrac{3}{2}}Z^2 + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Das Verhältniss zwischen den Gliedern zweiter und erster Ordnung wird also in allen Fällen gleich $\frac{1}{2}Z^2 : Z' = \text{c. } 1 : 8$, also ziemlich beträchtlich; der Grund ist offenbar der, dass das Hauptglied Z aus der Entwicklung herausgefallen ist.

Wie bis auf Glieder höherer Ordnung die erste Zenithconstante Z gleich der brechenden Kraft am Beobachtungsorte ist, so hat auch die hier als Zenithconstante der Refractionsstörungen auftretende Grösse

$$Z' + \tfrac{1}{2}Z^2$$

eine einfache physikalische Bedeutung. Für die Masse M der Atmosphäre nämlich ergiebt sich, wenn der Zusammenhang zwischen μ und der Luftdichtigkeit D in der Form

$$D : \frac{\mu - 1}{\mu} = \text{constans}$$

angesetzt wird, der Ausdruck

$$M = \tfrac{4}{3}\pi r_0^3 D_0\{-1 + \frac{1}{\mu_0 - 1}\int\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 e^{4m}\,dm\},$$

oder wenn $r_0 h$ die Höhe einer fingirten Atmosphäre bezeichnet, die bei überall gleicher Dichtigkeit D_0 *gleiche Masse* mit der wirklichen besitzt:

$$h + h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3(\mu_0 - 1)}\{m_3 - m + 4\int m\,dm_3 - \tfrac{1}{2}m^2 + \cdots\}.$$

Wegen

$$m_3 = Z + 4Z' + 8Z'' + \cdots,$$
$$m \;\; = Z + \;\; Z' + \;\; Z'' + \cdots$$

folgt hieraus angenähert

$$Zh = Z' + \frac{Z^2}{2} + \cdots,$$

und mit den Zahlenwerthen rund $r_0 h = 8.5\,\text{km}$. Numerisch wenig davon verschieden ist die Höhe $r_0 k$ einer Atmosphäre, die bei constanter Dichtigkeit und Schwere *denselben Druck* wie die wirkliche ausüben würde; man findet streng

$$(\mu_0 - 1)k = \mu_0 - 1 - m_{-1} = \mu_0 - 1 - Z$$

und angenähert ebenfalls

$$Zk = Z' + \frac{Z^2}{2} + \cdots .$$

Man hat bisweilen eine der so oder ähnlich definirten Höhen die »ideale Höhe der Atmosphäre« genannt; dieselbe ist also, ausgedrückt in Theilen des Erdradius, angenähert gleich dem Verhältnisse $Z' + \frac{1}{2} Z^2 : Z$.

Um in derselben Weise die Horizontalrefraction zu bilden, denken wir uns alles nach Potenzen von $c = \operatorname{cotg} \vartheta_0$ entwickelt. Setzen wir an

$$R_\delta = \sum_\alpha H_\delta^{2\alpha} c^{2\alpha} - \sum_\alpha H_\delta^{2\alpha+1} c^{2\alpha+1} ,$$

so folgt mit Benutzung der durch (38) eingeführten Grössen B aus (32) die Relation

$$(44) \quad H_\delta^{2\beta} = \sum_\alpha \frac{\Pi(\tfrac{1}{2})\,\Pi(\beta - \tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta)} \left(-\frac{\delta}{2}\right)_\alpha B_{2\beta-2\alpha} \frac{\sin\varphi^{2\alpha-2\beta}}{\Pi(\beta - \alpha - \tfrac{1}{2})^2} ,$$

die zu der umgeformten Gleichung (30)

$$H_\delta^{2\beta+1} = \sum_\alpha \frac{\Pi(\tfrac{1}{2})\,\Pi(\beta)}{\Pi(\beta + \tfrac{1}{2})} \left(-\frac{\delta}{2}\right)_\alpha B_{2\beta-2\alpha+1} \frac{\sin\varphi^{2\alpha-2\beta-1}}{\Pi(\beta - \alpha)^2} ,$$

worin ebenfalls

$$B_{2\alpha+1} = \Pi(2\alpha + 1) b_{2\alpha+1}$$

gesetzt ist, genau analog ist; die Reihe (44) ist unendlich, die andere bricht bei $\alpha = \beta$ ab. Die aus (44) folgende Formel

$$H^{2\beta} = \frac{\Pi(\tfrac{1}{2})}{\Pi(\beta - \tfrac{1}{2})\Pi(\beta)} \frac{B_{2\beta}}{\sin\varphi^{2\beta}} = \tfrac{1}{2}\, 4^\beta b_{2\beta} \sin\varphi^{-2\beta}$$

zeigt den zu (33) analogen Zusammenhang der $b_{2\beta}$ mit den Horizontconstanten gerader Ordnung H, H'', H^{IV}, $\cdots$ Ebenso wird nach den nöthigen Zwischenrechnungen

$$R'_\delta + R_\delta \sum_\beta c^{2\beta+1} H^{2\beta+1}$$

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} c^{2\beta} \tfrac{1}{2} \left(-\frac{\delta}{2}\right)_\gamma \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{2\gamma-2\beta} \frac{\Pi(\alpha - \tfrac{1}{2})}{\Pi(\alpha)} \frac{\Pi(\alpha + \gamma)}{\Pi(\alpha + \gamma - \tfrac{1}{2})} b_{2\alpha+2\beta+1} b_{-2\alpha-2\gamma-1}$$

ferner

$$\int m_\varepsilon dR_\delta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \frac{\Pi(\beta+\frac{1}{2})}{\Pi(\beta+1)} \frac{\Pi(\alpha+\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha)} \frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha+\beta+\frac{3}{2})\Pi(-\frac{1}{2})} H_{\varepsilon+1}^{\frac{1}{2}\beta+1} H_\delta^{\frac{1}{2}\alpha+1} c^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}}$$

$$- \sum_{\alpha\beta} \frac{\Pi(\beta+\frac{1}{2})}{\Pi(\beta+1)} \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})} \frac{\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha+\beta+1)\Pi(-\frac{1}{2})} H_{\varepsilon+1}^{\frac{1}{2}\beta+1} H_\delta^{\frac{1}{2}\alpha} c^{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}}$$

wo in der zweiten Zeile die Summation auch über die negativen Werthe von α $(-1, -2, \cdots -\beta-1)$ zu erstrecken und für

$$\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})} H_\delta^{\frac{1}{2}\alpha}$$

sein Ausdruck (44) zu setzen ist ($H_\delta^{\frac{1}{2}\alpha}$ selbst verschwindet für $\alpha < 0$). Von dem zuletzt gefundenen Ausdruck sind

$$\int m_\delta dR = m_\delta R - m'_\delta\,, \quad \int m dR_\delta = R''_\delta$$

nur specielle Fälle.

Um Indexhäufungen zu vermeiden, wollen wir für den Augenblick setzen

$$R_\delta = \sum H_\delta^\alpha (-1)^\alpha c^\alpha = H_\delta - H'_\delta c + H''_\delta c^2 - \cdots,$$

$$R'_\delta = \sum J_\delta^\alpha (-1)^\alpha c^\alpha = J_\delta - J'_\delta c + J''_\delta c^2 - \cdots,$$

$$R''_\delta = \sum K_\delta^\alpha (-1)^\alpha c^\alpha = K_\delta - K'_\delta c + K''_\delta c^2 - \cdots,$$

$$m'_\delta = \sum L_\delta^\alpha (-1)^\alpha c^\alpha = L_\delta - L'_\delta c + L''_\delta c^2 - \cdots;$$

für unseren Zweck genügt das Mitnehmen von c^0, c^1 und c^2. Aus unseren Entwicklungen folgt zunächst

$$H'_\delta = H'\,, \quad J'_\delta = H' H_\delta\,, \quad K'_\delta = 0\,, \quad L'_\delta = H' m_\delta\,.$$

Damit wird

$$S_0 = (0) - (0)' c + (0)'' \frac{c^2}{2} - \cdots,$$

$$s = H - 2K - H' c + c^2 (H'' - 2K'' + \frac{H}{2} - K) - \cdots,$$

$$S_5 = (5) - (5)' c + (5)'' \frac{c^2}{2} - \cdots,$$

$$S_6 = (6) - (6)' c + (6)'' \frac{c^2}{2} - \cdots,$$

wo $(0) = H + H_5 - 2K + 3K_5$,

$(0)' = 2H'$,

$(0)'' = (0) + 2(H'' + H''_5 - 2K'' + 3K''_5)$;

$(5) - (0) = -2(H_{-2} + H_3) + 4(L_{-2} + L_3) - 6K_3 + 4K_{-2}$,

$(5)' - (0)' = -4H' + 4(L'_{-2} + L'_3)$,

$(5)'' - (0)'' = -4(H''_{-2} + H''_3) + 8(L''_{-2} + L''_3) - 12K''_3 + 8K''_{-2}$
$- (5) + (0)$;

$(6) = 2(m_{-2} + m_3 + 3m''_3 - 2m''_{-2}) + 4(J_{-2} + J_3) - 2(J + J_5)$,

$(6)' = 4(J'_{-2} + J'_3) - 2(J' + J'_5)$,

$(6)'' = 8(J''_{-2} + J''_3) - 4(J'' + J''_5) - 4(J + J_5) - (6)$.

Weiter wird

$$\frac{dS_6 + 2S_5 dR}{dc}$$
$$= -(6)' - 2H'(5) + c[(6)'' + 4H''(5) + 2H'(5)'] + \cdots ,$$

wo bei der Multiplication natürlich die Glieder dritter Ordnung (in Bezug auf die $a_{\alpha\beta+1}$) wegzulassen sind; in Folge dessen wird

$$(6)' + 2H'(5) = 4(J'_{-2} + J'_3) - 2(J' + J'_5)$$
$$+ 2H'(H + H_5 - 2H_{-2} - 2H_3)$$
$$= 0 ,$$

$$\frac{dS_0 + 2S_5 dR}{dc} = c[(6)'' + 4H''(H + H_5 - 2H_{-2} - 2H_3) - 4H'^2] + \cdots$$

Ebenso

$$\frac{dS_5 - 2S_6 dR}{dc} = 2H' + c[(5)'' - 8H''(m_{-2} + m_3)] + \cdots ,$$

$$\frac{dS_0 - 4ds}{dc} = 2H' + c[(0)'' - 8(H'' - 2K'' + \frac{H}{2} - K)] + \cdots$$

Damit findet man endlich für den Horizont ($\lim c = 0$)

$$(45)\begin{cases} R_{11} = (5)'' - (0)'' - 8H''(m_{-2} + m_3) + 8(H'' - 2K'' + \frac{H}{2} - K), \\ R_{22} = -(5)'' - (0)'' + 8H''(m_{-2} + m_3) , \\ R_{12} = -(6)'' + 4H''(2H_{-2} + 2H_3 - H - H_5) + 4H'^2 ; \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} A_1 = 2H + \dfrac{(5)-(0)}{2} - H(m_{-2}+m_3)\,, \\ A_2 = \quad -\dfrac{(6)}{2} \qquad\quad + H(H_{-2}+H_3-H-H_5) \end{cases}$$

oder wegen

$$H''_\partial + \tfrac{1}{2}H_\partial = H''_{\partial-2}\,,\quad K''_\partial + \tfrac{1}{2}K_\partial = K''_{\partial-2}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= 4(H''_{-4}-H''_3)+2H_3 \\ &\quad + 8(L''_{-2}+L''_3)-8H''(m_{-2}+m_3)-4(L_{-2}+L_3) \\ &\quad + 6K_3 - 12K''_3 - 8K''_{-4}\,, \\ R_{11}+R_{22} &= 4(H''_{-2}-H''_3)-8K''_{-2}-12K''_3\,, \\ R_{12} &= 2(m_{-2}+m_3) \\ &\quad - 8(J''_{-2}+J''_3)+4(J''+J''_5)+4(J_{-2}+J_3)+2(J+J_5) \\ &\quad + 4H''(2H_{-2}+2H_3-H-H_5)+4H'^2+6m''_3-4m''_{-2}\,; \\ A_1 &= 2H - H_{-2} - H_3 \\ &\quad + 2(L_{-2}+L_3) - H(m_{-2}+m_3) + 2K_{-2} - 3K_3\,, \\ A_2 &= -(m_{-2}+m_3) \\ &\quad - 2(J_{-2}+J_3)+J+J_5+H(H_{-2}+H_3-H-H_5) \\ &\quad + 2m''_{-2} - 3m''_3\,. \end{aligned}$$

Die Aufsuchung der Hauptglieder bietet hier schon Schwierigkeiten; wir wollen uns damit nicht aufhalten, sondern nur die Grössenordnung charakterisiren. Bezeichnet f_α eine ganze homogene Function α^{ten} Grades der $\alpha_2\beta_{+1}$, so treten als Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf $\sin\varphi$ die folgenden auf:

$$\begin{aligned} \text{In } R_{11} \text{ und } R_{22}&: f_1 \quad , \quad f_2 \operatorname{cosec}\varphi\,, \\ \text{in } R_{12}&: f_1 \sin\varphi \quad , \quad f_2 \quad ,\\ \text{in } A_1 &: f_1 \sin\varphi^2\,, \quad f_2 \sin\varphi \quad ,\\ \text{in } A_2 &: f_1 \sin\varphi \quad , \quad f_2 \quad . \end{aligned}$$

Es ist also, wie im Zenith, das Verhältniss der Glieder zweiter Ordnung zu denen erster Ordnung durch

$$f_1 \operatorname{cosec}\varphi$$

gegeben, mithin merklich.

5.

Die bisher behandelte Formel

$$R = \sum_{\beta} a_{2\beta+1}\, \tau^{2\beta+1}$$

ist einerseits selbst, schon mit wenigen Anfangsgliedern, als scharfe Interpolationsformel zur Darstellung beobachteter Refractionswerthe brauchbar, andererseits vertritt sie einen allgemeinen Typus von Refractionsformeln, diejenigen nämlich, die sich in einfacher Weise nach Potenzen von τ entwickeln lassen. Aus diesem Grunde haben wir die Entwicklungen des vorigen § auf diese Form von R gestützt. Die Complication der Formeln macht es wünschenswerth, bei der wirklichen Aufstellung der Endausdrücke für δR und δA eine möglichst einfache Refractionsformel zu Grunde zu legen, von der dann freilich weder Allgemeinheit noch sehr scharfer Anschluss in den grösseren Zenithdistanzen zu verlangen ist. Der letztere ist am ehesten entbehrlich, denn bei der Grösse der von den meteorologischen Elementen abhängigen Refractionsschwankungen ist eine Unsicherheit der mittleren Refraction um etwa 1 % in der Nähe des Horizontes ohne Belang.

Die von TH. v. OPPOLZER in Nr. 2135 der Astr. Nachr. angeführte, von Herrn BRUNS (diese Berichte 1891, Heft II, p. 179) weiterbehandelte Refractionsformel lautet

$$R = a\,\Phi(b \operatorname{cotg} \vartheta_0)\,,$$

wo a und b zwei Constanten bedeuten; $\Phi(x)$ ist die bekannte KRAMP'sche Transcendente, die wir hier in der Form

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega}\, d\omega}{\sqrt{x^2 + \omega}}$$

schreiben wollen. — Ich habe einen Theil der Rechnungen für diese OPPOLZER'sche Formel durchgeführt. Man erzielt aber eine Reihe erheblicher Vereinfachungen, wenn man an deren Stelle die ähnlich aussehende, numerisch wenig davon verschiedene Formel

$$R = a \sin \vartheta_0\, \Phi(b \cos \vartheta_0) \tag{47}$$

zu Grunde legt. Für Zenith und Horizont erhält man aus (47)

$$Z = a\,\Phi(b)\,, \quad H = a\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

woraus mit den BESSEL'schen Werthen

$$\text{Log}\, Z = 1{,}7615600\,, \quad \text{Log}\, H = 3{,}3209974$$

für a, b die Werthe

$$\text{Log}\, a = 3{,}3734525\,, \quad \text{Log}\, b = 1{,}3103439$$

folgen. Der Anschluss an BESSEL ist aus den weiter unten folgenden Zahlenwerthen zu ersehen.

Um mit (47) die R_ϑ, m_ϑ u. s. w. zu bilden, haben wir auf die Entstehungsweise der Formel zurückzugehen. Wie bisher seien r der Kugelradius, μ der Brechungsexponent, $\nu = r\mu$ die Coordinaten einer beliebigen Luftschicht, r_0, μ_0, ν_0 dieselben Grössen für den Beobachtungsort, $m = \log\mu_0 - \log\mu$ (log bedeutet natürliche, Log gemeine Logarithmen). Aus

$$R = \int_0^m \frac{\nu_0 \sin\vartheta_0\, dm}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2 \sin\vartheta_0^2}}$$

folgt mit

$$\nu = \nu_0 \sec\varphi\,, \quad \omega = b^2 \operatorname{tg}\varphi^2\,, \quad x = b\cos\vartheta_0$$

$$\frac{R}{\sin\vartheta_0} = \int_0^m \frac{b\, dm}{\sqrt{x^2 + \omega}}\,,$$

und wenn wir für den Zusammenhang zwischen μ und ν (oder zwischen m und ω) die Annahme

$$dm = \frac{a}{2b} e^{-\omega} d\omega$$

einführen:

$$\frac{R}{\sin\vartheta_0} = \frac{a}{2}\int_0^\omega \frac{e^{-\omega} d\omega}{\sqrt{x^2 + \omega}} = a\Phi(x) - a e^{-\omega}\Phi\left(\sqrt{x^2 + \omega}\right)\,.$$

Zum Schluss ist für φ derjenige Werth zu setzen, der der Grenze der Atmosphäre entspricht. Um die Formel (47) wiederzuerhalten, ist dieser Werth so gross anzunehmen, dass $e^{-\omega}$ unmerklich wird. Da $b = 20{,}4$, so genügt für φ ein Werth im ersten Octanten, sodass also $\omega < b^2$.

Hiernach wird zunächst

$$R_\delta = \tfrac{1}{2} a \sin\vartheta_0 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega} d\omega}{\sqrt{x^2+\omega}} \left(1+\frac{\omega}{b^2}\right)^{\frac{\delta}{2}},$$

$$m_\delta = \frac{a}{2b} \int_0^\infty e^{-\omega} d\omega \left(1+\frac{\omega}{b^2}\right)^{\frac{\delta}{2}}.$$

Durch Entwicklung der $\frac{\delta}{2}^{\text{ten}}$ Potenz folgt:

$$(48)\quad \begin{cases} R_\delta = a \sin\vartheta_0 \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} r_\alpha, & r_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega} d\omega\, \omega^\alpha}{\sqrt{x^2+\omega}}, \\ m_\delta = \frac{a}{2b} \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} n_\alpha, & n_\alpha = \int_0^\infty e^{-\omega} d\omega\, \omega^\alpha, \\ R'_\delta = a^2 \sin\vartheta_0^2 \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} r'_\alpha, & r'_\alpha = \int r\, dr_\alpha, \\ m'_\delta = \frac{a^2}{2b} \sin\vartheta_0 \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} n'_\alpha, & n'_\alpha = \int r\, dn_\alpha, \\ R''_\delta = \frac{a^2}{2b} \sin\vartheta_0 \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} r''_\alpha, & r''_\alpha = \int n\, dr_\alpha, \\ m''_\delta = \frac{a^2}{4b^2} \sum_\alpha \left(\frac{\delta}{2}\right)_\alpha b^{-2\alpha} n''_\alpha, & n''_\alpha = \int n\, dn_\alpha. \end{cases}$$

Die Reihen sind unter der Voraussetzung $\omega < b^2$ convergent; die Glieder nehmen rasch ab. Diese Abnahme beruht nicht allein auf dem jedesmaligen Hinzutritt des Factors b^{-2}, sondern vor allem auf dem Verhalten der Functionen von x. Die Reihe

$$(49)\qquad \sum_\alpha b^{-2\alpha} f_\alpha(x)$$

nämlich zeigt, vorausgesetzt dass die $f_\alpha(0)$ nicht unendlich werden, zwar sicher Gliederabnahme in der Nähe des Horizontes; in der Nähe des Zeniths hingegen wird x von der Ordnung der Grösse b und schliesslich ihr gleich; ferner lassen sich die $f_\alpha(x)$ als gerade oder ungerade Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ darstellen. Damit

also auch in der Nähe des Zeniths die Glieder abnehmen, muss die Ordnung der $f_\alpha(x)$ in Bezug auf $\frac{1}{x}$ mit wachsenden Index α ebenfalls wachsen oder sich gleich bleiben, darf aber nicht abnehmen. In den Reihen (48) sind in der That die $f_\alpha(x)$ stets von gleicher Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{x}$, und zwar beginnen r_α, n'_α, r''_α mit $\frac{1}{x}$, r'_α mit $\frac{1}{x^2}$; n_α und n''_α sind reine Zahlen. In der Form (49) nun, und mit derselben Eigenschaft der $f_\alpha(x)$, wenigstens was die Anfangsglieder anbelangt, lassen sich auch die Grössen

$$R_{11}\operatorname{cosec}\vartheta_0,\quad R_{22}\operatorname{cosec}\vartheta_0,\quad R_{12},\quad A_1\sin\vartheta_0,\quad A_2$$

darstellen, und unsere Aufgabe ist es, die ersten Glieder dieser Entwicklungen aufzusuchen.

Zu diesem Zwecke sind zunächst die r_α, n_α, r'_α u. s. w. für die ersten Indices zu bilden. Unmittelbar folgt

$$n = 1 - e^{-\omega},$$

$$n' = 1 - e^{-\omega}(1+\omega),$$

$$\tfrac{1}{2}n_2 = 1 - e^{-\omega}\left(1+\omega+\frac{\omega^2}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\Pi(\alpha)}n_\alpha = 1 - e^{-\omega}\sum_\beta{}' \frac{\omega^{\alpha-\beta}}{\Pi(\alpha-\beta)},$$

$$n''_\alpha = \int n\,dn_\alpha = \int_0^\omega (1-e^{-\omega})\,e^{-\omega}\omega^\alpha\,d\omega$$

$$= n_\alpha(\omega) - (\tfrac{1}{2})^{\alpha+1}n_\alpha(2\omega).$$

Für die r_α haben wir die Recursionsformel

$$\frac{\partial r_{\alpha+1}}{\partial x} + x\frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = 0,$$

und für $\alpha = 0$

$$r = \Phi(x) - e^{-\omega}\Phi\left(\sqrt{x^2+\omega}\right),$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 2xr - 1 + e^{-\omega}x(x^2+\omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit erhält man successive

$$r_1 = r\left(\tfrac{1}{2} - x^2\right) + \frac{x}{2} - e^{-\omega}\frac{\sqrt{x^2+\omega}}{2},$$

$$r_2 = r\left(\tfrac{3}{4} - x^2 + x^4\right) + \tfrac{3}{4}x - \frac{x^3}{2} - e^{-\omega}\sqrt{x^2+\omega}\left(\tfrac{3}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

u. s. w. Ferner

$$r''_\alpha = \tfrac{1}{2}\int_0^\omega (1 - e^{-\omega})\, e^{-\omega}(x^2+\omega)^{-\frac{1}{2}}\, \omega^\alpha\, d\omega$$

$$= r_\alpha(x, \omega) - 2^{-\alpha-\frac{1}{2}} r_\alpha\left(\sqrt{2}x, 2\omega\right).$$

$$n'_\alpha = r\left[n_\alpha - \Pi(\alpha)\right] + \int [\Pi(\alpha) - n_\alpha]\, dr,$$

$$\int [\Pi(\alpha) - n_\alpha] dr = \tfrac{1}{2}\sum_\beta \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\beta)} \int_0^\omega e^{-2\omega}\, \omega^{\alpha-\beta}\, d\omega\, (x^2+\omega)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_\beta \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\beta)} 2^{\beta-\alpha-\frac{1}{2}} r_{\alpha-\beta}\left(\sqrt{2}x, 2\omega\right).$$

Endlich wird

$$\int r_1\, dr = \left(\tfrac{1}{2} - x^2\right)\cdot\frac{r^2}{2} + \frac{x}{2}r - \frac{1 - e^{-2\omega}}{8},$$

$$\int r_2\, dr = \left(\tfrac{3}{4} - x^2 + x^4\right)\frac{r^2}{2} + \left(\tfrac{3}{4}x - \frac{x^3}{2}\right)r + e^{-2\omega}\left(\tfrac{1}{4} + \frac{\omega}{8} - \frac{x^2}{8}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \frac{x^2}{8}\right)$$

u. s. w., womit auch die r'_α bekannt sind. Vernachlässigt man nun überall $e^{-\omega}$, setzt

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha^{\frac{1}{2}}\, \Phi(\alpha^{\frac{1}{2}} x), \tag{50}$$

also

$$\Phi_1 = \Phi(x), \quad \Phi_2 = \sqrt{2}\, \Phi\left(\sqrt{2}x\right), \quad \cdots$$

und unterdrückt bei den Φ_α die Angabe des Arguments x, so erhält man bis zu derjenigen Ordnung, bis zu welcher hier gegangen werden soll, die folgende Zusammenstellung (51).

$$n_\alpha = \Pi(\alpha)\,, \qquad n''_\alpha = \Pi(\alpha)\,(1 - 2^{-\alpha-1})\,.$$

$$r = \Phi\,,$$
$$r_1 = \Phi(\tfrac{1}{2} - x^2) + \tfrac{1}{2}x\,,$$
$$r_2 = \Phi(\tfrac{1}{4} - x^2 + x^4) + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}x^3\,;$$
$$r' = \tfrac{1}{2}\Phi^2\,,$$
$$r'_1 = \Phi^2(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x^2) + \tfrac{1}{8}\,,$$
$$r'_2 = \Phi^2(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^4) + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}x^2\,;$$
$$n' = \tfrac{1}{2}\Phi_2\,,$$
$$n'_1 = \Phi_2(\tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{2}x^2) + \tfrac{1}{4}x\,;$$
$$r'' = \Phi - \tfrac{1}{2}\Phi_2\,,$$
$$r''_1 = \Phi(\tfrac{1}{2} - x^2) - \Phi_2(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{2}x^2) + \tfrac{1}{4}x\,.$$

Damit sind die Reihen (48) zu bilden. Um in Bezug auf b zwischen rational und irrational zu unterscheiden (denn es tritt die Grösse $\sin\vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$ auf), empfiehlt es sich die Formeln (36) hier so zu schreiben:

$$\sin\vartheta_0 \frac{dR}{dx} = a\frac{dr}{dx} + \frac{a}{b^2}\frac{dr_1}{dx}\,, \qquad \sin\vartheta_0 \frac{d\vartheta_0}{dx} = -\frac{1}{b}\,,$$

$$S_0 = T_0 \sin\vartheta_0\,, \qquad S_2 = T_2 \sin\vartheta_0\,,$$

$$-\frac{x}{b^2}\frac{R_{11} + R_{22}}{\sin\vartheta_0} = 2\frac{dS_0}{dx} - 4\frac{ds}{dx}\,,$$

$$-\frac{x}{b^2}\frac{R_{22}}{\sin\vartheta_0} = \frac{d(S_0 - S_1)}{dx} - 2T_2\left(a\frac{dr}{dx} + \frac{a}{b^2}\frac{dr_1}{dx} - \frac{1}{b}\right),$$

$$-\frac{x}{b^2}R_{12} = \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\frac{dT_2}{dx} - T_2\frac{x}{b^2}$$
$$-2S_1\left(a\frac{dr}{dx} + \frac{a}{b^2}\frac{dr_1}{dx} - \frac{1}{b}\right) + 4\frac{x}{b}\left(a\frac{dr}{dx} + \frac{a}{b^2}\frac{dr_1}{dx}\right),$$

$$A_1 \sin\vartheta_0 = 2ar\left(1 - ar\frac{x}{b}\right) - \tfrac{1}{2}(S_0 + S_1) + \tfrac{1}{2}T_2\left(\frac{x}{b} - ar\right),$$

$$A_2 + \tfrac{1}{2}T_2 = \left(\tfrac{1}{2}\frac{S_0 - S_5}{\sin\vartheta_0^2} + S_5 - \frac{x}{b}T_5\right)\left(\frac{x}{b} - ar\right).$$

Hier sind S_0, s, S_2, S_4, T_1, T_2 rational, ebenso die Grösse $(S_0 - S_2)$ cosec ϑ_0^2. Für die Ausdrücke, die hierbei gebraucht werden, erhält man aus (48):

$$R + R_2 = a \sin\vartheta_0 (2r + \tfrac{5}{2} b^{-2} r_1 + \tfrac{15}{8} b^{-4} r_2 + \cdots),$$
$$R_{-2} + R_2 = a \sin\vartheta_0 (2r + \tfrac{1}{2} b^{-2} r_1 + \tfrac{1}{8} b^{-4} r_2 + \cdots),$$
$$m_{-2} + m_2 = ab^{-1} + \tfrac{1}{4} ab^{-3} + \tfrac{1}{8} ab^{-5} + \cdots;$$
$$R' + R_2' = a^2 \sin\vartheta_0^2 (2r' + \tfrac{5}{2} b^{-2} r_1' + \tfrac{15}{8} b^{-4} r_2' + \cdots),$$
$$R_{-2}' + R_2' = a^2 \sin\vartheta_0^2 (2r' + \tfrac{1}{2} b^{-2} r_1' + \tfrac{1}{8} b^{-4} r_2' + \cdots),$$
$$m_{-2}' + m_2' = \frac{a^2}{2b} \sin\vartheta_0 (2n' + \tfrac{1}{2} b^{-2} n_1' + \cdots);$$

$$3R_2'' - 2R'' = \frac{a^2}{2b} \sin\vartheta_0 (r'' + \tfrac{15}{8} b^{-2} r_1'' + \cdots),$$

$$3R_2'' - 2R_{-2}'' = \frac{a^2}{2b} \sin\vartheta_0 (r'' + \tfrac{13}{8} b^{-2} r_1'' + \cdots),$$

$$3m_2'' - 2m_{-2}'' = \tfrac{1}{8} a^2 b^{-2} + \tfrac{33}{32} a^2 b^{-4} + \cdots.$$

Es ist ersichtlich, wie die Rechnung weiterzuführen ist. Ich lasse hier das Endresultat folgen, worin das Glied zweiter Ordnung (in Bezug auf a) jedesmal unter dasjenige erster Ordnung gesetzt ist, zu dem es numerisch einen noch merklichen Beitrag liefert, also ein Glied mit $a^2 b^{\alpha-1}$ unter eines mit ab^α.

$$\begin{aligned}
(R_{11}+R_{22})\operatorname{cosec}\vartheta_0 = {} & 5a[\Phi(1+2x^2) - x] \\
& + 10a^2 b(\Phi_2 - \Phi) \\
& + \tfrac{15}{8} ab^{-2}[\Phi(1 - 4x^2 - 4x^4) + x + 2x^3] \\
& + \tfrac{15}{4} a^2 b^{-1}[\Phi(2 + 4x^2) - \Phi_2(1 + 4x^2)] \\
& + \cdots \\
- R_{22} \operatorname{cosec}\vartheta_0 = {} & 4a[\Phi(1+2x^2) - x] \\
& + 8a^2 b[\Phi_2 - \Phi] \\
& + ab^{-2}[\Phi(\tfrac{1}{2} - 14x^2 - 10x^4) + \tfrac{9}{2} x + 5x^3] \\
& + a^2 b^{-1}[\Phi(3 + 20x^2) - \Phi_2(3 + 28x^2) \\
& \qquad + 6x\Phi^2 + 4x] \\
& + \cdots \\
- R_{12} = {} & ab^{-1}[\Phi(9x + 10x^3) - 2 - 5x^2] \\
& + a^2[18x\Phi_2 - 15x\Phi - 3\Phi^2 - \tfrac{3}{2}] \\
& + ab^{-3}[\Phi(\tfrac{23}{8} x - \tfrac{45}{2} x^3 - \tfrac{35}{2} x^5) \\
& \qquad - \tfrac{1}{2} + \tfrac{55}{8} x^2 + \tfrac{35}{4} x^4] \\
& + a^2 b^{-2}[\Phi(\tfrac{75}{8} x + \tfrac{175}{4} x^3) - \Phi_2(\tfrac{39}{4} x + 53x^3) \\
& \qquad - \Phi^2(\tfrac{7}{2} - 16x^2) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{37}{8} x^2] \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-A_1 \sin\vartheta_0 = {} & ab^{-2}\left[\Phi\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{2}x^2\right) + \tfrac{5}{4}x\right] \\
& + a^2b^{-4}\left[\tfrac{3}{2}\Phi - \tfrac{5}{4}\Phi_2 + x\Phi^2\right] \\
& + ab^{-4}\left[\Phi\left(\tfrac{3}{32} - \tfrac{13}{8}x^2 + \tfrac{15}{8}x^4\right) + \tfrac{41}{32}x - \tfrac{15}{16}x^3\right] \\
& + a^2b^{-3}\left[\Phi\left(\tfrac{15}{8} - 5x^2\right) - \Phi_2\left(\tfrac{23}{32} - \tfrac{25}{8}x^2\right)\right. \\
& \qquad \left. + \Phi^2\left(\tfrac{3}{8}x + \tfrac{5}{4}x^3\right) + \tfrac{5}{8}x\right] \\
& + \cdots \\
-A_2 = {} & ab^{-1}(1 - 2x\Phi) \\
& + a^2\Phi^2 \\
& + ab^{-3}\left[\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}x^2 - \Phi\left(\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^3\right)\right] \\
& + a^2b^{-2}\left(\tfrac{5}{16}x\Phi_2 - \tfrac{3}{2}x\Phi + \Phi^2\left(\tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{4}x^2\right) - \tfrac{1}{16}\right] \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

In jedem dieser Ausdrücke sind die von x abhängigen Coefficienten, wie man durch Ansetzung der semiconvergenten Reihe für Φ findet, in der That von gleicher Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{x}$, und zwar in A_1 von der Ordnung $\frac{1}{x}$, in R_{12} und A_2 von der Ordnung $\frac{1}{x^2}$, in R_{11} und R_{22} von der Ordnung $\frac{1}{x^3}$. Die hingeschriebenen Terme ergeben also für das Zenith eine Genauigkeit bis einschliesslich ab^{-5} und a^2b^{-4}, oder in den Zenithconstanten ausgedrückt bis einschliesslich Z'' und ZZ'; die Genauigkeit im Horizont wird unmittelbar durch die Coefficienten $a^\alpha b^\beta$ vor den Klammern angezeigt. — Man erkennt leicht, dass in den Gliedern mit a^3 die Transcendenten

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi^2,\ \Phi\Phi_2,\ \Phi^3$$

auftreten würden u. s. f.

Der Uebersicht wegen stellen wir, mit einigen unwesentlichen Aenderungen, die Formeln des Endresultats hier noch einmal zusammen.

Es sei:

α die Abplattung.
φ die Breite des Beobachtungsortes.
ϑ_0 die scheinbare Zenithdistanz.
A das scheinbare Azimuth, gezählt von Süden in beliebiger Richtung.

Ferner

$$x = b\cos\vartheta_0\,, \quad R = a\sin\vartheta_0\,\Phi = a\sin\vartheta_0\,\Phi(x)\,,$$

wo Φ die KRAMP'sche Function

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\omega}\,d\omega}{\sqrt{x^2+\omega}} = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt\,,$$

a und b zwei empirische Constanten bedeuten. Dann ist, beidemal im Sinne wahrer minus scheinbarer Ort, die Refraction in Zenithdistanz gegeben durch

$$R + \frac{\alpha}{4}\left[R_{11}\sin\varphi^2 + R_{22}\cos\varphi^2\cos A^2 - 2R_{12}\sin\varphi\cos\varphi\cos A\right],$$

die in Azimuth durch

$$\alpha\cos\varphi\sin A\left[A_1\sin\varphi - A_2\cos\varphi\cos A\right],$$

wo R_{11}, R_{22}, R_{12}, A_1 und A_2 durch die obigen Ausdrücke zu ersetzen sind.

R ist die Refraction in der Aequatorebene $\left(\varphi = 0\,, A = \frac{\pi}{2}\right)$.

Das Glied mit R_{11} giebt die Aenderung der auf den Ostwestvertical bezogenen mittleren Refraction für verschiedene Beobachtungsorte; an den Polen würde die mittlere Refraction $R + \frac{\alpha}{4}R_{11}$ betragen.

Im Zenith erhält man als Hauptglieder der Störungen die Ausdrücke (43), aus denen hervorgeht, dass in mässigen Zenithdistanzen der Einfluss der Abplattung unmerklich ist. Im Horizont wird mit demselben Grade der Genauigkeit

$$R_{11} = \tfrac{9}{2}\sqrt{\pi}\,a + 9\sqrt{\pi}\,(\sqrt{2}-1)\,a^2b + \cdots$$

$$R_{22} = -2\sqrt{\pi}\,a - 4\sqrt{\pi}\,(\sqrt{2}-1)\,a^2b + \cdots$$

$$R_{12} = 2ab^{-1} + \tfrac{3}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a^2 + \cdots$$

$$A_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\,ab^{-2} + \sqrt{\pi}\,(\tfrac{3}{8}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4})\,a^2b^{-1} + \cdots$$

$$A_2 = -ab^{-1} - \frac{\pi}{4}\,a^2 + \cdots$$

Um eine Vorstellung vom Verlaufe der Störungen in den höheren Zenithdistanzen zu geben, sind in folgendem Täfelchen für einige Werthe zwischen $\vartheta_0 = 60^\circ$ und $\vartheta_0 = 90^\circ$ die Maximalwerthe der Glieder, nämlich

$$\frac{\alpha}{4} R_{11}, \quad \frac{\alpha}{4} R_{22}, \quad \frac{\alpha}{4} R_{12}, \quad \frac{\alpha}{2} A_2$$

zusammengestellt; $\frac{\alpha}{2} A_1$ erreicht nicht einmal im Horizont den Betrag eines Hundertels der Bogensecunde. Die zweite Columne giebt die nach der Formel (47) gerechnete Refraction R selbst, die dritte die Differenz zwischen Bessel und R. Für a und b sind die oben angeführten Zahlen, für die Abplattung α der Bessel'sche Werth benutzt. Einheit ist die Bogensecunde.

ϑ_0	R	$(B) - R$	$\frac{\alpha}{4} R_{11}$	$-\frac{\alpha}{4} R_{22}$	$\frac{\alpha}{4} R_{12}$	$-\frac{\alpha}{2} A_2$
60°	99.67	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
65	123.18	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00
70	157.28	− 0.01	0.03	0.01	0.00	0.00
75	212.12	− 0.03	0.06	0.03	0.00	0.00
76	227.42	− 0.03	0.07	0.03	− 0.01	0.00
77	244.90	− 0.03	0.09	0.04	− 0.01	0.01
78	265.04	− 0.04	0.11	0.05	− 0.01	0.01
79	288.51	− 0.03	0.14	0.06	− 0.01	0.01
80	316.20	− 0.04	0.18	0.08	− 0.01	0.01
81	349.33	− 0.05	0.24	0.10	− 0.01	0.01
82	389.65	− 0.02	0.32	0.14	− 0.01	0.01
83	439.67	+ 0.02	0.45	0.20	− 0.02	0.02
84	503.20	+ 0.11	0.64	0.28	− 0.02	0.02
85	586.16	+ 0.34	0.96	0.42	− 0.02	0.02
86	698.22	+ 0.68	1.50	0.67	− 0.02	0.03
87	856.02	− 1.42	2.50	1.11	− 0.02	0.05
88	1090.00	− 1.40	4.46	1.98	0.00	0.08
89	1460.00	+ 4.60	8.69	3.86	+ 0.06	0.13
90	2094.10	0.00	18.80	8.36	+ 0.28	0.23

Die angeführten Zahlen lassen erkennen, dass der Einfluss der Abplattung erst in den ganz niedrigen Höhen in Betracht

kommen würde; hier allerdings würde er bei einer scharfen Reduction von Beobachtungen nicht zu vernachlässigen sein. Insbesondere käme er in Frage, wenn, nach dem Vorschlage von Herrn Bruns, der Verlauf der mittleren Refraction bis in den Horizont hinunter mit derjenigen Genauigkeit aus den Beobachtungen abgeleitet werden sollte, die zur Berechnung der daraus folgenden *mittleren Lufttemperaturen* erforderlich ist.

INHALT.

Seite

A. Mayer, Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen und im Besondern der infinitesimalen Berührungstransformationen der Ebene 697

F. Hausdorff, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. III. Vorgelegt von dem ordentlichen Mitgliede BRUNS 758

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Zitte - ka

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1893.

IX.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1894.

Einzelpreis: 1 Mark.

M. Krause, *Zur Transformation der Thetafunctionen.* **IV.**

Die folgenden Betrachtungen schliessen sich auf das Engste an diejenigen Betrachtungen an, die in drei Notizen gleichen Titels[1]) in diesen Berichten veröffentlicht worden sind. Sie haben den Zweck, die Anwendbarkeit der aufgestellten Additionstheoreme für die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung darzuthun. Es sollen zuerst einige Resultate für die Transformation vom Grade $2^r - 1$ aufgestellt werden, dann aber soll besonders eingehend der Fall $n = 5$ behandelt werden. Soweit dem Verfasser bekannt, sind die Resultate im wesentlichen neu und dürften mit Hülfe anderer Methoden nur schwer zu erhalten sein.

§ 1.

Aufstellung von Modularbeziehungen für den Transformationsgrad $n = 2^r - 1$.

Wir wollen zunächst einige Modulargleichungen in irrationaler Form für den Fall entwickeln, dass der Transformationsgrad von der Form $2^r - 1$ ist. Wir nehmen zunächst $n = 3$.

Für diesen Fall erhalten wir das Additionstheorem:

$$16\,\vartheta_5((v^{(1)}, \tau))\,\vartheta_5((v^{(2)}, 3\tau)) = \sum \vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)}, 3\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)}, \tau)) . \tag{1}$$

Hierbei ist gesetzt worden:

$$2w_r^{(1)} = 3(v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)}) - (v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)}) ,$$

$$2w_r^{(2)} = v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)} + v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)} , \quad r = 1, 2 ,$$

---

1) Siehe diese Berichte Sitzung vom 6. Februar, 8. Mai. 31. Juli dieses Jahres.

wobei die Grössen α_r die Werthe 0, 1 annehmen können. Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$g_r^{(1)} \equiv 0 \bmod 3 ,$$

$$g_r^{(1)} \equiv g_r^{(2)} \bmod 2 .$$

Durch Specialisirung der Argumente ergeben sich Modulargleichungen. Setzen wir:

$$v_r^{(1)} = v_r^{(2)} = 0 ,$$

so erhalten wir die Relation:

$$4\,\vartheta_5 \cdot \Theta_5 = \sum' \vartheta_\alpha \cdot \Theta_\alpha , \tag{2}$$

wobei die Summe über alle ungeraden Thetafunctionen ausgedehnt und überdies gesetzt ist:

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha((0, \tau)) , \quad \Theta_\alpha = \vartheta_\alpha((0, 3\tau)) .$$

Diese Relation ist bekannt. Sie folgt aus den Gleichungen, die zuerst von Herrn KOENIGSBERGER aufgestellt worden sind.

Wir nehmen zweitens an, dass $n = 7$ sei.

Dann gilt das Additionstheorem:

$$\begin{aligned} &16\,\vartheta_5((v^{(1)}, \tau))\,\vartheta_5((v^{(2)}, 7\tau)) \\ &= \sum' \vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)}, 14\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)}, 2\tau)) , \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$2\,w_r^{(1)} = 7\,(v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)}) - (v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)}) ,$$

$$2\,w_r^{(2)} = v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)} + v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)} ,$$

$$g_r^{(1)} \equiv 0 \bmod 7 , \quad g_r^{(1)} \equiv 7\,g_r^{(2)} \bmod 4 .$$

Schon diese Gleichung ergiebt, wenn die Argumente der Null gleich gesetzt werden, eine Modulargleichung, indessen wollen wir einfachere Formen ableiten. Zunächst wollen wir die Grössen α_r auf diejenigen Combinationen beschränken, die wirklich verschiedene Charakteristiken ergeben, dann tritt links an Stelle von 16 der Factor 4. Vermehren wir ferner die Argumente $v_r^{(1)}$ und $v_r^{(2)}$ um halbe reelle Perioden, so erhalten wir:

$$4\,\vartheta_{12}((v^{(1)},\tau))\,\vartheta_{12}((v^{(2)},7\tau))$$
$$=\sum(-1)^{g_1^{(1)}}\vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)},2\tau)),$$

$$4\,\vartheta_{34}((v^{(1)},\tau))\,\vartheta_{34}((v^{(2)},7\tau))$$
$$=\sum(-1)^{g_2^{(1)}}\vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)},2\tau)),$$

$$4\,\vartheta_0((v)^{(1)},\tau))\,\vartheta_0((v^{(2)},7\tau))$$
$$=\sum(-1)^{g_1^{(1)}+g_2^{(1)}}\vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)},2\tau)).$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$(4)\qquad [5][5]'+[12][12]'+[34][34]'+[0][0]'$$
$$=\sum\vartheta_5[g^{(1)}]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5[g^{(2)}]((w^{(2)},2\tau)),$$

wobei nunmehr $\frac{g^{(1)}}{7}$ und $g^{(2)}$ die Zahlen 0 und 1 bedeuten und gesetzt ist:

$$\vartheta_\alpha((v^{(1)},\tau)) = [\alpha],$$
$$\vartheta_\alpha((v^{(2)},7\tau)) = [\alpha]'.$$

Drei ähnliche Formeln erhalten wir, wenn wir die Argumente $v_r^{(1)}$, $v_r^{(2)}$ um halbe Vielfache der imaginären Perioden vermehren. Dieselben lauten:

$$[01][01]'-[02][02]'+[2][2]'-[1][1]'$$
$$=\sum(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}}\vartheta_5[g^{(1)}]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5[g^{(2)}]((w^{(2)},2\tau)),$$
$$[4][4]'+[03][03]'-[3][3]'-[04][04]'$$
$$=\sum(-1)^{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}}\vartheta_5[g^{(1)}]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5[g^{(2)}]((w^{(2)},2\tau)),$$
$$[23][23]'-[13][13]'-[24][24]'+[14][14]'$$
$$=\sum(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}}\vartheta_5[g^{(1)}]((w^{(1)},14\tau))\,\vartheta_5[g^{(2)}]((w^{(2)},2\tau)).$$

Versehen wir die rechten und die linken Seiten der ersten und zweiten dieser drei Gleichungen mit dem negativen Zeichen und addiren alle drei Gleichungen zu Gleichung (4) und setzen sofort $v_r^{(1)}=v_r^{(2)}=0$, so ergiebt sich die Modulargleichung:

$$(5)\qquad \sum \pm \vartheta_\alpha \cdot \Theta_\alpha = 4\left(\vartheta_0((0,14\tau))\,\vartheta_0((0,2\tau)) + \vartheta_{14}((0,14\tau))\,\vartheta_{14}((0,2\tau))\right),$$

wobei das negative Zeichen auf der linken Seite für die Indices 01, 2, 4, 03, das positive für die übrigen geraden Indices zu nehmen ist, wobei ferner gesetzt ist:

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha((0,\tau)), \quad \Theta_\alpha = \vartheta_\alpha((0,7\tau)).$$

Die gefundene Modulargleichung kann auch geschrieben werden:

$$(6)\qquad 2\sum \pm \vartheta_\alpha \cdot \Theta_\alpha = \sqrt{(\vartheta_5 \cdot \vartheta_0 + \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{12})(\Theta_5 \cdot \Theta_0 + \Theta_{34} \cdot \Theta_{12})} + \sqrt{(\vartheta_5 \cdot \vartheta_0 - \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{12})(\Theta_5 \cdot \Theta_0 - \Theta_{34} \cdot \Theta_{12})}.$$

Damit haben wir eine Modulargleichung gefunden, die zu der Transformation 7. Grades gehört. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass ausser ihr noch eine Reihe weiterer Gleichungen durch andere Specialisirungen gefunden werden können. Wir nehmen nunmehr den allgemeinen Fall, dass der Transformationsgrad n die Form $2^r - 1$ hat.

In diesem Falle ergiebt sich das Additionstheorem:

$$(7)\qquad 16\,\vartheta_5((v^{(1)},\tau))\,\vartheta_5((v^{(2)},n\tau)) = \sum \vartheta_5\left[\frac{g^{(1)}}{2}\right]((w^{(1)},2^{r-2}n\tau))\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(2)}}{2}\right]((w^{(2)},2^{r-2}\tau)),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$2w_r^{(1)} = n(v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)}) - (v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)}),$$
$$2w_r^{(2)} = v_r^{(1)} + \alpha_r^{(1)} + v_r^{(2)} + \alpha_r^{(2)},$$
$$g_r^{(1)} \equiv 0 \bmod n, \quad g_r^{(1)} \equiv n g_r^{(2)} \bmod 2^{r-1}.$$

In dieser Formel kommen nur die Moduln τ, $n\tau$, $2^{r-2}\tau$, $2^{r-2}n\tau$ vor. Durch Specialisirung der Argumente ergiebt sich der

Lehrsatz. *Wenn der Transformationsgrad die Form hat:*

$$n = 2^r - 1,$$

so führt das Additionstheorem (7) das Problem Modulargleichungen zu construiren auf den Fall zurück, dass der Transformationsgrad eine Potenz von 2 ist. Der letzte Fall kann mit Hülfe eines einfachen Algorithmus gelöst werden.

§ 2.

Untersuchung des Falles $n = 5$. Additionstheoreme zwischen Producten von drei und vier Factoren.[1]

Wir gehen jetzt zu dem Falle $n = 5$ über.

Hier bietet sich zunächst ein einfaches Additionstheorem zwischen Producten von drei Factoren dar. Dasselbe lautet:

$$(1)\quad 2^6 \prod_1^3 \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon \tau)) = \sum \prod \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei die Zahlen m und n die Werthe annehmen:

$m_1 = 1,\quad m_2 = 2,\quad m_3 = 5;\quad n_1 = 2,\quad n_2 = 4,\quad n_3 = 20,$

und zwischen den Grössen w und v die Beziehungen stattfinden:

$$2w_r^{(1)} = v_r^{(1)} + v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + \alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)},$$

$$2w_r^{(2)} = 3v_r^{(1)} + v_r^{(2)} - v_r^{(3)} + 3\alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} - \alpha_r^{(3)},$$

$$2w_r^{(3)} = 5v_r^{(1)} - 5v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + 5\alpha_r^{(1)} - 5\alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)}.$$

Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$g_r^{(1)} \equiv s_r^{(1)} + 2s_r^{(2)} + 5s_r^{(3)} \bmod 4,$$

$$g_r^{(2)} \equiv 3s_r^{(1)} + 2s_r^{(2)} - 5s_r^{(3)} \bmod 8,$$

$$g_r^{(3)} \equiv 5s_r^{(1)} - 10s_r^{(2)} + 5s_r^{(3)} \bmod 40.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$(2)\quad g_r^{(1)} \equiv \frac{g_r^{(3)}}{5} \bmod 4,\quad g_r^{(2)} \equiv \frac{3g_r^{(3)}}{5} \bmod 8,\quad g_r^{(3)} \equiv 0 \bmod 5.$$

Setzen wir in diesem Additionstheorem die Argumente der Null gleich, so erhalten wir schon eine Modulargleichung, die zu dem Grade $n = 5$ gehört und zwar in irrationaler Form. Es folgt das unmittelbar daraus, dass ausser dem Modul τ und 5τ nur noch die Moduln 2τ, 4τ und 20τ vorkommen. Die weiteren Betrachtungen sind in Folge dessen mehr formaler Natur. Sie sollen lediglich dazu dienen, einen Theil der Irrationalitäten fortzuschaffen. Dazu setzen wir an Stelle von:

1) Ein Theil der Betrachtungen dieses Paragraphen hat der Mathematiker-Versammlung zu Chicago vorgelegen.

$v_1^{(1)}$, $v_1^{(3)}$ resp.:

$$v_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}, \; v_1^{(3)} - \tfrac{1}{2},$$

so ändern $w_1^{(2)}$ und $w_1^{(3)}$ sich um 1. Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$2^6 \cdot \vartheta_{12}((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_5((v^{(2)}, 2\tau)) \vartheta_{12}((v^{(3)}, 5\tau))$$
$$= \sum (-1)^{\frac{g_1^{(2)}}{4} + \frac{g_1^{(3)}}{2}} \prod \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau))$$
$$= \sum (-1)^{g_1^{(1)}} \prod \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Genau so wird:

$$2^6 \vartheta_{34}((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_5((v^{(2)}, 2\tau)) \vartheta_{34}((v^{(3)}, 5\tau))$$
$$= \sum (-1)^{g_2^{(1)}} \prod \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

$$2^6 \vartheta_0((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_5((v^{(2)}, 2\tau)) \vartheta_0((v^{(3)}, 5\tau))$$
$$= \sum (-1)^{g_1^{(1)} + g_2^{(1)}} \prod \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Wir wollen nun setzen:

(3) $f_1 = \vartheta_5((v^{(2)}, 2\tau)) \sum_\varrho \vartheta_\varrho((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_\varrho((v^{(3)}, 5\tau))$, $\varrho = 5, 12, 34, 0$,

dann wird:

(4) $$2^4 \cdot f_1 = \sum \prod \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei die Grössen $g^{(\varepsilon)}$ ganze Zahlen sind, die den Congruenzen Genüge leisten:

(5) $g_r^{(1)} \equiv \frac{g_r^{(3)}}{5} \bmod 2$, $g_r^{(2)} \equiv \frac{3 g_r^{(3)}}{5} \bmod 4$, $g_r^{(3)} \equiv 0 \bmod 5$.

Es ist hiermit schon ein grosser Theil der Irrationalitäten fortgeschafft, da die Zahlen $g^{(\varepsilon)}$ jetzt ganze Zahlen sind, während die Zahlen $\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}$ auch halbe ganze Zahlen sein können.

Wir können aber noch weiter gehen.

Wir setzen an Stelle von:

$$v_r^{(1)} \quad , \quad v_r^{(2)} \quad , \quad v_r^{(3)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_r^{(1)} + \frac{\tau_{1r}}{2}, \quad v_r^{(2)} + \tau_{1r}, \quad v_r^{(3)} + \frac{5\tau_{1r}}{2},$$

so ändert sich $w_r^{(1)}$ um $2\tau_{1r}$. Mithin wird:

$$2^4 \cdot f_2 = \sum' (-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}} \prod \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei gesetzt ist:

$$(6) \quad f_2 = \vartheta_{04}((v^{(2)}, 2\tau)) \sum' \pm \vartheta_{\varrho_1}((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_{\varrho_1}((v^{(3)}, 5\tau)),$$
$$\varrho_1 = 04, 02, 2, 1.$$

In dieser Summe ist für $\varrho_1 = 02, 1$ das negative Zeichen, für $04, 2$ das positive Zeichen zu wählen.

Ganz analog wird, wenn wir setzen:

$$(7) \quad f_3 = \vartheta_4((v^{(2)}, 2\tau)) \sum' \pm \vartheta_{\varrho_2}((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_{\varrho_2}((v^{(3)}, 5\tau)),$$
$$\varrho_2 = 4, 03, 3, 04,$$

für $\varrho_2 = 3, 04$ das negative Zeichen, für $\varrho_2 = 4, 03$ das positive Zeichen gebrauchen:

$$2^4 \cdot f_3 = \sum' (-1)^{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}} \prod \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Endlich erhalten wir:

$$2^4 \cdot f_4 = \sum' (-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}} \prod \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wenn gesetzt ist:

$$(8) \quad f_4 = \vartheta_{23}((v^{(2)}, 2\tau)) \sum' \pm \vartheta_{\varrho_3}((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_{\varrho_3}((v^{(3)}, 5\tau)),$$
$$\varrho_3 = 13, 24, 23, 14.$$

In dieser Summe ist das negative Zeichen für $\varrho_3 = 13, 24$, das positive für $\varrho_3 = 23, 14$ zu wählen. Hieraus folgt dann:

$$(9) \quad 2^2(f_4 - f_2 - f_3 + f_4) = \sum'' \prod \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über diejenigen α zu summiren ist, für welche:

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)} \quad \text{und:}$$

$$\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}$$

ungerade Zahlen sind.

Damit sind wir am Ziel. Setzen wir die Argumente der Null gleich, so erhalten wir links, vom Factor 4 abgesehen:

$$\vartheta_5((0,2\tau))(\vartheta_5\cdot\Theta_5+\vartheta_{12}\cdot\Theta_{12}+\vartheta_{34}\cdot\Theta_{34}+\vartheta_0\cdot\Theta_0)$$
$$-\vartheta_{01}((0,2\tau))(\vartheta_0\cdot\Theta_0+\vartheta_2\cdot\Theta_2)-\vartheta_4((0,2\tau))(\vartheta_4\cdot\Theta_4+\vartheta_{03}\cdot\Theta_{03})$$
$$+\vartheta_{23}((0,2\tau))(\vartheta_{23}\cdot\Theta_{23}+\vartheta_{14}\cdot\Theta_{14}),$$

wobei wir gesetzt haben:

$$\vartheta_\varrho((0,\tau)) = \vartheta_\varrho,$$
$$\vartheta_\varrho((0,5\tau)) = \Theta_\varrho.$$

Auf der rechten Seite tritt jedes Glied 16mal auf. Vom Factor 16 abgesehen erhalten wir dann fünf Glieder, die den fünf Combinationen der Grössen g entsprechen:

$$g_1^{(1)}=0,\ g_1^{(2)}=0,\ g_1^{(3)}=0,\ g_2^{(1)}=0,\ g_2^{(2)}=0,\ g_2^{(3)}=0,$$
$$g_1^{(1)}=1,\ g_1^{(2)}=3,\ g_1^{(3)}=5,\ g_2^{(1)}=1,\ g_2^{(2)}=3,\ g_2^{(3)}=5,$$
$$g_1^{(1)}=1,\ g_1^{(2)}=3,\ g_1^{(3)}=5,\ g_2^{(1)}=1,\ g_2^{(2)}=1,\ g_2^{(3)}=15,$$
$$g_1^{(1)}=1,\ g_1^{(2)}=1,\ g_1^{(3)}=15,\ g_2^{(1)}=1,\ g_2^{(2)}=1,\ g_2^{(3)}=15,$$
$$g_1^{(1)}=1,\ g_1^{(2)}=1,\ g_1^{(3)}=15,\ g_2^{(1)}=1,\ g_2^{(2)}=3,\ g_2^{(3)}=5.$$

Es ist nicht nöthig, die entsprechenden Thetaproducte wirklich hinzuschreiben.

Diese soeben gefundene Modulargleichung ist das naturgemässe Analogon zu der Modulargleichung der elliptischen Functionen:

$$\vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_3(0,2\tau)\,\vartheta_3(0,5\tau)+\vartheta_0(0,\tau)\,\vartheta_3(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,5\tau)$$
$$-\vartheta_2(0,\tau)\,\vartheta_2(0,2\tau)\,\vartheta_2(0,5\tau)=2\,\vartheta_0(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,4\tau)\,\vartheta_0(0,20\tau).$$

Um weitere Modulargleichungen zu erhalten, betrachten wir ein Additionstheorem zwischen Producten von je vier Factoren.

Dasselbe lautet:

$$(10)\qquad 2^8\,\Pi\,\vartheta_5((w^{(\varepsilon)},m_\varepsilon\tau)) = \Sigma\,\Pi\,\vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right](w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau),$$

$$m_1=1,\quad m_2=2,\quad m_3=5,\quad m_4=10,$$
$$n_1=2,\quad n_2=4,\quad n_3=10,\quad n_4=20.$$

Zwischen den Grössen v und w bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
2w_r^{(1)} &= v_r^{(1)} + v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + \alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)},\\
2w_r^{(2)} &= 2v_r^{(1)} - v_r^{(2)} - v_r^{(4)} + 2\alpha_r^{(1)} - \alpha_r^{(2)} - \alpha_r^{(4)},\\
2w_r^{(3)} &= 5v_r^{(1)} - v_r^{(3)} + v_r^{(4)} + 5\alpha_r^{(1)} - \alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)},\\
2w_r^{(4)} &= -5v_r^{(2)} + 2v_r^{(3)} + v_r^{(4)} - 5\alpha_r^{(2)} + 2\alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)}.
\end{aligned}$$

Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$g_r^{(1)} \equiv s_r^{(1)} + 2s_r^{(2)} + 5s_r^{(3)} \bmod 4,$$

$$g_r^{(2)} \equiv 2s_r^{(1)} - 2s_r^{(2)} - 10s_r^{(4)} \bmod 8,$$

$$g_r^{(3)} \equiv 5s_r^{(1)} - 5s_r^{(3)} + 10s_r^{(4)} \bmod 20,$$

$$g_r^{(4)} \equiv -10s_r^{(2)} + 10s_r^{(3)} + 10s_r^{(4)} \bmod 40.$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$\begin{aligned}
&g_r^{(2)} \equiv 0 \bmod 2, \quad g_r^{(3)} \equiv 0 \bmod 5, \quad g_r^{(4)} \equiv 0 \bmod 10,\\
&\frac{g_r^{(3)}}{5} \equiv -g_r^{(1)} + g_r^{(2)} \bmod 4, \quad \frac{g_r^{(4)}}{10} \equiv g_r^{(1)} - \frac{g_r^{(2)}}{2} \bmod 4.
\end{aligned} \tag{11}$$

Es gilt hier nun dieselbe Bemerkung, wie bei dem vorigen Additionstheorem. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir schon jetzt eine Modulargleichung in irrationaler Form. Die weiteren Betrachtungen sind also mehr formaler Natur und dienen lediglich dazu, einen Theil der Irrationalitäten fortzuschaffen.

Wir wollen dazu von vorneherein die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\varrho((v^{(1)}, \tau)) = [\varrho]^{(1)}, \quad \vartheta_\varrho((v^{(2)}, 2\tau)) = [\varrho]^{(2)},\\
&\vartheta_\varrho((v^{(3)}, 5\tau)) = [\varrho]^{(3)}, \quad \vartheta_\varrho((v^{(4)}, 10\tau)) = [\varrho]^{(4)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Setzen wir nun an Stelle von:

$$v_1^{(1)}, \quad v_1^{(2)}, \quad v_1^{(3)} \text{ resp.:}$$

$$v_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}, \quad v_1^{(2)} + 1, \quad v_1^{(3)} + \tfrac{5}{2},$$

so tritt an Stelle von $w_1^{(1)}$: $w_1^{(1)} + 2$.

Mithin erhalten wir:

$$16^2\,[12]^{(1)}[5]^{(2)}[12]^{(3)}[5]^{(4)}=\sum'(-1)^{g_1^{(1)}}\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right](w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)).$$

Genau so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$16^2\,[34]^{(1)}[5]^{(2)}[34]^{(3)}[5]^{(4)}=\sum'(-1)^{g_2^{(1)}}\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right](w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau).$$

$$16^2[0]^{(1)}[5]^{(2)}[0]^{(3)}[5]^{(4)}=\sum'(-1)^{g_1^{(1)}+g_2^{(1)}}\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right](w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau).$$

Mithin erhalten wir durch Addition:

$$2^6\cdot f_1=\sum\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right](w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)\,, \tag{13}$$

wobei die Grössen $g^{(\varepsilon)\prime}$ sich dadurch von den Grössen $g^{(\varepsilon)}$ unterscheiden, dass:

$$g_r^{(\varepsilon)\prime}\equiv 0 \bmod 2$$

ist, wobei ferner gesetzt ist:

$$\begin{aligned} f_1&=[5]^{(2)}[5]^{(4)}\varphi_1\,,\\ \varphi_1&=[5]^{(1)}[5]^{(3)}+[12]^{(1)}[12]^{(3)}+[34]^{(1)}[34]^{(3)}+[0]^{(1)}[0]^{(3)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir setzen jetzt an Stelle von:

$$v_1^{(1)}\quad,\quad v_1^{(2)}\quad,\quad v_1^{(4)}\quad\text{resp.:}$$

$$v_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}\,,\quad v_1^{(2)}-\tfrac{1}{2}\,,\quad v_1^{(4)}-\tfrac{5}{2}\,,$$

so ändert sich $w_1^{(2)}$ um 2. Mithin erhalten wir:

$$2^6\cdot f_2=\sum'(-1)^{g_1^{(2)}}\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau))\,,$$

$$\begin{aligned} f_2&=[12]^{(2)}[12]^{(4)}\varphi_2\,,\\ \varphi_2&=[12]^{(1)}[5]^{(3)}+[5]^{(1)}[12]^{(3)}+[0]^{(1)}[34]^{(3)}+[34]^{(1)}[0]^{(3)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Genau so wird:

$$2^6\cdot f_3=\sum'(-1)^{g_1^{(2)}}\prod\vartheta_s\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau))\,,$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} f_3&=[34]^{(2)}[34]^{(4)}\varphi_3\,,\\ \varphi_3&=[34]^{(1)}[5]^{(3)}+[0]^{(1)}[12]^{(3)}+[5]^{(1)}[34]^{(3)}+[12]^{(1)}[0]^{(3)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Endlich wird:

$$2^6 \cdot f_4 = \sum (-1)^{g_1^{(2)}+g_2^{(2)}} \Pi \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)\gamma}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei gesetzt ist:

$$(17)\quad \begin{aligned} f_4 &= [0]^{(2)}[0]^{(4)}\varphi_4, \\ \varphi_4 &= [0]^{(1)}[5]^{(3)} + [34]^{(1)}[12]^{(3)} + [12]^{(1)}[34]^{(3)} + [5]^{(1)}[0]^{(3)}. \end{aligned}$$

Durch Addition erhalten wir:

$$(18)\qquad 2^4(f_1+f_2+f_3+f_4) = \Sigma \Pi \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\,(w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

wobei nunmehr die Congruenzen stattfinden:

$$g_r^{(2)} \equiv 0 \bmod 2, \quad \frac{g_r^{(3)}}{5} \equiv -g_r^{(1)} + g_r^{(2)} \bmod 2, \quad \frac{g_r^{(4)}}{10} \equiv g_r^{(1)} - \frac{g_r^{(2)}}{2} \bmod 2.$$

Es nehmen die Grössen g daher die Werthe an:

$$\begin{aligned} &g_r^{(1)} = 0, \quad g_r^{(2)} = 0, \quad g_r^{(3)} = 0, \quad g_r^{(4)} = 0, \\ &g_r^{(1)} = 0, \quad g_r^{(2)} = 2, \quad g_r^{(3)} = 0, \quad g_r^{(4)} = 10, \\ &g_r^{(1)} = 1, \quad g_r^{(2)} = 0, \quad g_r^{(3)} = 5, \quad g_r^{(4)} = 10, \\ &g_r^{(1)} = 1, \quad g_r^{(2)} = 2, \quad g_r^{(3)} = 5, \quad g_r^{(4)} = 0, \end{aligned}$$

so dass nur noch 16 Combinationen der Grössen g möglich sind. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir schon eine recht elegante Modulargleichung, wobei zu bemerken ist, dass auf der rechten wie auf der linken Seite nur noch die gewöhnlichen sechszehn Thetafunctionen mit den Argumenten Null und den vorschiedenen Moduln stehen geblieben sind. Immerhin wird die Zahl der Glieder auf der rechten Seite noch eine grosse. Wir wollen versuchen, einfachere Formen zu erhalten.

Wir führen dazu die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(19)\quad \begin{aligned} \varphi_5 &= [01]^{(1)}[01]^{(3)} - [02]^{(1)}[02]^{(3)} + [2]^{(1)}[2]^{(3)} - [1]^{(1)}[1]^{(3)}, \\ \varphi_6 &= [02]^{(1)}[01]^{(3)} + [01]^{(1)}[02]^{(3)} + [1]^{(1)}[2]^{(3)} + [2]^{(1)}[1]^{(3)}, \\ \varphi_7 &= [2]^{(1)}[01]^{(3)} - [1]^{(1)}[02]^{(3)} + [01]^{(1)}[2]^{(3)} - [02]^{(1)}[1]^{(3)}, \\ \varphi_8 &= [1]^{(1)}[01]^{(3)} + [2]^{(1)}[02]^{(3)} + [02]^{(1)}[2]^{(3)} + [01]^{(1)}[1]^{(3)}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Grössen definiren wir acht neue Grössen durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f_5 &= [5]^{(2)}[04]^{(4)}\varphi_5, & f_5' &= [04]^{(2)}[5]^{(4)}\varphi_5,\\
-f_6 &= [12]^{(2)}[02]^{(4)}\varphi_6, & -f_6' &= [02]^{(2)}[12]^{(4)}\varphi_6,\\
f_7 &= [34]^{(2)}[2]^{(4)}\varphi_7, & f_7' &= [2]^{(2)}[34]^{(4)}\varphi_7,\\
-f_8 &= [0]^{(2)}[1]^{(4)}\varphi_8, & -f_8' &= [1]^{(2)}[0]^{(4)}\varphi_8.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Setzen wir nun an Stelle von:

$$
\begin{aligned}
&v_r^{(1)}, \quad v_r^{(2)}, \quad v_r^{(4)} \quad \text{resp.:}\\
&v_r^{(1)}+\frac{\tau_{1r}}{2}, \quad v_r^{(2)}+3\frac{5\tau_{1r}}{2}, \quad v_r^{(4)}-3\frac{10\tau_{1r}}{2},
\end{aligned}
$$

so tritt an Stelle von:

$$
\begin{aligned}
&w_r^{(1)}, \quad w_r^{(2)}, \quad w_r^{(3)} \quad \text{resp.:}\\
&w_r^{(1)}+4\tau_{1r}, \quad w_r^{(2)}+8\tau_{1r}, \quad w_r^{(3)}-10\tau_{1r}.
\end{aligned}
$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$
2^4(f_5+f_6+f_7+f_8)=\sum(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_1^{(4)}}\Pi\vartheta_5[\mathfrak{g}^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)).
$$

Wir setzen ferner an Stelle von:

$$
\begin{aligned}
&v_r^{(1)}, \quad v_r^{(2)}, \quad v_r^{(3)} \quad \text{resp.:}\\
&v_r^{(1)}+\frac{\tau_{1r}}{2}, \quad v_r^{(2)}+\tau_{1r}, \quad v_r^{(3)}+\frac{5\tau_{1r}}{2},
\end{aligned}
$$

so erhalten wir ähnlich:

$$
2^4(f_5'+f_6'+f_7'+f_8')=\sum(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}}\Pi\vartheta_5[\mathfrak{g}^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)).
$$

Mithin ergiebt sich durch Subtraction:

$$
2^4\left(\sum_5^8 f_s-\sum_5^8 f_s'\right)
$$

$$
=\sum(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}}\left((-1)^{\alpha_1^{(4)}}-(-1)^{\alpha_1^{(2)}}\right)\Pi\vartheta_5[\mathfrak{g}^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)). \tag{21}
$$

In dieser Formel ist die Zahl der Glieder auf der rechten Seite schon bedeutend verringert — wir können aber noch bedeutend weiter gehen.

Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
\varphi_9 &= [23]^{(1)}[23]^{(3)} - [13]^{(1)}[13]^{(3)} - [24]^{(1)}[24]^{(3)} + [14]^{(1)}[14]^{(3)},\\
\varphi_{10} &= [13]^{(1)}[23]^{(3)} + [23]^{(1)}[13]^{(3)} - [14]^{(1)}[24]^{(3)} - [24]^{(1)}[14]^{(3)},\\
\varphi_{11} &= [24]^{(1)}[23]^{(3)} - [14]^{(1)}[13]^{(3)} + [23]^{(1)}[24]^{(3)} - [13]^{(1)}[14]^{(3)},\\
\varphi_{12} &= [14]^{(1)}[23]^{(3)} + [24]^{(1)}[13]^{(3)} + [13]^{(1)}[24]^{(3)} + [23]^{(1)}[14]^{(3)}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Mit Hülfe dieser Grössen definiren wir eine Reihe weiterer Functionen durch:

$$
\begin{aligned}
f_9 &= [5]^{(2)}[23]^{(4)}\varphi_9, & f'_9 &= [23]^{(2)}[5]^{(4)}\varphi_9,\\
-f_{10} &= [12]^{(2)}[13]^{(4)}\varphi_{10}, & -f'_{10} &= [13]^{(2)}[12]^{(4)}\varphi_{10},\\
-f_{11} &= [34]^{(2)}[24]^{(4)}\varphi_{11}, & -f'_{11} &= [24]^{(2)}[34]^{(4)}\varphi_{11},\\
f_{12} &= [0]^{(2)}[14]^{(4)}\varphi_{12}, & f'_{12} &= [14]^{(2)}[0]^{(4)}\varphi_{12}.\\
f''_9 &= [01]^{(2)}[4]^{(4)}\varphi_9, & f'''_9 &= [4]^{(2)}[01]^{(4)}\varphi_9,\\
-f''_{10} &= [02]^{(2)}[03]^{(4)}\varphi_{10}, & -f'''_{10} &= [03]^{(2)}[02]^{(4)}\varphi_{10},\\
-f''_{11} &= [2]^{(2)}[3]^{(4)}\varphi_{11}, & -f'''_{11} &= [3]^{(2)}[2]^{(4)}\varphi_{11},\\
f''_{12} &= [1]^{(2)}[04]^{(4)}\varphi_{12}, & f'''_{12} &= [04]^{(2)}[1]^{(4)}\varphi_{12}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Setzen wir dann an Stelle von:

$$v_r^{(1)}, \quad v_r^{(3)}, \quad v_r^{(4)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_r^{(1)} + \frac{\tau_{r2}}{2}, \quad v_r^{(3)} + 3\frac{5\tau_{r2}}{2}, \quad v_r^{(4)} - 3\frac{10\tau_{r2}}{2},$$

so erhalten wir:

$$2^4\left[\sum_9^{12} f_s - \sum_9^{12} f_s''\right] = \sum E_\varepsilon \cdot \Pi\, \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\left((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon\tau)\right),$$

$$E_\varepsilon = (-1)^{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(3)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}}\left((-1)^{\alpha_1^{(1)}} - (-1)^{\alpha_1^{(2)}}\right).$$

Endlich setzen wir an Stelle von:

$$v_r^{(1)}, \quad v_r^{(2)}, \quad v_r^{(3)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_r^{(1)} + \frac{\tau_{r2}}{2}, \quad v_r^{(2)} + \tau_{r2}, \quad v_r^{(3)} + \frac{5\tau_{r2}}{2},$$

so erhalten wir:

$$2^4\left[\sum_9^{12} f_s''' - \sum_9^{12} f_s'\right] = \sum E_\varepsilon \cdot \Pi \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

$$E_\varepsilon = (-1)^{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}+\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}}\left((-1)^{\alpha_1^{(1)}} - (-1)^{\alpha_1^{(2)}}\right).$$

Durch Subtraction erhalten wir die Summenformel:

(24) $$2^4[\Sigma f_s + \Sigma f_s' - \Sigma f_s'' - \Sigma f_s'''] = \Sigma E \cdot \Pi \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)),$$

$$E = (-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(3)}}\left((-1)^{\alpha_1^{(4)}} - (-1)^{\alpha_1^{(2)}}\right)\left((-1)^{\alpha_2^{(4)}} - (-1)^{\alpha_2^{(2)}}\right).$$

Es ist dieses die Schlussgleichung, die wir erhalten wollten. Setzen wir in ihr die Argumente gleich Null, so erhalten wir eine Modulargleichung, die das naturgemässe Analogon zu der Modulargleichung der elliptischen Functionen ist:

$$\sqrt[4]{k\lambda}\,(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{k_1 \lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{k_1}).$$

Um ihre Symmetrie möglichst klar hervortreten zu lassen, setzen wir an Stelle von τ: $\frac{\tau}{2}$ links und rechts. Führen wir dann die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} A &= \vartheta_5((0,\tau))\vartheta_{23}((0,5\tau)) + \vartheta_{23}((0,\tau))\vartheta_5((0,5\tau)) \\ &\quad - \vartheta_4((0,\tau))\vartheta_{01}((0,5\tau)) - \vartheta_{01}((0,\tau))\vartheta_4((0,5\tau)), \\ (25)\quad A_1 &= \vartheta_5((0,\tau))\vartheta_0((0,5\tau)) + \vartheta_0((0,\tau))\vartheta_5((0,5\tau)) \\ &\quad - \vartheta_{12}((0,\tau))\vartheta_{34}((0,5\tau)) - \vartheta_{34}((0,\tau))\vartheta_{12}((0,5\tau)), \\ B &= \vartheta_0((0,\tau))\vartheta_{14}((0,5\tau)) + \vartheta_{14}((0,\tau))\vartheta_0((0,5\tau)), \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} (26)\quad &\left[\vartheta_{23}\left(\left(0,\frac{\tau}{2}\right)\right)\vartheta_{23}\left(\left(0,\frac{5\tau}{2}\right)\right) + \vartheta_{14}\left(\left(0,\frac{\tau}{2}\right)\right)\vartheta_{14}\left(\left(0,\frac{5\tau}{2}\right)\right)\right]A \\ &+\left[\vartheta_{14}\left(\left(0,\frac{\tau}{2}\right)\right)\vartheta_{23}\left(\left(0,\frac{5\tau}{2}\right)\right) + \vartheta_{23}\left(\left(0,\frac{\tau}{2}\right)\right)\vartheta_{14}\left(\left(0,\frac{5\tau}{2}\right)\right)\right]B \\ &= 4[\vartheta_0((0,2\tau))\vartheta_0((0,10\tau)) + \vartheta_{14}((0,2\tau))\vartheta_{14}((0,10\tau))]A_1 \\ &+ 4[\vartheta_{14}((0,2\tau))\vartheta_0((0,10\tau)) + \vartheta_0((0,2\tau))\vartheta_{14}((0,10\tau))]B. \end{aligned}$$

§ 3.

Der Fall $n = 5$. Additionstheoreme zwischen Producten von sechs und acht Factoren.

Wir wollen nun weitere Modulargleichungen ableiten, indem wir Additionstheoreme zwischen Producten von sechs und acht

Factoren aufstellen. Dieselben haben den grossen Vorzug, dass auf den linken Seiten nur die Moduln τ und 5τ vorkommen, dagegen freilich ist auf der rechten Seite die Zahl der Glieder um so grösser — wie es in der Natur der Sache begründet ist. Wir wollen bei diesen Additionstheoremen kürzer verfahren, wie bei den vorigen und zwar um umfangreiche Formeln zu vermeiden. Im Princip bleiben die Betrachtungen genau so einfach wie die früheren.

Das Additionstheorem nun, welches zunächst ins Auge gefasst werden soll, lautet:

$$(1.)\quad 4^6 \prod_1^6 \vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon\tau)) = \sum \prod_1^6 \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon\tau)),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1\,,\quad m_5 = m_6 = 5\,,$$
$$n_1 = n_2 = 2\,,\quad n_3 = n_4 = 4\,,\quad n_5 = n_6 = 20\,.$$

Zwischen den Grössen v und w bestehen die Beziehungen:

$$2w_r^{(1)} = v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + v_r^{(4)} + v_r^{(5)} + \alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(5)}\,,$$
$$2w_r^{(2)} = v_r^{(1)} + v_r^{(3)} - v_r^{(4)} + v_r^{(6)} + \alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(3)} - \alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(6)}\,,$$
$$2w_r^{(3)} = 3v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + v_r^{(4)} - v_r^{(5)} + 3\alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)} - \alpha_r^{(5)}\,,$$
$$2w_r^{(4)} = 3v_r^{(1)} + v_r^{(3)} - v_r^{(4)} - v_r^{(6)} + 3\alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(3)} - \alpha_r^{(4)} - \alpha_r^{(6)}\,,$$
$$2w_r^{(5)} = 5v_r^{(2)} - 5v_r^{(3)} - 5v_r^{(4)} + v_r^{(5)} + 5\alpha_r^{(2)} - 5\alpha_r^{(3)} - 5\alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(5)}$$
$$2w_r^{(6)} = 5v_r^{(1)} - 5v_r^{(3)} + 5v_r^{(4)} + v_r^{(6)} + 5\alpha_r^{(1)} - 5\alpha_r^{(3)} + 5\alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(6)}\,.$$

Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$g_r^{(1)} \equiv s_r^{(2)} + s_r^{(3)} + s_r^{(4)} + 5s_r^{(5)} \bmod 4\,,$$
$$g_r^{(2)} \equiv s_r^{(1)} + s_r^{(3)} - s_r^{(4)} + 5s_r^{(6)} \bmod 4\,,$$
$$g_r^{(3)} \equiv 3s_r^{(2)} + s_r^{(3)} + s_r^{(4)} - 5s_r^{(5)} \bmod 8\,,$$
$$g_r^{(4)} \equiv 3s_r^{(1)} + s_r^{(3)} - s_r^{(4)} - 5s_r^{(6)} \bmod 8\,,$$
$$g_r^{(5)} \equiv 5s_r^{(2)} - 5s_r^{(3)} - 5s_r^{(4)} + 5s_r^{(5)} \bmod 40\,,$$
$$g_r^{(6)} \equiv 5s_r^{(1)} - 5s_r^{(3)} + 5s_r^{(4)} + 5s_r^{(6)} \bmod 40\,.$$

Aus diesen Congruenzen folgen die weiteren:

$$2g_r^{(1)} + 3g_r^{(3)} + g_r^{(5)} \equiv 0 \bmod 8\,,\quad 2g_r^{(2)} + 3g_r^{(4)} + g_r^{(6)} \equiv \bmod 8\,,$$
$$(2)\qquad g_r^{(5)} \equiv g_r^{(6)} \equiv 0 \bmod 5\,,$$

$$g_r^{(3)} \equiv -\frac{g_r^{(5)}}{5} \bmod 4,\ g_r^{(4)} \equiv -\frac{g_r^{(6)}}{5} \bmod 4,\ g_r^{(3)} + g_r^{(4)} \equiv \frac{3(g_r^{(5)} + g_r^{(6)})}{5} \bmod 8.$$

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir eine Modulargleichung, die aber noch eine grössere Reihe von Irrationalitäten enthält. Um einfachere Formen zu erhalten, stellen wir die folgenden Betrachtungen an. Wir setzen der Einfachheit halber:

$$\vartheta_\alpha((v_s, \tau)) = [\alpha]^{(s)}, \quad s = 1, 2, 3, 4,$$
$$\vartheta_\alpha((v_5, 5\tau)) = [\alpha]^{(5)}, \quad \vartheta_\alpha((v_6, 5\tau)) = [\alpha]^{(6)}.$$

Die soeben eingeführten Symbole sind dann von den im vorigen Paragraphen eingeführten verschieden. Wir setzen nun an Stelle von:

$$v_1^{(1)}, \quad v_1^{(6)} \quad \text{resp.:}$$
$$v_1^{(1)} + \tfrac{1}{2}, \quad v_1^{(6)} - \tfrac{1}{2},$$

so gehen $w_1^{(4)}$ und $w_1^{(6)}$ resp. über in $w_1^{(4)} + 1$ und $w_1^{(6)} + 1$. Mit-erhalten wir:

$$4^6 [12]^{(1)} [5]^{(2)} [5]^{(3)} [5]^{(4)} [5]^{(5)} [12]^{(6)}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_1^{(4)} + \frac{g_1^{(6)}}{5}\right)} \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Ganz analog ergeben sich die beiden Formeln:

$$4^6 [34]^{(1)} [5]^{(2)} [5]^{(3)} [5]^{(4)} [5]^{(5)} [34]^{(6)}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_2^{(1)} + \frac{g_2^{(6)}}{5}\right)} \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

$$4_6 [0]^{(1)} [5]^{(2)} [5]^{(3)} [5]^{(4)} [5]^{(5)} [0]^{(6)}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_1^{(1)} + \frac{g_1^{(6)}}{5} + g_2^{(1)} + \frac{g_2^{(6)}}{5}\right)} \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Durch Addition erhalten wir die Formel:

$$4^5 \cdot f_1 = \sum \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)\gamma}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)), \tag{3}$$

wobei der Werth von f_1 nicht hingeschrieben zu werden braucht, wobei ferner die Grössen $g^{(\varepsilon)\gamma}$ denselben Congruenzen Genüge leisten, wie die Grössen $g^{(\varepsilon)}$, daneben aber noch den weiteren:

$$(4) \qquad g_r^{(4)\prime} + \frac{g_r^{(6)\prime}}{5} \equiv 0 \bmod 8 .$$

Wir setzen jetzt an Stelle von:

$$v_1^{(2)} \quad , \quad v_1^{(5)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_1^{(2)} + \tfrac{1}{2} , \quad v_1^{(5)} - \tfrac{1}{2} ,$$

so tritt an Stelle von $w_1^{(3)}$ und $w_1^{(5)}$ resp. $w_1^{(3)} + 1$ und $w_1^{(5)} + 1$.

Auf der linken Seite tritt dann an Stelle von:

$$[5]^{(2)} \text{ und } [5]^{(5)} \quad \text{resp.:}$$
$$[12]^{(2)} \text{ und } [12]^{5} .$$

Wir wollen die auf diesem Wege aus f_1 entstehende Function durch f_2 bezeichnen, dann erhalten wir das Resultat:

$$4^5 \cdot f_2 = \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_1^{(3)\prime} + \frac{g_1^{(5)\prime}}{5}\right)} \Pi\, \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) .$$

Wir setzen ferner an Stelle von:

$$[5]^{(2)} \text{ und } [5]^{(5)} \quad \text{resp.:}$$
$$[34]^{(2)} \text{ und } [34]^{(5)} ,$$

so möge f_1 in f_3 übergehen. Für diese Function f_3 ergiebt sich dann der Ausdruck:

$$4^5 \cdot f_3 = \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_2^{(3)\prime} + \frac{g_2^{(5)\prime}}{5}\right)} \Pi\, \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) .$$

Endlich setzen wir an Stelle von:

$$[5]^{(2)} \text{ und } [5]^{(5)} \quad \text{resp.:}$$
$$[0]^{(2)} \text{ und } [0]^{(5)} ,$$

so möge f_1 in f_4 übergehen. Es leistet dann f_4 der Gleichung Genüge:

$$4^5 \cdot f_4 = \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_1^{(3)\prime} + \frac{g_1^{(5)\prime}}{5} + g_2^{(3)\prime} + \frac{g_2^{(5)\prime}}{5}\right)} \Pi\, \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Durch Addition erhalten wir:

$$4^4 \cdot F_1 = \Sigma \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)), \tag{5}$$

wobei F_1 gesetzt ist:

$$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \tag{6}$$

und die Grössen $g^{(\varepsilon)\prime\prime}$ den Congruenzen Genüge leisten:

$$\begin{gathered} g_r^{(1)\prime\prime} \equiv -\frac{g_r^{(5)\prime\prime}}{5} \bmod 4\,, \quad g_r^{(2)\prime\prime} \equiv -\frac{g_r^{(6)\prime\prime}}{5} \bmod 4\,, \\ g_r^{(3)\prime\prime} \equiv -\frac{g_r^{(5)\prime\prime}}{5} \bmod 8\,, \quad g_r^{(4)\prime\prime} \equiv -\frac{g_r^{(6)\prime\prime}}{5} \bmod 8\,, \\ g_r^{(5)\prime\prime} + g_r^{(6)\prime\prime} \equiv 0 \bmod 2\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Wir setzen jetzt an Stelle von:

$$\begin{array}{cccc} v_1^{(2)}\,, & v_1^{(3)}\,, & v_1^{(4)}\,, & v_1^{(5)} \text{ resp.:} \\ v_1^{(2)} + \tfrac{1}{2}\,, & v_1^{(3)} + \tfrac{1}{2}\,, & v_1^{(4)} + \tfrac{1}{2}\,, & v_1^{(5)} + \tfrac{1}{2}\,, \end{array}$$

so geht $w_1^{(1)}$, $w_1^{(3)}$, $w_1^{(5)}$, resp. über in $w_1^{(1)} + 1$, $w_1^{(3)} + 1$, $w_1^{(5)} - 1$.

Auf der linken Seite denken wir uns dann an Stelle von:

$$[5]^{(s)},\ [12]^{(s)},\ [34]^{(s)},\ [0]^{(s)}$$

für $s = 2, 3, 4, 5$ resp. gesetzt:

$$[12]^{(s)},\ [5]^{(s)},\ [0]^{(s)},\ [34]^{(s)}\,.$$

Es möge dann F_1 in F_2 übergehen und wir erhalten:

$$4^4 \cdot F_2 = \sum (-1)^{\frac{g_1^{(1)\prime\prime}}{2} + \frac{g_1^{(3)\prime\prime}}{4} - \frac{g_1^{(5)\prime\prime}}{20}} \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau))\,.$$

Wir denken uns ferner in F_1 an Stelle von:

$$[5]^{(s)},\ [12]^{(s)},\ [34]^{(s)},\ [0]^{(s)}$$

für $s = 2, 3, 4, 5$ resp. gesetzt:

$$[34]^{(s)},\ [0]^{(s)},\ [5]^{(s)},\ [12]^{(s)}$$

und nehmen an, dass F_1 übergehe in F_3. Dann wird:

$$4^4 \cdot F_3 = \sum (-1)^{\frac{g_2^{(1)\prime\prime}}{2} + \frac{g_2^{(3)\prime\prime}}{4} - \frac{g_2^{(5)\prime\prime}}{20}} \Pi \vartheta_5 \left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau))\,.$$

Endlich denken wir uns in F_4 an Stelle von:

$$[5]^{(s)},\ [12]^{(s)},\ [34]^{(s)},\ [0]^{(s)}$$

für $s = 2, 3, 4, 5$ resp. gesetzt:

$$[0]^{(s)},\ [34]^{(s)},\ [12]^{(s)},\ [5]^{(s)},$$

dann gehe F_4 über in F_4 und wir erhalten:

$$4^4 \cdot F_4 = \sum (-1)^{\frac{g_1^{(1)\prime\prime}+g_2^{(1)\prime\prime}}{2}+\frac{g_1^{(3)\prime\prime}+g_2^{(3)\prime\prime}}{4}+\frac{g_1^{(5)\prime\prime}+g_2^{(5)\prime\prime}}{20}} \Pi \vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)\prime\prime}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)).$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$(8) \qquad 4^3 \cdot \mathfrak{F}_4 = \Sigma \Pi \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\ ((w^{(\varepsilon)},\ n_\varepsilon \tau))\ ,$$

wobei gesetzt ist:

$$(9) \qquad \mathfrak{F}_4 = F_4 + F_2 + F_3 + F_4$$

und die Grössen g den Congruenzen Genüge leisten:

$$(10) \qquad \begin{aligned} g_r^{(1)} &\equiv -\frac{g_r^{(5)}}{5} \bmod 2\ , \quad g_r^{(2)} \equiv -\frac{g_r^{(6)}}{5} \bmod 2\ , \\ g_r^{(3)} &\equiv -\frac{g_r^{(5)}}{5} \bmod 4\ , \quad g_r^{(4)} \equiv -\frac{g_r^{(6)}}{5} \bmod 4\ . \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Formel die Argumente gleich Null, so erhalten wir schon eine bedeutend einfachere Modulargleichung, als die ursprüngliche war, da ein grosser Theil der Irrationalitäten fortgefallen ist. Wir wollen aber noch einfachere Formen ableiten, wollen uns hierbei aber noch kürzer fassen.

Wir setzen erstens an Stelle von:

$$v_r^{(1)}\ ,\ v_r^{(3)}\ ,\ v_r^{(4)}\ ,\ v_r^{(6)} \text{ resp.:}$$

$$v_r^{(1)} + \frac{\tau_{4r}}{2}\ ,\ v_r^{(3)} + \frac{\tau_{4r}}{2}\ ,\ v_r^{(4)} - \frac{\tau_{4r}}{2}\ ,\ v_r^{(6)} + \frac{5\tau_{4r}}{2}$$

so geht $w_r^{(2)}$ über in $w_r^{(2)} + 2\tau_{4r}$. Nehmen wir an, dass bei dieser Substitution $\mathfrak{F}_4$ von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen in $\mathfrak{F}_2$ übergehe, so erhalten wir die Formel:

$$4^3 \cdot \mathfrak{F}_2 = \Sigma(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_1^{(4)}+\alpha_1^{(6)}} \Pi \vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\ ((w^{(\varepsilon)},\ n_\varepsilon \tau))\ .$$

Zweitens setzen wir an Stelle von:

$$v_r^{(1)}\ ,\quad v_r^{(2)}\ ,\quad v_r^{(4)}\ ,\quad v_r^{(6)}\ \text{resp.:}$$

$$v_r^{(1)}+\frac{\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(3)}+\frac{\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(4)}-\frac{\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(6)}+\frac{5\tau_{2r}}{2},$$

so geht $w_r^{(2)}$ über in $w_r^{(2)}+2\tau_{2r}$. Nehmen wir an, dass $\mathfrak{F}_1$ von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen übergehe in $\mathfrak{F}_3$, so wird:

$$4^3\cdot\mathfrak{F}_3=\Sigma(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_1^{(4)}+\alpha_1^{(6)}}\,\Pi\vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\,((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)).$$

Endlich setzen wir an Stelle von:

$$v_r^{(1)}\ ,\quad v_r^{(3)}\ ,\quad v_r^{(4)}\ ,\quad v_r^{(6)}\ \text{resp.:}$$

$$v_r^{(1)}+\frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(3)}+\frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(4)}-\frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2},\quad v_r^{(6)}+5\,\frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2},$$

dann geht $w_r^{(2)}$ über in $w_r^{(2)}+2(\tau_{1r}+\tau_{2r})$. Nehmen wir an, dass $\mathfrak{F}_1$ von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen übergehe in $\mathfrak{F}_4$, so erhalten wir die Formel:

$$4^3\cdot\mathfrak{F}_4=\Sigma E\cdot\Pi\vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\,((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)),$$

$$E=(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(3)}+\alpha_1^{(4)}+\alpha_2^{(4)}+\alpha_1^{(6)}+\alpha_2^{(6)}}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir aus den letzten vier Formeln die Relation;

$$4^3\cdot\mathfrak{F}_1'=\Sigma'\,\Pi\vartheta_5[g^{(\varepsilon)}]\,((w^{(\varepsilon)},n_\varepsilon\tau)), \tag{11}$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{F}_1'=\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2-\mathfrak{F}_3+\mathfrak{F}_4 \tag{12}$$

und der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über diejenigen α zu summiren ist, für welche:

$$\alpha_r^{(1)}+\alpha_r^{(3)}+\alpha_r^{(4)}+\alpha_r^{(6)},\quad r=1,2$$

ungerade Zahlen sind.

Setzen wir in dieser Formel die Argumente gleich Null, so ist wiederum eine Reihe von Irrationalitäten fortgefallen. Wir können nun schliesslich noch die folgenden Betrachtungen anstellen.

Wir setzen an Stelle von:

$$v_r^{(2)}\ ,\quad v_r^{(3)}\ ,\quad v_r^{(4)}\ ,\quad v_r^{(5)}\ \text{resp:}$$

$$v_r^{(2)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\quad v_r^{(3)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\quad v_r^{(4)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\quad v_r^{(5)}+\frac{5\tau_{1r}}{2},$$

so geht $w_r^{(1)}$ über in $w_r^{(1)}+2\tau_{1r}$.

Nehmen wir an, dass bei dieser Substitution $\mathfrak{F}_1'$ von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen übergehe in $\mathfrak{F}_2'$, so wird:

$$4^2 \cdot \mathfrak{F}_2' = \Sigma' (-1)^{\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(5)}} \Pi \vartheta_5 [g^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) .$$

Wir setzen zweitens an Stelle von:

$$v_r^{(2)} \quad , \quad v_r^{(3)} \quad , \quad v_r^{(4)} \quad , \quad v_r^{(5)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_r^{(2)} + \frac{\tau_{2r}}{2} , \quad v_r^{(3)} + \frac{\tau_{2r}}{2} , \quad v_r^{(4)} + \frac{\tau_{2r}}{2} , \quad v_r^{(5)} + \frac{5\tau_{2r}}{2} ,$$

so geht $w_r^{(1)}$ über in $w_r^{(1)} + 2\tau_{2r}$.

Nehmen wir an, dass $\mathfrak{F}_4'$ bei dieser Substitution von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen übergehe in $\mathfrak{F}_3'$, so wird:

$$4^2 \cdot \mathfrak{F}_3' = \Sigma' (-1)^{\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}+\alpha_2^{(4)}+\alpha_2^{(5)}} \Pi \vartheta_5 [g^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) .$$

Endlich setzen wir an Stelle von:

$$v_r^{(2)} \quad , \quad v_r^{(3)} \quad , \quad v_r^{(4)} \quad , \quad v_r^{(5)} \quad \text{resp.:}$$

$$v_r^{(2)} + \frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2}, \quad v_r^{(3)} + \frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2}, \quad v_r^{(4)} + \frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2}, \quad v_r^{(5)} + 5\frac{\tau_{1r}+\tau_{2r}}{2} .$$

Nehmen wir an, dass $\mathfrak{F}_1'$ bei dieser Substitution von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen übergehe in $\mathfrak{F}_4'$, so wird:

$$4^2 \cdot \mathfrak{F}_4' = \Sigma' \cdot E_4 \cdot \Pi \vartheta_5 [g^{(\varepsilon)}] ((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) ,$$

$$E_4 = (-1)^{\alpha_1^{(2)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(3)}+\alpha_1^{(4)}+\alpha_2^{(4)}+\alpha_1^{(5)}+\alpha_2^{(5)}} .$$

Aus den letzten vier Formeln ergiebt sich dann die gesuchte Schlussformel:

$$(13) \qquad 4 (\mathfrak{F}_1' - \mathfrak{F}_2' - \mathfrak{F}_3' + \mathfrak{F}_4') = \Sigma'' \Pi \vartheta_5 [g^{(\varepsilon)}] ((w)^{\varepsilon)}, n_\varepsilon \tau)) ,$$

wo nunmehr der doppelte Strich auf der rechten Seite bedeutet, dass auf der rechten Seite nur über diejenigen α zu summiren ist, für welche sowohl:

$$\alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(6)}$$

als auch:

$$\alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)} + \alpha_r^{(4)} + \alpha_r^{(5)}$$

ungerade sind.

Setzen wir jetzt die Argumente gleich Null, so erhalten wir eine elegante Modulargleichung. Die Zahl der Glieder auf der linken Seite ist eine grosse. dafür kommen aber auf derselben

nur die Moduln τ und 5τ vor, d. h. es sind links keine Irrationalitäten mehr enthalten. Auf der rechten Seite kommen zwar noch Irrationalitäten vor, indessen ist die Zahl der Glieder eine kleine. Von dem wirklichen Hinschreiben derselben kann füglich abgesehen werden.

Endlich wollen wir noch ein Additionstheorem zwischen Producten von acht Factoren kurz berühren.

Dasselbe lautet:

$$(14)\qquad \Pi\vartheta_5((v^{(\varepsilon)}, m_\varepsilon\tau)) = \sum\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\varepsilon)}}{2}\right]((w^{(\varepsilon)}, n_\varepsilon\tau)),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 5,$$
$$n_1 = n_2 = 2, \quad n_3 = n_4 = 4, \quad n_5 = n_6 = 10, \quad n_7 = n_8 = 20.$$

Die Grössen w und g sind aus dem Schema bestimmt:

0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	−1	0	1	0	0
0	2	−1	−1	0	0	−1	−1
2	0	−1	1	0	0	1	−1
5	0	0	0	0	−1	−1	1
0	5	0	0	−1	0	1	1
0	0	−5	−5	2	0	1	1
0	0	−5	5	0	2	−1	1.

Die Congruenzen für die Grössen g können durch die folgenden ersetzt werden, die nicht alle von einander unabhängig sind:

$$g_r^{(3)} \equiv -\left(g_r^{(1)} + \frac{g_r^{(6)}}{5}\right) \bmod 4, \quad g_r^{(4)} \equiv -\left(g_r^{(2)} + \frac{g_r^{(5)}}{5}\right) \bmod 4,$$

$$\frac{g_r^{(7)}}{5} \equiv -g_r^{(1)} + \frac{g_r^{(6)}}{5} \bmod 4, \quad \frac{g_r^{(8)}}{5} \equiv -g_r^{(2)} + \frac{g_r^{(5)}}{5} \bmod 4,$$

$$(15)\qquad 2g_r^{(1)} + 2g_r^{(2)} - g_r^{(3)} - g_r^{(4)} - \frac{g_r^{(7)}}{5} - \frac{g_r^{(8)}}{5} \equiv 0 \bmod 8,$$

$$2g_r^{(1)} - 2g_r^{(2)} - g_r^{(3)} + g_r^{(4)} - \frac{g_r^{(7)}}{5} + \frac{g_r^{(8)}}{5} \equiv 0 \bmod 8,$$

$$-g_r^{(3)} + g_r^{(4)} - \frac{2g_r^{(5)}}{5} + \frac{2g_r^{(6)}}{5} + \frac{g_r^{(7)}}{5} - \frac{g_r^{(8)}}{5} \equiv 0 \bmod 8,$$

$$-g_r^{(3)} - g_r^{(4)} + \frac{2g_r^{(5)}}{5} + \frac{2g_r^{(6)}}{5} + \frac{g_r^{(7)}}{5} + \frac{g_r^{(8)}}{5} \equiv 0 \bmod 8.$$

Durch Substitution halber reeller Perioden kann es nun ähnlich wie früher dahin gebracht werden, dass die Grössen g auf der rechten Seite alle gerade Zahlen sind. Damit ist die Zahl der Irrationalitäten auf der rechten Seite bedeutend verkleinert. Die Substitutionen sind:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && v_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(3)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(4)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(5)}+\tfrac{5}{2},\\
&\text{II.} && v_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(3)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(6)}-\tfrac{1}{2}, && v_1^{(6)}+\tfrac{5}{2},\\
&\text{III.} && v_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(3)}-\tfrac{1}{2}, && v_1^{(8)}-\tfrac{5}{2},\\
&\text{IV.} && v_1^{(1)}-\tfrac{1}{2}, && v_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}, && v_1^{(4)}-\tfrac{1}{2}, && v_1^{(7)}-\tfrac{5}{2},
\end{aligned}$$

und die mit ihnen zusammenhängenden acht weiteren. Bei denselben tritt resp.

I. an Stelle von $w_1^{(1)}$: $w_1^{(1)}+2$,

II. an Stelle von $w_1^{(2)}$: $w_1^{(2)}+2$,

III. an Stelle von $w_1^{(3)}$, $w_1^{(4)}$: $w_1^{(3)}+2$, $w_1^{(4)}+2$,

IV. an Stelle von $w_1^{(3)}$, $w_1^{(4)}$: $w_1^{(3)}+2$, $w_1^{(4)}-2$.

Endlich kann die Zahl der Irrationalitäten noch weiter bedeutend verringert werden, wenn wir die Substitutionen anwenden:

$$\text{V.}\quad v_r^{(1)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(6)}+3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(7)}+3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(8)}-3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},$$

$$\text{VI.}\quad v_r^{(2)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(5)}+3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(7)}-3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(8)}-3\cdot\frac{5\tau_{1r}}{2},$$

$$\text{VII.}\quad v_r^{(2)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(3)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(4)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(5)}+\frac{5\tau_{1r}}{2},$$

$$\text{VIII.}\quad v_r^{(1)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(3)}+\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(4)}-\frac{\tau_{1r}}{2},\ v_r^{(6)}+\frac{5\tau_{1r}}{2},$$

nebst den acht weiteren mit ihnen zusammenhängenden.

Damit sind wir auch hier am Ziel.

G. Scheffers, *Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen.* (Erste Abhandlung.) Vorgelegt v. d. o. M. Sophus Lie.

In zwei der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegten Noten[1]) hatte ich in knappester Form eine Verallgemeinerung der Grundlagen der Theorie der Functionen gewöhnlicher complexer Grössen skizzirt. Gegenwärtig beabsichtige ich, diese Betrachtungen ausführlicher und mit den damals nur angedeuteten oder auch ganz unterdrückten Beweisen zu entwickeln.

In dieser ersten Abhandlung gehe ich noch nicht ein auf die Beziehungen, in denen diese Untersuchungen zu gewissen allgemeinen Theorien stehen. Ich beschränke mich vielmehr auf die Herstellung der Grundlagen zur Verallgemeinerung der Functionentheorie. In einer zweiten Abhandlung aber, in der ich Anwendungen vorführen werde, sollen die hierzu in enger Beziehung stehenden *gruppentheoretischen* Gesichtspunkte eine eingehende Behandlung erfahren.

Als Ausgangspunkt dient der Begriff eines allgemeinen complexen Zahlensystems, dessen wenigstens oberflächliche Kenntnis ich beim Leser voraussetzen muss[2]). Zunächst mache ich nur die geringsten Voraussetzungen in betreff eines solchen Systems. Von der Multiplication verlange ich nur, dass sie im

1) Sur la généralisation des fonctions analytiques, sowie: Théorèmes relatifs aux fonctions analytiques à n dimensions. Comptes Rendus T. 116 (1893), S. 1114 bez. 1242.

2) Zur Orientirung über den Begriff des Zahlensystems verweise ich auf § 1 meiner Abhandlung: *Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen*, Math. Ann. Bd. 39 (1891), S. 293.

allgemeinen umkehrbar sowie dass sie mit der Addition distributiv verknüpft sei. Letzteres kommt darauf hinaus, dass die allgemeine Zahl des Systems linear aus einer Anzahl Einheiten $e_1 \dots e_n$ ableitbar und die Multiplication definirt ist, sobald man die Producte dieser Einheiten kennt.

Im Laufe der Untersuchung werden wir zu weiteren Beschränkungen geführt. Die Forderung der Differenzierbarkeit der zu betrachtenden Functionen führt zum commutativen, alsdann die der Integrirbarkeit zum associativen Gesetz der Multiplication. Es ist interessant zu sehen, dass diese beiden Gesetze mit Nothwendigkeit aus den Forderungen hervorgehen, die man zur Ermöglichung einer Verallgemeinerung der Functionentheorie zu stellen hat.

§ 1.

Differentialquotienten.

Wie in der Einleitung bemerkt wurde, gehen wir *zunächst* von einem Zahlensystem $(e_1 \dots e_n)$ aus, in dem wir für die Multiplication als wesentlich ausser ihrer Umkehrbarkeit nur das *Gesetz der Distribution* voraussetzen, durch das die Multiplication an die Addition geknüpft ist. Alsdann ist jedes Product völlig definirt, sobald die Producte der n Einheiten als Zahlen des Systemes gegeben werden. Setzen wir daher etwa:

$$(1) \qquad e_i e_k = \sum_1^n{}_s \gamma_{iks} e_s \quad (i, k = 1, 2 \cdots n).$$

Die Constanten γ_{iks} seien irgendwie gewählte *gewöhnlich complexe* Grössen. Durch ihre Wahl ist das Zahlensystem völlig definirt. Die allgemeine Productregel für zwei Zahlen

$$x \equiv \sum_1^n{}_i x_i e_i, \quad y \equiv \sum_1^n{}_k y_k e_k$$

lautet nämlich dann infolge des Gesetzes der Distribution:

$$(1') \qquad xy \equiv \sum_{i,k,s}^{1\dots n} \gamma_{iks} x_i y_k e_s.$$

Wir wollen, wie gesagt, noch voraussetzen, dass die Umkehrung der Multiplication im allgemeinen ausführbar sei, was darauf hinauskommt, dass die beiden Determinanten

$$\Delta_x \equiv \left| \sum_1^n{}^i \gamma_{iks}\, x_i \right|, \quad \Delta_x' \equiv \left| \sum_1^n{}^k \gamma_{iks}\, x_k \right|$$

nicht identisch Null sein sollen.

Es seien nun

$$f_1(x_1 \cdots x_n), \quad f_2(x_1 \cdots x_n), \quad \cdots f_n(x_1 \cdots x_n)$$

analytische Functionen von $x_1 \ldots x_n$ wenigstens in der Umgebung eines Werthsystems $(x_1^0 \ldots x_n^0)$, und zwar Functionen im gewöhnlich complexen Zahlengebiet. Betrachten wir dann den Ausdruck

$$f \equiv f_1 e_1 + f_2 e_2 + \cdots + f_n e_n .$$

Für jedes Werthsystem $(x_1 \ldots x_n)$ in der Umgebung der Stelle $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ stellt er eine gewisse Zahl unseres Zahlensystems dar, ebenso wie

$$x \equiv x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

selbst. Es ist also f eine mit x veränderliche Zahl des Systems. Solange man keine weiteren Einschränkungen macht, hat diese Abhängigkeit kein besonderes Interesse: Sie ist nur eine andere Ausdrucksweise für die Abhängigkeit der n Functionen $f_1 \ldots f_n$ von den n gewöhnlich complexen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$.

Wir wollen aber, wie es Cauchy für die gewöhnlich complexen Functionen gethan hat, insbesondere untersuchen, wann dieser Ausdruck f einen von $dx_1 \ldots dx_n$ unabhängigen Differentialquotienten nach x besitzt. Es muss dies genauer erörtert werden:

Aendert sich die Zahl x des Systems um

$$dx \equiv dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + \cdots + dx_n e_n ,$$

wobei $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ gewöhnlich complexe unendlich kleine Zahlen vorstellen, so ändern sich auch $f_1 \cdots f_n$, da allgemein x_k um dx_k wächst. Es ändert sich also auch f und zwar um

$$(2) \qquad df \equiv \sum_{i,k}^{1 \ldots n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, dx_k\, e_i .$$

Es sind df und dx unendlich kleine Zahlen des Zahlensystems $(e_1 \ldots e_n)$. Bilden wir ihren Quotienten, so stehen uns zwei Wege offen. Denn die Division ist ja die Umkehrung der Multiplication und hat, da letztere das commutative Gesetz $ab = ba$ im Allgemeinen nicht erfüllen wird, zweierlei Sinn. Wenn wir

die beiden Quotienten mit f' und $'f$ bezeichnen, so haben wir sie zu definiren durch die beiden Forderungen:

$$(3) \qquad df = f' \cdot dx\,, \qquad df = dx \cdot 'f\,.$$

Es fragt sich also, ob bezw. unter welchen besonderen Voraussetzungen diesen Forderungen durch zwei von $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$ völlig unabhängige Zahlen f' und $'f$ des Systems genügt werden kann. Diese Zahlen werden wir, wenn sie existiren, *die beiden Differentialquotienten von f nach x* nennen. Sie werden sich, wenn sie existiren, ebenso wie f selbst mit x ändern. Ja, wir wollen noch mehr verlangen: Wir wünschen, *dass insbesondere solche Ausdrücke f vorhanden seien, dass sie Differentialquotienten f' und $'f$ besitzen, die, wenn x alle Werthe in der Umgebung der Stelle $x_1^0 e_1 + \cdots + x_n^0 e_n$ durchläuft, ebenfalls alle Werthe in der Umgebung gewisser Stellen im Zahlensystem durchlaufen.* Diese Stellen seien im Folgenden mit $u^0 \equiv u_1^0 e_1 + \cdots + u_n^0 e_n$ und $v^0 \equiv v_1^0 e_1 + \cdots + v_n^0 e_n$ bezeichnet. Es sollen also u^0 und v^0 die Werthe von f' und $'f$ für $x = x^0$ sein.

Um unsere Forderungen von den unendlich kleinen Grössen zu befreien, wollen wir eine unendlich kleine gewöhnlich complexe Zahl dt einführen und

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{dt} = y_i \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$

setzen. $y_1 \ldots y_n$ sind dann als ganz beliebige gewöhnlich complexe Veränderliche aufzufassen, die von $x_1 \ldots x_n$ völlig unabhängig sind. Die fraglichen Differentialquotienten f' und $'f$ müssen nach (3) die Relation erfüllen

$$f' \cdot dx = dx \cdot 'f\,,$$

die sich nach (4) auch so schreiben lässt:

$$(5) \qquad f' \cdot y = y \cdot 'f\,,$$

wenn unter y natürlich $y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ verstanden wird. Diese Gleichung (5) ist von unendlich kleinen Grössen ganz frei, und y ist darin völlig willkürlich. Die fragliche Grösse f' soll, wie gesagt wurde, alle Werthe u in der Umgebung von u^0 und $'f$ alle Werthe v in der Umgebung von v^0 annehmen können.

Die Gleichung (5) lehrt also:

Das Zahlensystem muss so beschaffen sein, dass zu jeder

Zahl u des Systems innerhalb der Umgebung einer gewissen Zahl u^0 eine zweite Zahl v des Systems innerhalb der Umgebung einer gewissen Zahl v^0 existirt, dass stets

$$uy = yv$$

ist, *wie auch die Zahl y des Systems gewählt sein mag.* Dasselbe muss umgekehrt gelten, deutlicher ausgedrückt: wir hätten auch von einer beliebigen Zahl v in der Umgebung von v^0 anstatt von u ausgehen können.

Wir behaupten, dass, wenn diese Forderungen erfüllt sind, sie auch dann erfüllt sind, wenn u (oder v) nicht nur in der Umgebung von u^0 (oder v^0), sondern irgendwie im Zahlensystem gewählt wird. Wäre nämlich die soeben formulirte Forderung erfüllt und wäre U eine beliebige Zahl des Systems, so läge die Zahl

$$u = \frac{1}{\lambda} U + u^0 ,$$

sobald λ als hinreichend grosse positive Zahl gewählt wird, in der Umgebung von u^0. Zu ihr existirte also eine Zahl v, sodass für alle Werthe von y

$$uy = yv$$

wäre. Setzt man dann noch

$$V = \lambda(v - v^0)$$

oder also

$$v = \frac{1}{\lambda} V + v^0 ,$$

so liesse sich $uy = yv$ auch so schreiben:

$$\frac{1}{\lambda} Uy + u^0 y = \frac{1}{\lambda} yV + yv^0 .$$

Es wäre aber insbesondere auch

$$u^0 y = yv^0 ,$$

sodass käme:

$$Uy = yV .$$

Hierin aber ist U ganz beliebig, d. h. nicht an die Umgebung von u^0 gebunden.

Wir haben somit zu fordern, sobald die Existenz von Differentialquotienten überhaupt denkbar sein soll:

Es muss zu jeder Zahl u des Systems eine Zahl v und umgekehrt zu jeder Zahl v des Systems eine Zahl u vorhanden sein, derart dass stets

$$uy = yv \tag{6}$$

ist, wie auch die Zahl y des Systems gewählt sei.

Durch diese Forderung wird der bisher noch ganz willkürlichen und nur dem distributiven Gesetze unterworfene Multiplication im System eine Bedingung auferlegt. Es ist dies Gesetz (6) weder das commutative noch das associative. Am meisten ähnelt es dem commutativen, es verlangt aber nicht soviel wie dieses. Man könnte es als eine *Hälfte* des commutativen Gesetzes $uy = yu$ bezeichnen, das ja durch die *beiden* Formeln $uy = yv$, $v = u$ ausdrückbar ist.

Wenn *umgekehrt* das Gesetz (6) erfüllt ist, so giebt es auch Ausdrücke $f \equiv f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$, die Differentialquotienten f' und $'f$ nach x besitzen, welche von der Form des Incrementes von x völlig unabhängig sind und in der Umgebung gewisser Zahlen völlig variiren, während x variirt. Um dies zu zeigen, bedarf es nur eines Beispiels: Wir stellen einen Ausdruck f her, indem wir x mit sich selbst multiplicieren:

$$f = xx \equiv \sum_{i,k,s}^{1\ldots n} \gamma_{iks} x_i x_k e_s .$$

Hier ist

$$df = \sum_{i,k,s}^{1\ldots n} \gamma_{iks} (x_i \cdot dx_k + x_k \cdot dx_i) e_s .$$

Dies kann offenbar so geschrieben werden:

$$df = x \cdot dx + dx \cdot x . \tag{7}$$

Nach (6) giebt es nun eine Zahl ξ im System, sodass für jedes y:

$$\xi y = yx \tag{8}$$

ist, ebenso eine Zahl η, sodass stets

$$xy = y\eta \tag{9}$$

ist, und zwar durchlaufen ξ und η das ganze Zahlensystem, wenn es von x völlig durchlaufen wird.

Setzen wir nun

$$f' = x + \xi , \quad 'f = x + \eta ,$$

so ist:

$$f' \cdot dx = x \cdot dx + \xi \cdot dx, \quad dx \cdot 'f = dx \cdot x + dx \cdot \eta .$$

Nach (8) und (9) ist aber, wenn wir darin statt des ganz beliebigen y insbesondere dx setzen:

$$\xi \cdot dx = dx \cdot x, \quad x \cdot dx = dx \cdot \eta ,$$

sodass kommt:

$$f' \cdot dx = x \cdot dx + dx \cdot x, \quad dx \cdot 'f = dx \cdot x + x \cdot dx .$$

Beide Werte stimmen mit obigem Werte (7) von df überein. Also sind $x + \xi$ und $x + \eta$ in der That die Differentialquotienten von xx oder x^2 nach x.

Satz 1: *Ein Zahlensystem* $(e_1 \dots e_n)$, *in dem die Multiplication nur dem distributiven Gesetz unterworfen ist und die Division im allgemeinen bestimmt definirt ist, lässt dann und nur dann Functionen* $f_1(x_1 \cdots x_n)\, e_1 + \cdots + f_n(x_1 \cdots x_n)\, e_n$ *zu mit solchen Differentialquotienten nach* x, *die von der Art des Incrementes von* x *unabhängig sind, sobald zu jeder Zahl* u *des Systems eine Zahl* v *und umgekehrt zu jeder Zahl* v *des Systems eine Zahl* u *so zugeordnet werden kann, dass stets*

$$uy = yv$$

ist, wie auch die Zahl y *des Systems gewählt sein mag.*

Wir nennen diese Functionen f alsdann *analytische Functionen* von $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

§ 2.

Folgerungen aus der Existenz des Moduls.

Bisher haben wir nur vorausgesetzt, die Multiplication sei distributiv mit der Addition verknüpft und die Determinanten Δ_x und Δ_x' seien nicht identisch Null. Letztere Voraussetzung ist deshalb nöthig, weil sonst die Division entweder unausführbar oder aber unendlich vieldeutig wird.

Sobald man auch das Bestehen des associativen Gesetzes für die Multiplication voraussetzt, folgt bekanntlich [1]) aus $\Delta_x \not\equiv 0$

1) Vgl. meine Note: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*, diese Berichte 1889, S. 293.

und $\Delta_x' \not\equiv 0$, dass im System ein *Modul* ε vorhanden ist, d. h. eine Zahl, für die stets

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x$$

ist. Dies folgt aber nicht, sobald die Association, wie hier, nicht von vornherein angenommen wird. Aber aus der Existenz des Moduls folgt ohne Mühe umgekehrt, dass Δ_x und Δ_x' nicht identisch Null sein können.

Es ist also eine besondere Annahme, die ausdrücklich zu machen ist, wenn wir von jetzt ab voraussetzen, *unser Zahlensystem enthalte einen Modul* ε. Man sieht dann leicht ein, dass es nur einen enthalten kann.

Wenn nun dass in Satz 1 ausgesprochene Gesetz besteht:

$$uy = yv,$$

und zwar wie dort für alle y, so muss es auch für $y = \varepsilon$ insbesondere gelten. Dies giebt aber $u = v$. Also lautet dann das Gesetz:

$$uy = yu,$$

d. h. das Zahlensystem ist *commutativ*. Es ist also, anders ausgedrückt, allgemein:

$$\gamma_{iks} = \gamma_{kis}.$$

Satz 2: *Ein Zahlensystem* $(e_1 \dots e_n)$, *in dem die Multiplication nur dem distributiven Gesetz unterworfen ist und das überdies einen Modul besitzt, lässt dann und nur dann Functionen* $f_1(x_1 \dots x_n)\, e_1 + \cdots + f_n(x_1 \dots x_n)\, e_n$ *zu mit solchen Differentialquotienten nach* x, *die von der Art des Incrementes von* x *unabhängig sind, sobald die Multiplication auch commutativ ist.*

Die Formel (5) lehrt, dass dann

$$f' = {}'f$$

ist, also die Function nur einen Differentialquotienten hat.

Um zu weiteren Ergebnissen zu gelangen, sei an einige Formeln erinnert: Aus

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x$$

folgt, wenn

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$$

gesetzt wird, nach (1′) sofort:

$$(10) \qquad \sum_1^n{}_k \gamma_{iks}\varepsilon_k = \varepsilon_{is}, \quad \sum_1^n{}_i \gamma_{iks}\varepsilon_i = \varepsilon_{ks}.$$

Hierin bedeutet $\varepsilon_{\alpha\beta}$ die Zahl 1 oder 0, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ ist. Wir werden diese Formeln öfters benutzen.

Angenommen, es sei

$$f \equiv f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$$

eine analytische Function und

$$f' \equiv f_1' e_1 + \cdots + f_n' e_n$$

ihr Differentialquotient. Die Accente sind dabei nur symbolisch zu verstehen, nicht als gewöhnliche Differentiationszeichen. Es ist dann

$$df = f' \cdot dx$$

oder:

$$(11) \qquad \sum_{s,k}^{1\ldots n} \frac{\partial f_s}{\partial x_k} dx_k e_s = \sum_{i,k}^{1\ldots n} f_i' dx_k e_i e_k$$

oder nach (1):

$$(12) \qquad \sum_{s,k}^{1\ldots n} \frac{\partial f_s}{\partial x_k} dx_k e_s = \sum_{i,k,s}^{1\ldots n} f_i' dx_k \gamma_{iks} e_s .$$

Hierin müssen die Coefficienten von $dx_k e_s$ rechts und links übereinstimmen. Es kommt somit:

$$(13) \qquad \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = \sum_1^n{}_i \gamma_{iks} f_i' \quad (s, k = 1, 2 \ldots n).$$

Hieraus können wir Bedingungen ableiten, die nur die f, nicht die f' enthalten. Multipliciren wir nämlich mit ε_k und summiren wir dann über k, so kommt nach (10):

$$\sum_1^n{}_k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \varepsilon_k = f_s'$$

oder auch:

$$(14) \qquad f_i' = \sum_1^n{}_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \varepsilon_j \quad (i = 1, 2 \ldots n) .$$

Setzen wir diesen Werth in (13) ein, so folgt:

$$(15) \qquad \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = \sum_{i,j}^{1\ldots n} \gamma_{iks} \varepsilon_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (s, k = 1, 2 \ldots n) .$$

Dies sind n^3 partielle Differentialgleichungen für die n Functionen $f_1 \ldots f_n$ innerhalb des gewöhnlich complexen Zahlengebietes.

Stellen wir uns vor, es seien n Functionen $f_1(x_1 \dots x_n) \dots f_n(x_1 \dots x_n)$ von $x_1 \dots x_n$ im gewöhnlich complexen Zahlengebiet vorgelegt, die den Bedingungen (15) genügen. Wir können dann durch (14) die n Functionen $f_1'(x_1 \dots x_n) \dots f_n'(x_1 \dots x_n)$ definiren. Man sieht alsdann leicht ein, dass sie den Relationen (13) genügen. Denn setzen wir sie in (13) ein, so ergiebt sich genau (15). Daraus folgt dann rückwärts die Formel (12), ebenso (11), sodass sich ergiebt, dass $f_1 e_1 + \dots + f_n e_n$ eine analytische Function mit dem Differentialquotienten $f_1' e_1 + \dots + f_n' e_n$ ist.

Satz 3: *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in dem Zahlensystem $(e_1 \dots e_n)$, dessen Multiplication nur dem distributiven und commutativen Gesetze folgt und einen Modul $\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_n e_n$ besitzt, die Function $f \equiv f_1(x_1 \dots x_n) + \dots + f_n(x_1 \dots x_n) e_n$ analytisch sei, sind diese:*

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_k} = \sum_{i,j}^{1 \dots n} \gamma_{iks}\, \varepsilon_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (s, k = 1, 2 \dots n).$$

Alsdann ist der Differentialquotient f' durch die Formeln (14) definirt. Es lässt sich leicht zeigen, dass auch f' eine analytische Function sein wird. Denn aus (13) folgt durch Differentiation nach x_j:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{1}^{n} {}_i\, \gamma_{iks} \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} \quad (k, j, s = 1, 2 \dots n).$$

Aber wegen der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial x_k}$$

folgt ferner:

$$(16) \qquad \sum_{1}^{n} {}_i\, \gamma_{iks} \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} = \sum_{1}^{n} {}_i\, \gamma_{ijs} \frac{\partial f_i'}{\partial x_k} \quad (s, k, j = 1, 2 \dots n).$$

Multipliciren wir mit ε_j, und summiren wir dann über j, so kommt nach (10):

$$(17) \qquad \sum_{i,j}^{1 \dots n} \gamma_{iks}\, \varepsilon_j \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial f_s'}{\partial x_k} \quad (s, k = 1, 2 \dots n).$$

Diese Formel zeigt, dass $f_1' \dots f_n'$ ebenfalls den Bedingungen (15) für analytische Functionen genügen.

Satz 4: *Der Differentialquotient einer analytischen Function ist wieder eine analytische Function.*

Wir können daher auch vom zweiten, dritten u. s. w. Differentialquotienten sprechen.

Die Gleichungen (13) würden, wenn $f_1' \dots f_n'$ gegeben wären, $f_1 \dots f_n$ bis auf additive Constanten bestimmen. Also folgt:

Satz 5: *Haben zwei analytische Functionen denselben Differentialquotienten, so ist ihre Differenz eine constante Zahl des Zahlensystems.*

§ 3.

Integrale.

Wir legen uns nunmehr eine wichtige Frage vor, die uns zu einer weiteren Einschränkung des Zahlensystems veranlassen wird:

Nehmen wir an, es sei

$$f' \equiv f_1' e_1 + \cdots + f_n' e_n$$

eine *gegebene* analytische Function, d. h. sie erfülle die Bedingungen (17), so können wir uns fragen, ob es eine analytische Function

$$f \equiv f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$$

giebt, deren Differentialquotient f' ist.

Zunächst betrachten wir ein schon früher benutztes Beispiel, indem wir setzen:

$$f' = x \cdot x \equiv \sum_{i,k,s}^{1\dots n} \gamma_{iks} x_i x_k e_s ,$$

also

$$f_s' = \sum_{i,k}^{1\dots n} \gamma_{iks} x_i x_k .$$

Dass f' eine analytische Function ist, haben wir schon in § 1 gesehen. Setzen wir die Werthe der f' in (13) ein, so kommt:

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_k} = \sum_{i,j,l}^{1\dots n} \gamma_{iks} \gamma_{jli} x_j x_l ,$$

sodass

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{i,j}^{1\dots n} (\gamma_{iks} \gamma_{jli} + \gamma_{iks} \gamma_{lji}) x_i$$

wird. Wegen der Commutativität ist eber $\gamma_{ijs} = \gamma_{jis}$. Also kommt:

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_k \partial x_l} = 2\sum_{i,j}^{1\ldots n} \gamma_{iks}\gamma_{jli} x_j .$$

Die linke Seite bleibt ungeändert, wenn k mit l vertauscht wird. Dasselbe muss mit der rechten der Fall sein. Hieraus folgen die Bedingungen:

$$\sum_{1}^{n} \gamma_{iks}\gamma_{jli} = \sum_{1}^{n} \gamma_{ils}\gamma_{jki} . \tag{18}$$

Diese Bedingungen (18) sind also nothwendig. Aber sie sind auch hinreichend dafür, dass n Functionen $f_1 \ldots f_n$ existiren, die durch (13) mit $f_1' \ldots f_n'$ verknüpft sind, sobald $f_1' \ldots f_n'$ die Bedingungen (17) erfüllen, welche aussagen, dass $f_1' e_1 + \cdots + f_n' e_n$ eine analytische Function ist. In der That, die Integrabilitätsbedingungen des Systems (13), aufgefasst als Differentialgleichungen für $f_1 \ldots f_n$, haben wir oben in der Form (16) erhalten. Diese Gleichungen (16) sind aber nunmehr eine Folge von (17). Denn wenn wir (17) zunächst, indem wir die Indices anders wählen, so schreiben:

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1\ldots n} \gamma_{\alpha ji}\, \varepsilon_\beta \frac{\partial f_\alpha'}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} ,$$

alsdann mit γ_{iks} multipliciren und über i summiren, so kommt:

$$\sum_{\alpha,\beta,i}^{1\ldots n} \gamma_{iks}\gamma_{\alpha ji}\, \varepsilon_\beta \frac{\partial f_\alpha'}{\partial x_\beta} = \sum_{1}^{n} \gamma_{iks} \frac{\partial f_i'}{\partial x_j} .$$

Ganz ebenso hätten wir erhalten können, wie durch Vertauschung von k mit j hervorgeht:

$$\sum_{\alpha,\beta,i}^{1\ldots n} \gamma_{ijs}\gamma_{\alpha ki}\, \varepsilon_\beta \frac{\partial f_\alpha'}{\partial x_\beta} = \sum_{1}^{n} \gamma_{ijs} \frac{\partial f_i'}{\partial x_k} .$$

Nach (18) aber ist:

$$\sum_{1}^{n} \gamma_{iks}\gamma_{\alpha ji} = \sum_{1}^{n} \gamma_{ijs}\gamma_{\alpha ki} .$$

Folglich stimmen die linken Seiten der beiden letzten Relationen überein, daher auch die rechten, d. h. es bestehen die Relationen (16) als Folge von (17).

Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür also, dass jede analytische Function f' Differentialquotient einer analytischen Function wird, ist das Bestehen der Relationen (18).

Diese Relationen (18) haben eine einfache Bedeutung. Wenn nämlich verlangt wird, dass im Zahlensystem das *associative* Gesetz der Multiplication bestehe:

$$(xy)z = x(yz),$$

so führt dies bekanntlich[1]) zu den Relationen:

$$\sum_1^n{}^i \gamma_{iks}\gamma_{ljt} = \sum_1^n{}^i \gamma_{lis}\gamma_{jkt},$$

die sich auf (18) reduciren, da wegen der Commutativität γ_{ljt} durch γ_{jlt} und γ_{lis} durch γ_{ils} ersetzt werden darf. Umgekehrt folgt aus (18) und der Commutativität auch die Associativität der Multiplication.

Wir heben hervor, dass wir, sobald die Relationen (18) bestehen, die unsymmetrischen Bedingungsgleichungen, die wir unter (15) für analytische Functionen erhielten, analog (16) in der symmetrischeren Weise schreiben dürfen:

$$(19) \qquad \sum_1^n{}^i \gamma_{iks}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_1^n{}^i \gamma_{ijs}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad (s,k,j = 1,2\ldots n).$$

Wir fassen die letzten Ergebnisse so zusammen:

Satz 6: *Jede analytische Function ist der Differentialquotient einer analytischen Function dann und nur dann, wenn im Zahlensystem, das einen Modul besitzt, ausser dem distributiven und dem commutativen auch das associative Gesetz der Multiplication erfüllt ist.*

Die analytische Function f, deren Differentialquotient eine gegebene analytische Function f' ist, nennen wir ein *Integral* von f'. Nach Satz 5 unterscheiden sich die Integrale einer Function nur um constante Zahlen des Systems. Ist f eine analytische Function von x im System, so bezeichnen wir sie künftig symbolisch mit $f(x)$. Ebenso soll $\int f'(x)dx$ eine analytische Function $f(x)$ vorstellen, deren Differentialquotient $f'(x)$ ist.

---

[1]) Vgl. die in der zweiten Fussnote genannte Abhandlung.

In allem Folgenden wollen wir nun voraussetzen, *dass in dem zu Grunde gelegten Zahlensystem ein Modul existiere, sowie das distributative, commutative und associative Gesetz der Multiplication erfüllt sei.* Diese Voraussetzung sprechen wir hier ein für alle Mal aus.

§ 4.

Einige Hülfssätze.

Um spätere Ergebnisse glatt ableiten zu können, schicken wir einige Hülfssätze in diesem Paragraphen voraus.

Satz 7: *Sind u und v analytische Functionen von x, so ist auch das Product $w = uv$ eine solche.*

Denn sind u', v' die Differentialquotienten von u, v, so ist:

$$dw = u\,dv + v\,du,$$

$$du = u'\,dx, \quad dv = v'\,dx,$$

daher

$$dw = (uv' + vu')\,dx,$$

also $uv' + vu'$ der Differentialquotient von w. Der Beweis ist also genau so wie in der elementaren Differentialrechnung. Es liegt dies darin, dass im System alle gewöhnlichen Rechengesetze erfüllt sind. Wir sprechen noch einen zweiten Satz aus, der sich ganz analog darthun lässt:

Satz 8: *Sind u, v analytische Functionen von x, so ist auch ihr Quotient $\frac{u}{v}$ eine solche.*

Aus Satz 7 folgt, dass x^2, also auch x^3, x^4 ... allgemein x^m eine analytische Function von x ist. Dies werden wir nachher benutzen.

Satz 9: *Bleibt die analytische Function $f(x)$ ungeändert, wenn man x durch ϱx ersetzt, welche gewöhnlich complexe Zahl auch ϱ sein mag, so ist $f(x)$ constant.*

Bedenken wir nämlich, dass $f(x) \equiv f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ die Relationen (19) erfüllt, und multipliciren wir diese mit x_k, worauf wir über k summiren, so kommt zunächst

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} \gamma_{iks}\, x_k \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{i,k}^{1\ldots n} \gamma_{ijs}\, x_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Es ist aber

$$\sum_1^n{}_k\, x_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0\,,$$

da $f_1 \dots f_n$ sich nicht ändern, wenn $x_1 \dots x_n$ mit ϱ multiplicirt werden. Also bleibt:

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} \gamma_{iks} x_k \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0\,.$$

Die linke Seite hierin ist der Coefficient von e_s im Product von x mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} e_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_j} e_n\,.$$

Da dies Product Null ist, während x eine allgemeine Zahl des Systems bedeutet, so muss der zuletzt geschriebene Ausdruck auch Null sein. Es ist also jedes

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0\,.$$

Die Functionen $f_1 \dots f_n$ sind mithin in der That Constanten.

Legen wir uns nun einen Ausdruck von der Form vor:

$$u \equiv u_1 e_1 + \dots + u_n e_n\,,$$

dessen Coefficienten $u_1 \dots u_n$ *homogene Functionen r^{ten} Grades* von $x_1 \dots x_n$ im gewöhnlich complexen Zahlengebiete vorstellen sollen, so wollen wir uns fragen, unter welchen Bedingungen u eine analytische Function von x ist. Wäre u eine analytische Function von x, so wäre nach Satz 8 auch

$$\frac{u}{x^r}$$

eine solche. Da die Coefficienten von x^r homogene ganze Functionen r^{ten} Grades von $x_1 \dots x_n$ sind, so ändert sich $\frac{u}{x^r}$ nicht, wenn man darin $x_1 \dots x_n$ durch $\varrho x_1 \dots \varrho x_n$ ersetzt, unter ϱ eine gewöhnlich complexe Zahl verstanden. Nach Satz 9 wäre also $\frac{u}{x^r}$ eine constante Zahl a des Systems, d. h. u hätte die Form

$$u = a x^r\,.$$

Dies aber ist in der That eine analytische Function von x. Wir haben also gefunden:

Satz 10: *Ist ein Ausdruck*

$$u \equiv u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n ,$$

in dem $u_1 \ldots u_n$ homogene Functionen r^{ten} Grades von $x_1 \ldots x_n$ im gewöhnlich complexen Zahlengebiet bedeuten, eine analytische Function von $x \equiv x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, so ist er das Product aus einer constanten Zahl $a \equiv a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ des Systems mit der r^{ten} Potenz von x:

$$u = a x^r .$$

Zu späteren Convergenzbetrachtungen bedürfen wir noch des folgenden Satzes:

Satz 11: *Sind die absoluten Beträge der Coefficienten $x_1 \ldots x_n$ einer Zahl x des Systems sämmtlich kleiner als δ und sind die Doppelsummen der absoluten Beträge $|\gamma_{iks}|$ der γ_{iks}*

$$\sum_{i,k}^{1 \ldots n} |\gamma_{iks}| \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

kleiner als μ, so sind die absoluten Beträge aller Coefficienten von x^r kleiner als $\mu^{r-1} \delta^r$.

Natürlich soll hierbei r eine ganze positive Zahl bedeuten.

Der Beweis ist sehr einfach: Bezeichnen wir die Coefficienten von x^r mit $x_1^{(r)} \ldots x_n^{(r)}$:

$$x^r \equiv x_1^{(r)} e_1 + \cdots + x_n^{(r)} e_n ,$$

so ist

$$x^{r+1} = x^r x = \sum_{i,k,s}^{1 \ldots n} \gamma_{iks} x_i^{(r)} x_k e_s ,$$

also der Coefficient:

$$x_s^{(r+1)} = \sum_{i,k}^{1 \ldots n} \gamma_{iks} x_i^{(r)} x_k .$$

Ist nun der absolute Betrag aller $x_1 \ldots x_n$ kleiner als δ, d. h.:

$$| x_i | < \delta \quad (i = 1, 2 \ldots n) ,$$

und ferner

$$| x_i^{(r)} | < \varepsilon_r , \quad | x_i^{(r+1)} | < \varepsilon_{r+1} \quad (i = 1, 2 \ldots n) ,$$

so folgt:

$$\varepsilon_{r+1} < \sum_{i,k}^{1\ldots n} |\gamma_{iks}|\, \varepsilon_r \delta .$$

Ist jeder absolute Betrag:

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} |\gamma_{iks}| < \mu ,$$

so ist also

$$\varepsilon_{r+1} < \mu \varepsilon_r \delta .$$

Aus dieser Recursionsformel ergiebt sich ohne Weiteres:

$$\varepsilon_r < \mu^{r-1} \delta^r .$$

§ 5.

Reihenentwickelungen.

Wir haben zu Anfang unserer Untersuchungen vorausgesetzt, dass in den zu betrachtenden Functionen $f \equiv f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ die n gewöhnlich complexen Functionen $f_1 \ldots f_n$ analytische Functionen von $x_1 \ldots x_n$ seien. Es leuchtet sofort ein, dass es genügt hätte, vorauszusetzen, dass $f_1 \ldots f_n$ innerhalb eines gewissen Gebietes stetige Functionen von $x_1 \ldots x_n$ seien ebenso wie ihre ersten Ableitungen. Die Frage, ob letztere Voraussetzung allein genügt, um zu folgern, dass $f_1 \ldots f_n$ sich in Reihen entwickeln lassen, verdient zwar besondere Erwägung, soll aber in dieser Abhandlung noch nicht besprochen werden. Hier wollen wir nur noch zeigen, dass die Function $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ sich in eine Reihe entwickeln lässt, sobald $f_1 \ldots f_n$ analytische Functionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, die den Bedingungsgleichungen (19) genügen. Mit diesem Nachweis wird dann zugleich der Name »analytische« Function für f gerechtfertigt werden.

Zunächst bemerken wir: Eine Reihe von Zahlen unseres Systems wird summirt, indem man die Coefficienten von e_1 für sich, die von e_2 für sich u. s. w. summirt. Daher ist eine unendliche Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \cdots ,$$

in der allgemein

$$a^{(i)} = a_1^{(i)} e_1 + \cdots + a_n^{(i)} e_n$$

ist, unbedingt convergent dann und nur dann, wenn einzeln alle n Reihen von gewöhnlich complexen Zahlen

$$a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots$$

unbedingt convergiren.

Nach dieser Vorbemerkung machen wir von der Voraussetzung Gebrauch, dass $f_1 \ldots f_n$ analytische Functionen der gewöhnlich complexen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ in der Umgebung einer Stelle $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ sind. Danach können wir sie darstellen in Form unendlicher Reihen nach ganzen Potenzen von $x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0$, die in der Umgebung der Stelle $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ unbedingt convergiren:

$$(20) \qquad f_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \cdots \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

sodass also allgemein α_{ir} homogen und ganz vom r^{ten} Grade in den n Differenzen $x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0$ ist. Wir haben dann

$$(21) \quad f \equiv \sum_1^n{}^i f_i e_i = \sum_1^n{}^i \alpha_{i0} e_i + \sum_1^n{}^i \alpha_{i1} e_i + \sum_1^n{}^i \alpha_{i2} e_i + \cdots .$$

Ist f eine analytische Function von $x \equiv x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, so müssen $f_1 \ldots f_n$ die Bedingungen (19) erfüllen. Da nun

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial x_k} + \cdots \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so lauten die Bedingungen:

$$\sum_1^n{}^i \gamma_{iks} \left(\frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial x_j} + \cdots \right) = \sum_1^n{}^i \gamma_{ijs} \left(\frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial x_k} + \cdots \right) .$$

Weil $\frac{\partial \alpha_{ir}}{\partial x_j}$ vom $(r-1)^{\text{ten}}$ Grade homogen in $x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0$ ist, so zerfallen sie in die einzelnen:

$$\sum_1^n{}^i \gamma_{iks} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial x_j} = \sum_1^n{}^i \gamma_{ijs} \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial x_k} ,$$
$$\sum_1^n{}^i \gamma_{iks} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial x_j} = \sum_1^n{}^i \gamma_{ijs} \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial x_k} ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es sind also

$$\begin{aligned} &a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ &a_{12}e_1 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

sämmtlich analytische Functionen von x. Nach Satz 10 haben sie mithin, da die a_{ir} homogen in $x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0$ sind, die Form:

$$a_1(x - x^0), \quad a_2(x - x^0)^2, \ \ldots$$

Hierin bedeuten $a_1, a_2 \ldots$ constante Zahlen des Systems. Die Reihenentwickelung (21) für f nimmt somit die Form an, wenn die Constante $a_{10}e_1 + \cdots + a_{n0}e_n$ mit a_0 bezeichnet wird:

$$f = a_0 + a_1(x - x^0) + a_2(x - x^0)^2 + \cdots.$$

Diese Entwickelung ist in der Umgebung der Stelle $(x_1^0 - x_n^0)$ unbedingt convergent, da einzeln die n gewöhnlich complexen Reihen (20) daselbst unbedingt convergiren.

Satz 12: *Ist $f \equiv f_1e_1 + \cdots + f_ne_n$ eine sogenannte analytische Function von x im System und sind $f_1 \ldots f_n$ innerhalb der Umgebung der Stelle $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ nach ganzen Potenzen von $x_1 - x_1^0$, $\ldots x_n - x_n^0$ entwickelbar, so ist auch f darstellbar in der Form:*

$$f = a_0 + a_1(x - x^0) + a_2(x - x^0)^2 + \cdots,$$

in der $a_0, a_1, a_2 \ldots$ constante Zahlen des Systems bedeuten.

Hiermit wird, wie gesagt, der Name »analytische Function« für f gerechtfertigt.

Betrachten wir einmal eine *gewöhnlich complexe* analytische Function. Wir wollen voraussetzen, dass sie in der Umgebung der Stelle 0 entwickelbar sei. Es ist dies keine wesentliche Beschränkung der folgenden Ueberlegungen, sondern nur eine Vereinfachung der Schreibweise. Es sei diese Function

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

Hier sollen also $a_0, a_1, a_2 \ldots$ ebenso wie x *gewöhnlich complexe* Veränderliche sein, und die Reihe sei convergent, sobald

$$|x| < \varrho$$

ist. *Wenn wir nun in dieser Reihe x nicht mehr als gewöhnlich complexe Zahl, sondern als Zahl des Systems $(e_1 \ldots e_n)$ auffassen*, so ist dies eine Reihenentwickelung im Gebiete des Zahlensystems.

Wir behaupten, dass sie unbedingt convergirt, sobald x in der Umgebung der Stelle 0 liegt.

In der That, es sei wieder, wenn x eine allgemeine Zahl des Systems vorstellt, die Potenz:

$$x^r = x_1^{(r)} e_1 + \cdots + x_n^{(r)} e_n .$$

Die Reihe ist dann unbedingt convergent, wenn dies von den n einzelnen Reihen gilt:

$$(22) \qquad \begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{(2)} + a_3 x_1^{(3)} + \cdots , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^{(2)} + a_3 x_n^{(3)} + \cdots , \end{cases}$$

in denen nur gewöhnlich complexe Grössen vorkommen.

Wenn nun jeder absolute Betrag

$$| x_i | < \delta \quad (i = 1, 2 \ldots n) ,$$

ferner alle absoluten Beträge

$$\sum_{i,k}^{1 \ldots n} | \gamma_{iks} | < \mu \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

sind, so ist nach Satz 11 auch allgemein

$$| x_i^{(r)} | < \mu^{r-1} \delta^r .$$

In den n Reihen (22) sind also die absoluten Beträge der Glieder kleiner als in der Reihe:

$$| a_0 | + | a_1 | \delta + | a_2 | \mu \delta^2 + \cdots + | a_r | \mu^{r-1} \delta^r .$$

Nach Voraussetzung ferner ist die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r + \cdots$$

convergent, sobald x eine gewöhnlich complexe Zahl ist, für die

$$| x | < \varrho$$

ist. Mithin convergiren die n Reihen (22) sicher absolut, sobald allgemein

$$\mu^{r-1} \delta^r < \varrho^r$$

ist.

Ist also von einem endlichen r an stets:

$$\delta < \frac{\varrho}{\mu} \sqrt[r]{\mu} ,$$

so ist die Convergenz der Reihen (22) verbürgt. Nun ist μ eine positive Zahl grösser als die n Summen

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} |\gamma_{iks}| \quad (s = 1, 2 \ldots n).$$

Wir können daher μ immer grösser als Eins wählen. Alsdann nimmt der Werth der rechten Seite der letzten Ungleichung beständig ab, sobald r wächst, und zwar bis $\frac{\varrho}{\mu}$. Die Reihen (22) convergiren daher, sobald

$$\delta < \frac{\varrho}{\mu}$$

ist.

Satz 13: *Wenn die unendliche Reihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

in der $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sowie x gewöhnlich complexe Zahlen bedeuten, unbedingt convergirt, sobald der absolute Betrag von x kleiner als ϱ ist, so convergirt dieselbe Reihe, sobald in ihr x eine Zahl des Systems $(e_1 \ldots e_n)$ vorstellt: $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, unbedingt, sobald die absoluten Beträge von $x_1 \ldots x_n$ sämmtlich kleiner als $\frac{\varrho}{\mu}$ sind. Dabei wird unter μ eine Zahl grösser als Eins oder gleich Eins verstanden, die grösser ist als jede der n Summen

$$\sum_{i,k} |\gamma_{iks}|.$$

Kürzer, aber weniger genau ausgesprochen, lautet der Satz so:

Satz 14: *Ist $f(x)$ eine analytische Function von x im gewöhnlich complexen Zahlengebiet, so bleibt $f(x)$ eine analytische Function, sobald man darin unter x eine allgemeine Zahl des Zahlensystems $(e_1 \ldots e_n)$ versteht.*

In einer zweiten Abhandlung werden wir hieraus weitere Schlüsse ziehen.

Leipzig, im November 1893.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

M. Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. IV . . 805

G. Scheffers, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen. (Erste Abhandlung.) Vorgelegt von dem ordentlichen Mitgliede SOPHUS LIE. . . 828

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.